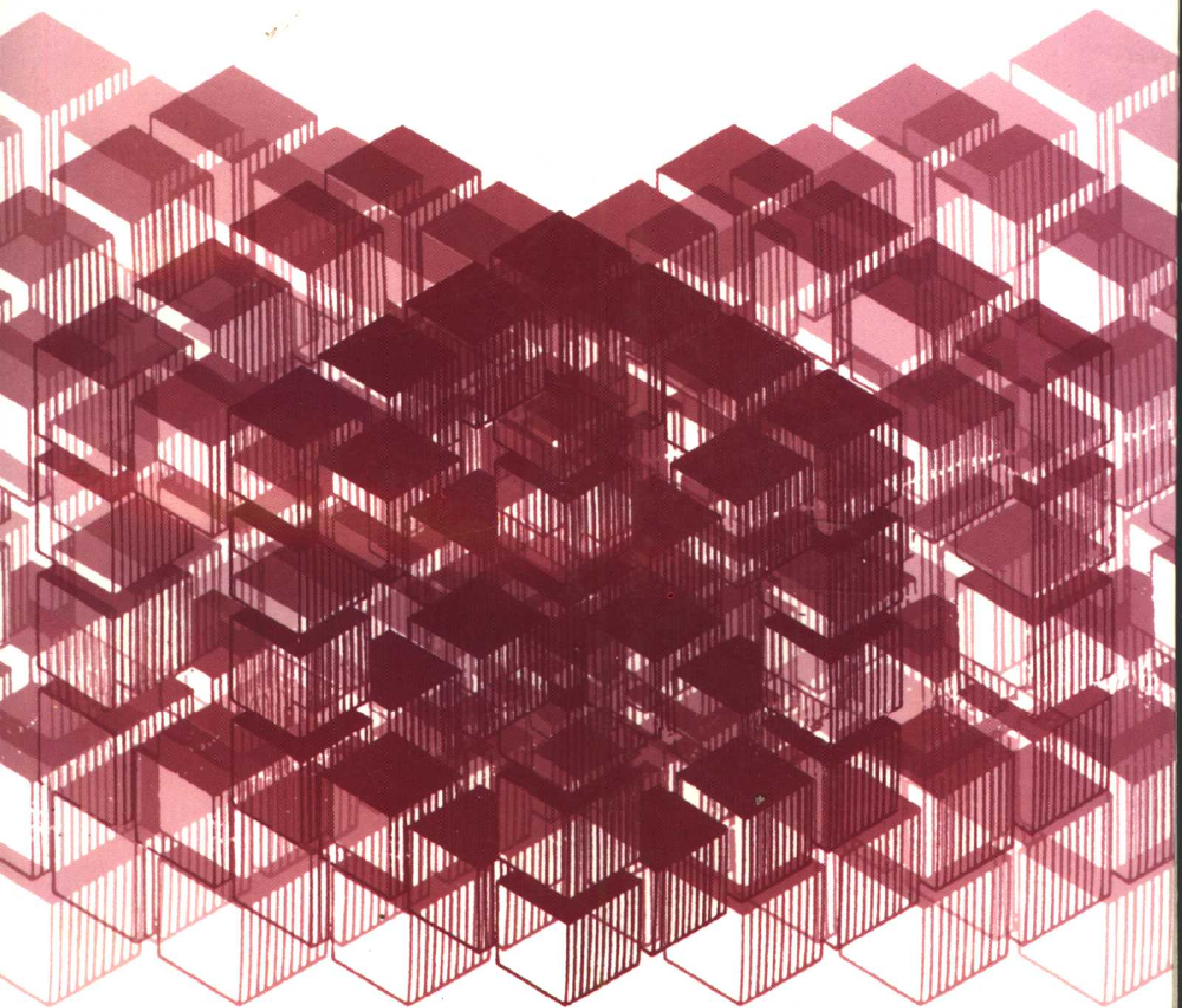
基本图形分析法

徐方瞿



大象出版社

基本图形分析法

徐方瞿

大象出版社

中央社会主义学院 惠存

徐方瞿

二〇〇一年三月三十日

基本图形分析法

徐方瞿　著

责任编辑　张国旺

大象出版社 出版

（郑州市农业路 73 号　邮码 450002）

河南第二新华印刷厂印刷

河 南 省 新 华 书 店 发 行

850×1168 毫米　32 开本　20 印张　469 千字

1998 年 7 月第 1 版　　1998 年 7 月第 1 次印刷

印数 1—4 325 册

ISBN 7-5347-2024-9/G・1688

定　价　　21.00 元

前　言

基本图形分析法是笔者在长期从事平面几何教学工作的基础上，经过多年的研究，总结、创造的一种平面几何问题的分析方法.

十多年来，由于基本图形分析法能较系统地、有效地解决平面几何问题的分析方法的规律性，尤其是能较完善地解决平面几何中添辅助线的规律性，所以在平面几何教学中取得了显著的效果，对大面积提高平面几何教学质量，对提高广大几何教师的业务素质，教学能力起了显著的作用. 全国二十多个省、市、自治区的 300 多所中学先后采用基本图形分析法进行几何教学，取得了很好的效果。同时有近 5000 名教师到上海参加了执教基本图形分析法的教学培训工作. 在基本图形分析法的逐步发展、应用和推广的过程中，各地数学研究机构和广大数学教师都希望能有一本系统地介绍基本图形分析法的专著，既可作为教学的参考，也可作为数学教师进修或培训的教材. 为此，笔者将近三十年来对基本图形分析法的研究成果，汇集于一册，写成了本书.

本书是一本论述分析方法的专著，它的目的在于剖析、介绍和论述对几何问题的思维过程、分析过程. 它所要解决的问题是：拿到一个问题后是怎样想的？是怎样一步一步想出来的？为什么会这样想？所以它的内容和结构有以下几个主要的特点：

1. 只介绍分析过程，不写严格的证明过程. 分析过程是解决几何问题的关键，也是思维活动中最有价值的精华. 而证明过程则是正确的分析再加上规范化的表达的结果，对于数学教师来说，规范化的表达应该是没有问题的，所以本书将所有的证明过程都略去不写.

2. 为了显示添加辅助线的过程，原则上每新增一条辅助线就画一幅新的图，以体现几何问题的辅助线是随分析过程的进行，分析到什么地方就添到什么地方的道理.

3. 每一部分内容都按前详后简的原则撰写. 由于分析过程的介绍，尤其是每一部分的剖析，都有相当的篇幅，而分析中出现的规律性的叙述在语言上又基本上是相同的，如对每一道题目都作详尽的剖析和介绍，本书就会相当繁长，因此每一种分析方法在作了一定数量的介绍，实质上也就是在揭示了规律性以后，同样的内容就写得简略了.

4. 为了适应更多方面的读者的需要，本书在每一部分的开始，都适当地选取一些基础的，难度并不高的例题，作分析方法的介绍，以使内容上体现由浅入深的原则.

本书图形系由张际南、雷英、南宫慈云和朱蓓蓓等五人绘制，在此一并致谢！

由于笔者水平所限，对于本书的不当之处，望广大读者给予批评指正.

编　者

1996 年 5 月于上海

目　录

第一章　基本图形分析法概论……………………（1）
第一节　基本图形分析法……………………（1）
第二节　怎样应用基本图形分析法添辅助线
……………………………………（29）
第二章　平行线……………………………（37）
第三章　等腰三角形…………………………（53）
第一节　等腰三角形…………………………（53）
第二节　角平分线和平行线的组合图形…（62）
第三节　等腰三角形中的重要线段………（87）
第四节　角平分线和垂线的组合图形……（98）
第五节　直角三角形斜边上的中线………（131）
第四章　与圆有关的角………………………（157）
第一节　圆周角……………………………（157）
第二节　弦切角……………………………（192）
第五章　全等三角形…………………………（233）
第一节　轴对称型…………………………（233）
第二节　中心对称型………………………（278）
第三节　旋转型……………………………（299）
第四节　平移型……………………………（382）
第六章　相似三角形…………………………（387）
第一节　平行线型…………………………（387）
第二节　逆平行线型………………………（540）
第三节　旋转型……………………………（580）

第四节　位似型………………………………（606）
第七章　特殊角三角形……………………………（611）
第八章　有关三角形面积的基本图形………（623）

第一章 基本图形分析法概论

第一节 基本图形分析法

图形，是几何学科的研究对象，平面图形，是平面几何的研究对象.

一道几何问题，无论是证明题、计算题还是作图题，都会以一个图形以及这个图形所具有的各种性质为其研究对象. 而出现在几何问题中的每一个几何图形，无论是怎样的简单或怎样的复杂，经过分析，都一定可以发现这样一个事实，即它是由一个或若干个最简单、最基本的图形组合而成的.

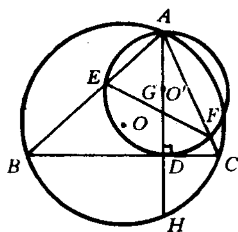


图 1·1

例如，如图 1·1，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，边 BC 上的高 AD 的延长线交$\odot O$ 于 H，以 AD 为直径的$\odot O'$ 交 AB、AC 于 E、F，EF 交 AD 于 G. 求证：$AD^2 = AG \cdot AH$.

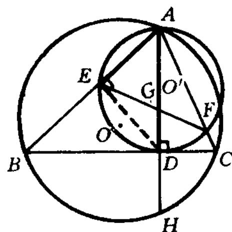


图 1·2

分析：这个问题中出现了条件 AD 是$\odot O'$ 的直径，E(或 F)是半圆上的点，所以可应用半圆上的圆周角是直角的基本性质进行证明. 而现在图形中有$\odot O'$ 的直径 AD，有半圆上的点 E，但没有圆周角. 所以应将圆周

角添上，于是连结 DE（如图 1・2），即可得 $\angle DEA=90^\circ$. 这里出现的半圆上的圆周角实际上就是组成这个几何图形的第一个基本图形.

在得到 $DE\perp AE$ 后，由条件 $AD\perp BC$，可得 $\triangle ABD$ 是直角三角形，这样就出现了 DE 是 $Rt\triangle ABD$ 的斜边上的高，那么，应用直角三角形斜边上的高的基本性质，就可得结论中出现的 AD^2 应等于 $AE\cdot AB$，且 $\angle ADE=\angle ABD$. 这个直角三角形斜边上的高，就是组成这个几何图形的第二个基本图形（如图 1・3）.

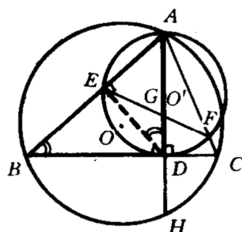


图 1・3

由性质 $AD^2=AE\cdot AB$，再对比要求证的结论 $AD^2=AG\cdot AH$，可知问题转化成要证明 $AE\cdot AB=AG\cdot AH$.

这是线段之间的比例关系，经过描图可发现，出现了两组相乘线段重叠在一直线上，且有一个公共的端点，从而可添加一组逆平行线型的相似三角形进行证明，添加的方法是将端点（B）和端点（H）、内分点和内分点分别连接起来，于是连接 BH. 可得 $\triangle AGE$ 和 $\triangle ABH$ 应是一对逆平行线型的相似三角形，这就是组成这个几何图形的第三个基本图形（如图 1・4）. 而要证明这两个三角形相似就可以转化为要证 $AE\cdot AB=AG\cdot AH$ 的等价性质 $\angle AGE=\angle ABH$（或 $\angle AEG=\angle H$）.

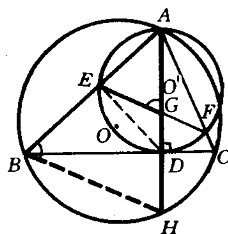


图 1・4

由于 $\angle AGE$ 可以看作是 $\triangle AFG$ 的一个外角（E、G、F 成一直线），所以 $\angle AGE=\angle FAG+\angle AFG$. 而 $\angle FAG$ 可以看作是 $\odot O$ 的一个圆周角，在 $\odot O$ 上已经出现四点 A、B、H、C，所以应用圆周

角的性质可得$\angle FAG=\angle CBH$. 这里出现的圆周角就是组成这个几何图形的第四个基本图形(如图 1·5). 根据同样的道理,在$\odot O'$中应用圆周角的基本图形的性质可得$\angle AFG=\angle ADE$. 而已经证明了$\angle ADE=\angle ABD$,所以$\angle AFG=\angle ABD$,又$\angle CBH+\angle ABD=\angle ABH$,所以$\angle ABH=\angle AGE$就可以证明,分析也就完成.

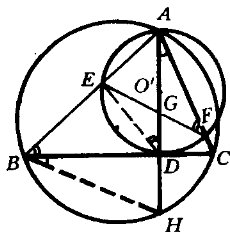


图 1·5

从上述例题的分析,可以发现这个几何问题的图形实际上是由半圆上的圆周角、直角三角形斜边上的高、逆平行线型相似三角形和圆周角这四个基本图形组合而成的. 所谓对这个问题的分析,实质上就是将问题进行分解并进而发现且找到组成它的所有的基本图形,再应用这些基本图形的性质使问题得到解决. 如果我们再对更多的几何问题作这样的分解和研究,就可以进一步发现,几何问题的这种特点是带有普遍性的,而这种分析方法又是带有规律性的. 于是就可通过总结、归纳得到:

在几何学科中,根据问题的条件和结论,分析并找到组成这个几何问题的一个或若干个基本图形,再应用这些基本图形的性质,使问题得到解决,这样一种分析方法就叫做基本图形分析法.

在上述讨论什么是基本图形分析法的过程中,出现了基本图形的概念,所以我们也需要讨论一下什么是基本图形。基本图形,顾名思义,似乎就应该是组成几何图形的最基本的元素,这样就会很自然地想到点、线段和弧这些图形. 然而我们现在所要研究和解决的问题不仅仅是图形的分解或"拆零",更重要的目标是要解决几何题的分析方法问题. 从这个意义上讲,将点、线段和弧作为基本图形就没有意义了. 甚至连三角形也不能作为基本图形,因为它不仅可以在绝大多数几何问题的图形中不止一个地出现,而且也无法表述清楚它在分析过程中应在什么条件下应用的问题. 因此,

对基本图形的定义就要兼取两个方面的要求，也就是它既是组成几何图形的“基本元”，又必须是有特定的性质和应用条件的图形，而不能将甚至是一道题目的图形或比它们更简单的无法说清楚应用条件和分析方法的图形也作为基本图形. 据此，我们有：

在几何分析中，组成一个几何问题的图形的最简单、最基本的但又是具有特定的性质，能明确地阐明其应用条件和应用方法的图形，称为基本图形.

一般几何问题的图形，都可以分解成一个或若干个基本图形. 因此在对一个几何问题进行分析并得到相应的基本图形后，如果再对一个新的几何问题也进行同样的分析，则又可得到一个或若干个基本图形，然后我们可将这两组基本图形加以比较，这时就会出现两种可能性：一种是两组基本图形中没有相同的、重复的，另一种是两组基本图形中有一个或若干个是相同的、重复的. 这时我们就可以将新出现的基本图形留下，而将重复的基本图形筛去，在这样一个过程中我们就会发现，随着我们解剖的几何图形的增多，在刚开始的时候，新的基本图形的增加或出现还是比较快的，但逐渐逐渐其增加或出现的新的基本图形就越来越少了. 而当我们所剖析的几何问题达到一定的数量，而这些几何问题的选取本身又是很随机的话，那么新的基本图形就几乎不再增加. 这样，我们就可以应用这种筛选的方法得到我们所期望、所需要的，又是我们已经可以找到的所有的应用于几何分析的基本图形，或者也可以讲是得到一个基本图形的集合.

接下来的问题当然应该是逐一地介绍基本图形，但是介绍这些基本图形的目的显然是要在分析中应用，这样就会出现一个在什么情况下或在什么条件下应该用哪一个基本图形的问题？再进一步的话还有一个怎么样应用的问题. 实质上也就是要讨论每一个基本图形的应用条件和应用方法的问题，这两个问题实质上也是基本图形分析法应用的关键问题.

在一个几何问题中，为什么会想到要应用这个基本图形而不想到要应用另外的一个基本图形，显然是决定于这个基本图形的特征，决定于这个基本图形不同于其它基本图形的属于它本身独具的本质属性，决定于这个基本图形和其它基本图形的本质上的差异. 所以，要解决基本图形的应用条件问题，首先就要研究和讨论每一个基本图形的特性，然后，我们就可以根据这些特性，来归纳、发现并最终得到每一个基本图形的应用条件. 在我们的研究中，我们还发现在所讨论的基本图形的特性和随之得到的应用条件中，除了必要的是以数量关系表现的性质以外，相当一部分是位置关系的表述，这也是基本图形分析法和传统的几何分析方法的一个重要的区别. 在根据应用条件确定或找到基本图形以后，应用方法一般来讲都比较容易确定，在以后的讨论中，我们可以进一步发现，应用方法实际上是基本图形完整化的具体表述，所以基本图形一经确定，应用方法也就相应地确定了. 因此，在基本图形的介绍中，从某种意义上讲，应用条件和应用方法甚至要比基本图形本身还重要得多.

现在我们就可以逐一地来介绍基本图形，而根据我们多年来的研究，这些基本图形可以分为以下这几个部分：平行线、等腰三角形、与圆有关的角、全等三角形、相似三角形、特殊角三角形、与面积方法有关的三角形.

一、平行线.

图形的基本性质：(如图 1·6)

$\angle 1=\angle 2 \quad \Longleftrightarrow AB /\!/ CD$

$\angle 1=\angle 3 \quad \Longleftrightarrow AB /\!/ CD$

$\angle 1+\angle 4=180° \quad \Longleftrightarrow AB /\!/ CD$

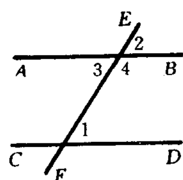


图 1·6

图形的基本特征：两条平行线或者两条要判定是平行的直线被第三条直线所截.

当几何问题中，出现了两条平行线或两条要判定为平行的直线被第三条直线所截，或者是出现了平行线的判定问题、平行线性质的应用问题时，就可以应用或添加平行线的基本图形进行分析.

应用的方法是抓住两条平行线被第三条直线所截的特点，具体的方法是：添加同与两条平行线相交的第三条直线；添加同和第三条直线相交的一组平行线.

二、等腰三角形.

1. 等腰三角形.

图形的基本性质：(如图 1·7)

$\triangle ABC$ 中，$AB=AC \Longleftrightarrow \angle B=\angle C$

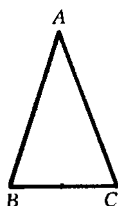


图 1·7

图形的基本特征：等腰三角形的两条腰是两条具有公共端点，但又不在一直线上的两条相等线段.

当几何问题中，出现了两条具有公共端点而又不在一直线上的相等线段时，就可以应用或添加等腰三角形的基本图形进行分析.

应用的方法是将这两条具有公共端点的相等线段组成等腰三角形，这时如果只有两条腰而没有底边的话，就应将底边添上.

2. 出现顶角的外角的等腰三角形.

图形的基本性质：(如图 1·8)

$\triangle ABC$ 中，AD 是 BA 的延长线.

$AB=AC \Longleftrightarrow \angle DAC=2\angle B(=2\angle C)$.

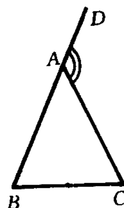


图 1·8

图形的基本特征：出现了等腰三角形顶角的外角以及这个外角与它的不相邻内角之间的倍半关系.

当几何问题中，出现了两条具有公共端点而又不在一直线上的相等线段以及由它们组成的等腰三角形的顶角的外角，或者出现了两个角之间的倍半关系且其中的倍角可以看作是一个三角形的外角

(或一个角的邻补角)时,就可以应用或添加出现顶角的外角的等腰三角形进行分析.

应用的方法是将等腰三角形找出或添完整后,再应用与两条腰相等具有等价性质的角的倍半关系进行分析.

3. 角平分线和平行线的组合而得到的等腰三角形.

i)由角的一边的平行线与角平分线相交得到的等腰三角形.

图形的基本性质:(如图1·9)

OC 是 $\angle AOB$ 的角平分线,$DE /\!/ OA$ 且分别交 OB、OC 于 D、E.

则 $\triangle DOE$ 是等腰三角形.

即:$\angle 1=\angle 2, DE /\!/ OA \Rightarrow DO=DE$.

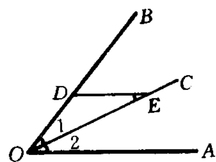


图1·9

在上述三个性质中,只要出现其中任意两个,则第三个性质必定成立.

图形的基本特征:出现了角平分线和角的边的平行线的组合关系.

当几何问题中出现了角平分线和角的一边的平行线的组合关系,或者出现了角平分线、角的一边的平行线、等腰三角形这三个性质中的任意两个时,就可以应用或添加由角的一边的平行线与角平分线相交得到的等腰三角形的基本图形进行分析.

应用的方法是将角的一边的平行线与角的另一边以及角平分线相交组成等腰三角形.

ii)由角平分线的平行线与角的边相交得到的等腰三角形.

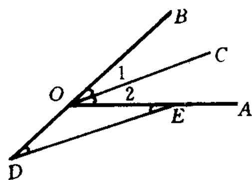


图1·10

图形的基本性质:(如图1·10)

OC 是 $\angle AOB$ 的角平分线,$DE /\!/ OC$ 且分别交 BO 的延长线、OA 于 D、E.

则$\triangle ODE$是等腰三角形.

即：$\angle 1=\angle 2, DE // OC \Rightarrow OD=OE$.

在上述三个性质中，只要出现其中任意两个，则第三个性质必定成立.

图形的基本特征：出现了角平分线和角平分线的平行线的组合关系.

当几何问题中出现了角平分线和它的平行线的组合关系，或者出现了角平分线、角平分线的平行线、等腰三角形这三个性质中的任意两个时，就可以应用或添加由角平分线的平行线与角的边相交得到的等腰三角形的基本图形进行分析.

应用的方法是将角平分线的平行线与角的一边以及另一边的反向延长线或平行线相交组成等腰三角形.

4.具有重要线段的等腰三角形.

图形的基本性质：(如图1·11)

$AB=AC, AD \perp BC \Longleftrightarrow \angle 1=\angle 2, BD=CD$.

在上述四个性质中，只要任意取其中的两个作为条件，那么另两个性质必定成立.且图中$\triangle ABD$和$\triangle ACD$是一对轴对称型的全等三角形.

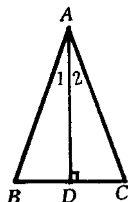


图1·11

在等腰三角形中，底边上的高就是底边上的中线和顶角的角平分线，这条线段就称为等腰三角形中的重要线段.

图形的基本特征：出现了等腰三角形中的重要线段或者是出现了三角形一边上的中线、高、角平分线这三条线段中有两条重合在一起.

当几何问题中出现了下列情况之一时：(1)等腰三角形中的重要线段；(2)三角形(在已知图形中，这个三角形可以出现得尚不完整)的一边上的高、中线和角平分线这三条线中的两条重合；(3)角平分线和向角平分线所作的垂线.就可以应用或添加具有重要线

段的等腰三角形的基本图形进行分析.

应用的方法是:(如图 1·12～1·15)

(1)在出现等腰三角形和它的底边上的高时,可直接应用基本图形的性质进行分析.

(2)在出现等腰三角形和它的底边的中点时,应将这条底边上的中线添上.

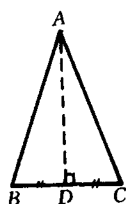


图 1·12

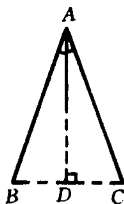


图 1·13

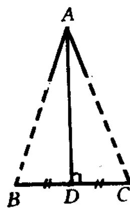


图 1·14

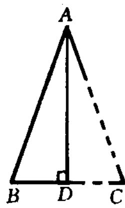


图 1·15

(3)在出现等腰三角形和它的顶角平分线时,应将这条角平分线与底边相交,如尚未相交的则应延长到相交.

(4)在出现三角形一边上的高和中线重合,或者也就是出现一条线段的垂直平分线时,则应将等腰三角形的两腰添上,或者也就是将线段中垂线上的一点与线段的两个端点连接起来,构成等腰三角形.

(5)在出现三角形一边上的中线和它所对的角的角平分线重合时,可直接应用基本图形的性质.

(6)在出现三角形一边上的高和它所对的角的角平分线重合,也就是出现角平分线和向角平分线所作的垂线时,可将角平分线的垂线延长到与角的两边相交,构成等腰三角形.

当几何问题中出现了垂直于弦的直径时,也可以应用具有重要线段的等腰三角形的性质进行分析,应用方法和上述介绍的应用方法相同.

5. 出现斜边上的中线的直角三角形.

图形的基本性质:(如图 1·16)

在$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90^\circ$,则

$AD=BD\Longleftrightarrow CD=AD=\frac{1}{2}AB$

$AD=BD\Longleftrightarrow\angle A=\angle DCA$,$\angle BDC=2\angle A$

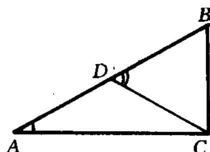


图 1·16

出现斜边上的中线的直角三角形实质上是两个顶角互补的等腰三角形的组合图形.

图形的基本特征:出现了直角三角形斜边的中点,线段之间的倍半关系和角之间的倍半关系.

当几何问题中出现了:(1)直角三角形斜边的中点;(2)两条线段之间的倍半关系,而其中的倍线段是一个直角三角形的斜边;(3)两个角之间的倍半关系,而其中的半角是一个直角三角形的内角这三种情况之一时,就可以应用或添加出现斜边上的中线的直角三角形进行分析.应用的方法是将直角三角形斜边上的中线添上.

三、与圆有关的角.

1. 圆周角.

图形的基本性质:(如图 1·17)

四边形$ABCD$中,CE是BC的延长线

A、B、C、D四点共圆$\Longleftrightarrow\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$

A、B、C、D四点共圆$\Longleftrightarrow\angle DCE=\angle BAD$

A、B、C、D四点共圆$\Longleftrightarrow\angle BAC=\angle BDC$

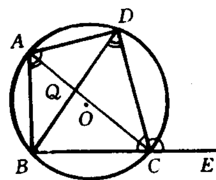


图 1·17

图形的基本特征:出现了同一个圆上有四点,也就是四点共

圆.

当几何问题中出现了同一个圆上的四点也就是四点共圆时，就可以应用或添加圆周角的基本图形进行分析.

应用的方法是将圆周角的基本图形，也就是圆内接四边形和它的两条对角线添上.但在具体应用时，若应用的是同弧所对的圆周角相等的性质，则可省略一组对边；若应用的是圆内接四边形对角互补的性质，则可省略两条对角线；若出现了圆内接四边形的一个外角，则可应用圆内接四边形外角等于它的内对角的性质.

当几何问题中出现了两圆相交的问题，就可以通过添加公共弦，将问题转化到每一个圆中，再应用圆周角(或与圆有关的角)的基本图形来进行分析.

2. 半圆上的圆周角.

图形的基本性质：(如图 1·18)

$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，则

AB 是$\odot O$ 的直径$\Longleftrightarrow \angle ACB=90°$

图形的基本特征：出现了圆的内接直角三角形.

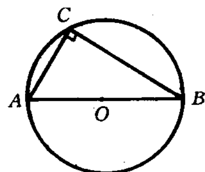


图 1·18

当几何问题中出现了圆的直径和半圆上的点，或者出现了 90°的圆周角时，就可以应用或添加半圆上的圆周角的基本图形进行分析.

应用的方法是：若出现圆的直径和半圆上的点而没有圆周角时，应将圆周角添上，也就是应将半圆上的点和直径的两个端点分别连接起来；若出现 90°的圆周角而没有直径时，应将直径添上.

3. 弦切角.

图形的基本性质：(如图 1·19)

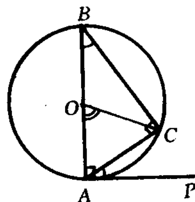


图 1·19

$$\left.\begin{cases}PA\text{ 与}\odot O\text{ 相切于 }A\\AB\text{ 是}\odot O\text{ 的直径}\\C\text{ 是半圆上的一点}\end{cases}\right.\Rightarrow\begin{cases}\angle PAC=\angle B=\frac{1}{2}\angle AOC,\\\angle PAB=\angle ACB=90^\circ\end{cases}$$

图形的基本特征：出现了圆的切线和过切点的弦、直径（或半径）.

当几何问题中出现了圆的切线或圆的半径的垂线时，就可以应用或添加弦切角的基本图形进行分析.

应用的方法是：若出现圆的切线时，应添加过切点的弦或直径（半径）；若出现半径的垂线时，应过半径的外端添加圆的切线.

当几何问题中出现了两圆相切（包括内切和外切）的问题时，就可以通过添加过切点的两圆的公切线，将问题转化到每一个圆中，再应用弦切角（或与圆有关的角）的基本图形来进行分析.

四、全等三角形.

1. 轴对称型全等三角形.

图形的基本性质：（如图 1・20）

$\triangle ABC\cong\triangle ABD\Longleftrightarrow\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 是等腰三角形.

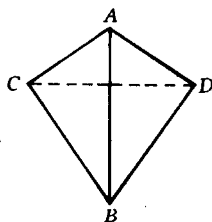


图 1・20

图形的基本特征：$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 关于 AB 成轴对称. 图形由两个具有公共底边的等腰三角形组合而成，图形中各组对应相等的线段和角都位于这些等腰三角形的轴对称部分.

当几何问题中出现了：(1)两条相等的线段或两个相等的角是位于一个等腰三角形（或等腰梯形）的轴对称部分；(2)两条相等的线段或者两个相等的角是关于某一直线（或线段）成轴对称这两种情况之一时，就可以应用或添加轴对称型全等三角形进行分析.

应用的方法是：(1)相等的线段或角是位于等腰三角形的轴对称部分时，可直接根据轴对称性的对应部位找到或添加全等三角

形；(2)相等的线段或角是关于某一直线或线段成轴对称时，若图形中没有对称轴，可添加对称轴，若图形中已经有对称轴，可将三角形沿对称轴翻转也就是作出轴对称的图形.

2. 中心对称型全等三角形.

图形的基本性质：(如图 1·21)

$\triangle ABO \cong \triangle CDO \Longleftrightarrow AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

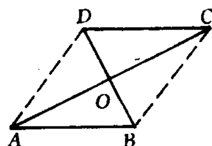


图 1·21

图形的基本特征：$\triangle ABO$ 和 $\triangle CDO$ 关于点 O 成中心对称. 图形中必定出现相应的平行四边形，图形中各组对应相等的线段和角都位于一个平行四边形的中心对称部分.

当几何问题中出现了：(1)两条相等的线段或两个相等的角是位于一个平行四边形的中心对称部分；(2)一组(或两条)相等的线段在一组对顶角的两边而且成一直线；(3)两条线段相交且互相平分这三种情况之一时，就可以应用或添加中心对称型全等三角形进行分析.

应用的方法是：(1)相等的线段或角是位于平行四边形的中心对称部分时，可直接应用平行四边形的性质或根据平行四边形的中心对称性的对应部分找到或添加全等三角形；(2)两条相等线段位于一组对顶角的两边而成一直线时，可过相等线段对应的两个端点作平行线，且与过中点的直线相交构成全等三角形；(3)两条线段相交且互相平分时，则应将四个端点两两连结起来构成全等三角形，而这两条连线必定平行而且相等.

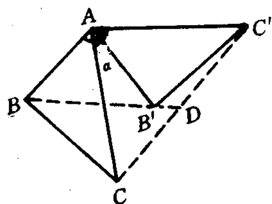


图 1·22

3. 旋转型全等三角形.

图形的基本性质：(如图 1·22)

将$\triangle ABC$绕它的一个顶点A旋转一个$\angle\alpha$成$\triangle AB'C'$，则$\triangle ABC$和$\angle AB'C'$就是一对旋转型全等三角形，点A就是旋转中心，$\angle\alpha(=\angle BAB'=\angle CAC')$就是旋转角. AB、AB'和AC、AC'是同一点A发出的两组交成等角的相等线段. 当旋转角等于60°或90°时，这两组相等线段可以分别组成一个等边三角形或等腰直角三角形(半个正方形). 若BB'的延长线交CC'于D，则A、B、C、D四点共圆，A、B'、D、C'四点共圆.

图形的基本特征：一对旋转型的全等三角形的基本图形中，必定同时出现一对具有公共顶点且顶角相等的(或相似的)等腰三角形和两个圆内接四边形(或圆周角的基本图形).

当几何问题中出现了：(1)两个具有公共顶点的等边三角形或正方形；(2)由一点发出的两组夹等角的相等线段这两种情况之一时，就可以应用或添加旋转型全等三角形进行分析.

应用的方法是：将由公共(顶)点发出的两组相等线段两两组成全等三角形，若第三组对应边没有，就应将这一组对应边添上，且这两条对应边的交角也必定等于旋转角.

4. 绕正方形的中心旋转90°的全等的直角三角形.

图形的基本性质：(如图1·23)

$$\left.\begin{array}{l}BC\perp BD, BC=BD\\ CA\perp AE, DE\perp AE\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle ABC\cong\triangle EDB$$

图形的基本特征：BC和BD是一个正方形的一组邻边，它们可以组成一个等腰直角三角形(或半个正方形)，$\triangle ABC$和$\triangle EDB$是绕这个正方形的中心旋转90°得到的全等的直角三角形.

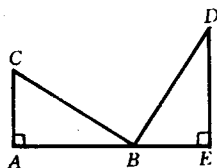


图1·23

当几何问题中出现了过正方形的一个顶点向过它的相邻顶点的一条直线所作的垂线时，就可应用或添加绕正方形的中心旋转90°的全等的直角

三角形进行分析.

应用的方法是：将三角形绕正方形的中心旋转 90°，或者是过正方形的这个顶点的对角顶点向同一条直线作垂线.

这一个全等三角形的基本图形也可以应用到绕正三角形的中心旋转 60°的情况，分析和应用的方法基本上是类似的.

5. 平移型全等三角形.

图形的基本性质：(如图 1·24)

将$\triangle ABC$平行移动到$\triangle A'B'C$，则$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C$就是一对平移型全等三角形. 这时四边形 $ABB'A'$、$ACC'A'$、$CBB'C'$ 都是平行四边形.

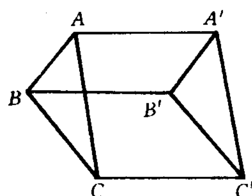


图 1·24

图形的基本特征：一对平行线型全等三角形中，必定同时出现三个两两都有一公共边的平行四边形.

当几何问题中出现两个具有公共边的平行四边形时，就可以应用或添加平移型全等三角形进行分析.

应用的方法是将两个平行四边形相应的(或对应的)顶点分别连接起来，即可得一对平移型全等三角形和第三个平行四边形.

五、相似三角形.

1. 平行线型相似三角形.

i)由三角形内的边的平行线段得到的相似三角形.

图形的基本性质：(如图 1·25)

$\triangle ABC$中，$DE /\!/ BC \Rightarrow \triangle ADE \backsim \triangle ABC$，

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$$

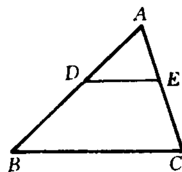


图 1·25

图形的基本特征：出现了三角形内一条边的平行线段；经过对比例线段的描图，可以发现图形中出现了两组相比线段重叠在一

直线上.

当几何问题中出现了:(1)三角形或四边形、梯形中一条边的平行线段;(2)相比两线段重叠在一直线上,且有公共的端点这两种情况之一时,就可以应用或添加由三角形内一条边的平行线段得到的平行线型相似三角形进行分析.

应用的方法是:(1)直接应用平行线型相似三角形的性质.将四边形内一条边的平行线段转化成三角形内一条边的平行线段.转化的方法就是将四边形的问题转化成为三角形问题讨论的基本方法.(2)当出现一组相比线段重叠在一直线上,且有一公共端点时,应用的方法是过端点和内分点作平行线.具体添加时,应先从图形中过端点或内分点的线段中选取一条线段作为平行方向线段,那么当平行方向线段取在过端点时,平行线就过内分点作,当平行方向线段取在过内分点时,平行线就过端点作;当出现两组相比线段重叠在一直线上,且有一公共端点时,应用的方法也是过端点和内分点作平行线,具体添加的方法则是将端点和端点,内分点和内分点分别连接起来,而这两条连线必定是平行线.

ii)由三角形外的边的平行线段得到的相似三角形.

图形的基本性质:(如图 1・26)

$DC \parallel AB \Rightarrow \triangle ABO \backsim \triangle CDO$, $\dfrac{AO}{CO}=\dfrac{BO}{DO}=\dfrac{AB}{CD}$.

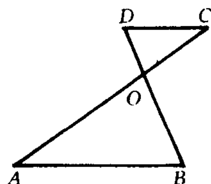


图 1・26

图形的基本特征:出现了三角形外的一条边的平行线段;相比两线段重叠在一直线上,且以内分点为公共的端点.

当几何问题中出现了:(1)三角形外一条边的平行线段或两条平行线段;(2)相比两线段重叠在一直线上,且以内分点为公共端点这两种情况之一时,就可以应用或添加由三角形外一条边的平

行线段得到的平行线型相似三角形进行分析.

应用的方法是:(1)直接应用平行线型相似三角形的性质.将两条平行线段的四个端点两两交叉连接,组成平行线型相似三角形.(2)当出现一组相比线段重叠,且以内分点为公共端点时,应用的方法是过两个端点作平行线.具体添加时,应从图形中过端点的线段中选取一条线段作为平行方向线段,那么平行线就过另一个端点作,且应作到和过内分点的另一条直线相交.若所取平行方向线段过端点,且过平行方向线段两端的直线在内分点相交时,平行线也是过另一个端点作.当出现两组相比线段重叠在一直线上,且这两直线在内分点相交时,应用的方法也是过端点作平行线,而具体的添加方法则是将这四个端点两两对应地连接起来,而这两条对应的连线必定是平行线.

iii)三角形中位线.

图形的基本性质:(如图 1·27)

$$\begin{matrix} AD=BD \\ AE=CE \end{matrix} \Rightarrow DE \parallel BC, DE=\frac{1}{2}BC$$

图形的基本特征:出现了两个中点和线段之间的倍半关系.

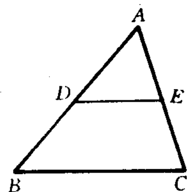


图 1·27

当几何问题中出现了:(1)线段之间的倍半关系,且这种倍半关系是和线段的中点发生联系;(2)两个或两个以上的中点问题这两种情况之一时,就可以应用或添加三角形中位线进行分析.

应用的方法是:(1)若将倍线段取作三角形的边,则添加三角形相应的中位线;若将半线段取作三角形的中位线,则应添加三角形的边,也就是应将相应的三角形添出.(2)若出现多个中点问题时,当两个已知中点所在的线段有公共端点,从而可以组成三角形时,这两个已知中点的连线就是三角形的中位线.如果这时出现的是有三角形,而没有中位线,则应将三角形的中位线添上,如果这

时出现的是有中位线，而三角形不完整，则应将三角形添完整，或者将三角形的边添上；当已知中点所在的线段没有公共端点或者是重叠线段，因而不能组成三角形时，已知中点的连线就不是三角形的中位线，这时就应增加中点，且应增加和已知中点所在的线段有公共端点的线段的中点. 然后再根据前述方法添加三角形的中位线.

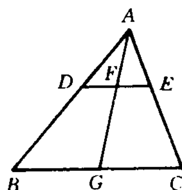
iv)平行线型相似三角形的组合图形.

图形的基本性质：

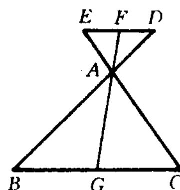
(如图 1・28)

$DE \parallel BC$，BD、CE、GF 或它们的延长线相交于一点 A

$\Rightarrow \frac{DF}{EF}=\frac{BG}{CG}$.



(1)



(2)

图 1・28

图形的基本特征：出现了相比或相等两线段重叠在一组平行线段上，且过对应端点和内分点的直线是相交于一点的.

当几何问题中出现了：(1)相比或相等两线段重叠在一组平行线段上；(2)由一点发出的三直线和一组平行线相交这两种情况之一时，就可以应用或添加平行线型相似三角形的组合图形进行分析.

应用的方法是：(1)将过端点和内分点的共点三直线与一组平行线相交，若尚未相交的应延长到相交. (2)作同与过端点和内分点的共点三直线相交的一组平行线.

v)三角形的内外角平分线.

图形的基本性质：(如图 1・29)

$\triangle ABC$ 中，AD、AE 分别是$\angle A$ 和$\angle A$ 的外角的角平分线

$$\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC},\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{BE}{CE},$$

且 $AD\perp AE$.

图形的基本特征：出现了三角形的内、外角平分线，而且还出现了成比例的四条线段重叠在一直线上，且构成图形中一条线段的内分的比和外分的比相等.

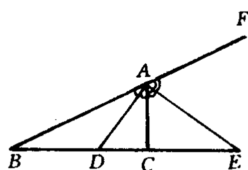


图 1・29

当几何问题中出现了：(1)三角形的内、外角平分线；(2)成比例的四条线段重叠在一直线上，且构成直线上一条线段的内分的比和外分的比相等这两种情况之一时，就可以应用三角形内外角平分线进行分析.

应用的方法是：(1)直接应用三角形的内外角平分线的性质.(2)过内、外分点的两条互相垂直的线段分别是三角形内、外角的平分线.

2. 逆平行线型相似三角形.

i)由三角形内的边的逆平行线段得到的相似三角形.

图形的基本性质：(如图 1・30)

$\angle AED=\angle ABC\Rightarrow\triangle AED\backsim\triangle ABC$

$\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{ED}{BC},AD\cdot AB=AE\cdot AC$,

D、B、C、E 四点共圆.

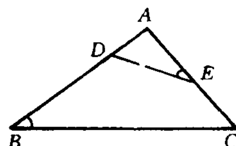


图 1・30

图形的基本特征：出现了三角形内一条边的逆平行线段，出现了两组相乘线段重叠在一直线上，且有一个公共的端点，同时还出现了一个圆内接四边形.

当几何问题中出现了：(1)三角形内一条边的逆平行线段；(2)相乘两线段重叠在一直线上；(3)由圆外一点作圆的两条割线这三种情况之一时，就可以应用由三角形内的边的逆平行线段得到的

相似三角形进行分析.

应用的方法是:(1)根据三角形内一条边的逆平行线段直接找出相似三角形,并应用相似三角形的性质来进行分析和证明.(2)若出现一组相乘线段重叠在一直线上,且有一个公共的端点,则过另一个端点和内分点作逆平行线,这时首先也是取图形中过端点或内分点的一条线段为逆平行方向线段,当逆平行方向线段取在过端点时,逆平行线过内分点作;当逆平行方向线段取在过内分点时,逆平行线段过端点作.(3)若出现两组相乘线段重叠,且有一个公共的端点,则应分别连结端点和端点,内分点和内分点,这两条连线就是逆平行线.(4)直接应用割线定理.

ii)由三角形的边的逆平行线与三角形的一边及另一边的延长线相交得到的相似三角形.

图形的基本性质:(如图1·31)

$\angle AED=\angle ABC \Rightarrow \triangle AED \backsim \triangle ABC$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{ED}{BC}, AD \cdot AB=AC \cdot AE,$

D、B、E、C 四点共圆.

图形的基本特征:三角形一边的逆平行线与三角形的第二条边,以及第三边的延长线相交,出现了两组相乘线段重叠在一直线上,且有一公共的端点,而逆平行线是将端点和内分点交叉连接后出现的,同时图形中还出现一个圆内接四边形.

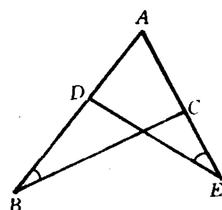


图1·31

当几何问题中出现了:(1)三角形内一条边的逆平行线段,且这条逆平行线与三角形一边的延长线相交;(2)相乘两线段重叠在一直线上;(3)由圆外一点作圆的两线割线这三种情况之一时,就可以应用由与三角形的边的延长线相交的逆平行线得到的相似三角形进行分析.

应用的方法是:(1)根据与三角形边的延长线相交的逆平行线直接找出相似三角形进行分析和证明.(2)若出现一组相乘线段重叠在一直线上,且有一公共的端点,则过端点和内分点作逆平行线;若出现两组相乘线段重叠在一直线上,且有一公共的端点,则应将两组重叠线段上的另一个端点和内分点交叉进行连接,这时这两条连线就是逆平行线.(3)直接应用割线定理.

iii)由三角形外的边的逆平行线段得到的相似三角形.

图形的基本性质:(如图1·32)

$\angle AED=\angle ABC\Rightarrow\triangle AED\backsim\triangle ABC\Rightarrow$ $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{ED}{BC}$,$AD\cdot AB=AE\cdot AC$,$D$、$E$、$B$、$C$四点共圆.

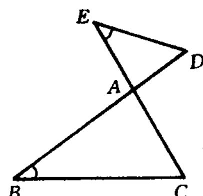


图1·32

图形的基本特征:三角形一边的逆平行线与三角形另两条边的延长线相交,出现了两组相乘线段重叠在一直线上,且这两条直线在内分点相交,同时图形中还可以出现一个圆内接四边形,这两条相交直线在这个圆内的部分是相交的两条弦.

当几何问题中出现了:(1)三角形外的一条边的逆平行线段;(2)相乘两线段重叠在一直线上,且这两直线在内分点相交;(3)圆内相交两弦这三种情况之一时,就可以应用或添加由三角形外的边的逆平行线得到的相似三角形进行分析.

应用的方法是:(1)根据三角形外的一条边的逆平行线与另两边的延长线相交得到的相似三角形直接进行分析和证明.(2)若出现一组相乘线段重叠在一直线上,且取过端点的线段为逆平行方向线段,那就应过另一个端点作逆平行线.若出现两组相乘线段重叠在一直线上,且这两直线在内分点相交时,则应将四个端点两两连接起来,而这两条连线就是逆平行线.(3)直接应用相交弦定理.

iv)由过三角形顶点的边的逆平行线得到的相似三角形.

图形的基本性质:(如图 1·33)

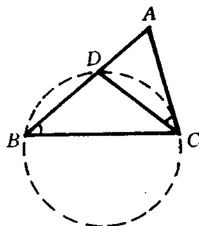


图 1·33

$\angle ACD=\angle ABC\Rightarrow\triangle ACD\backsim\triangle ABC\Rightarrow$
$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BC}$, $AC^2=AD\cdot AB$, AC 与 $\triangle BCD$ 的外接圆相切于 C.

图形的基本特征:出现了过三角形的顶点的一条边的逆平行线,还出现了两组相乘线段重叠在一条直线上,而其中的一组是一条线段的平方.同时图形中还可以出现一个圆的一条切线和一条割线.

当几何问题中出现了:(1)过三角形顶点的边的逆平行线;(2)两组相乘线段重叠在一条直线上,且其中的一组是线段的平方;(3)由一点发出的圆的一条割线和一条切线这三种情况之一时,就可以应用或添加过三角形顶点的边的逆平行线得到的相似三角形进行分析.

应用的方法是:(1)根据过三角形顶点的边的逆平行线,直接应用相似三角形的性质进行分析和证明.(2)将平方项线段的重合端点与另一组重叠线段的端点和内分点分别连结起来,这两条连线就是逆平行线.若仅出现相乘两线段重合,而没有平方项线段时,可先添出过重合端点的平方项线段,再进行连线.(3)直接应用切割线定理.

v)由直角三角形斜边上的高得到的逆平行线型相似三角形.

图形的基本性质:(如图 1·34)

$\angle ACB=\angle BDC=90°\Rightarrow\angle BCD=\angle A$, $\angle ACD=\angle B$

$\Rightarrow\triangle BCD\backsim\triangle BAC$, $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{CB}{AB}$, $BC^2=BD\cdot BA$

$\Rightarrow\triangle ACD\backsim\triangle ABC$, $\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{DA}{CA}=\dfrac{AC}{AB}$, $AC^2=AD\cdot AB$.

并且，BC 与$\triangle ACD$ 的外接圆相切于 C，AC 与$\triangle BCD$ 的外接圆相切于 C.

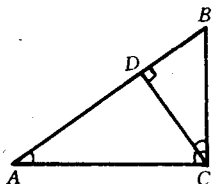


图 1・34

图形的基本特征：出现了直角三角形斜边上的高，还出现了两条相乘线段重叠在直角三角形的斜边上，且以三角形的一个顶点为公共端点和一条直角边的平方. 同时图形中还可以出现半圆上的圆周角和过半圆上的点向直径作垂线，或者出现半圆上的圆周角和过直径的端点所作圆的切线.

当几何问题中出现了：(1)直角三角形斜边上的高；(2)直角三角形一条直角边的平方，或相乘两线段重叠在直角三角形的斜边上，且以三角形的一个顶点为公共的端点这两种情况之一时，就可以应用或添加由直角三角形斜边上的高所得到的逆平行线型相似三角形进行分析.

应用的方法是：(1)直接应用直角三角形斜边上的高的性质进行证明. (2)将平方项线段的重合端点与另一组重叠线段的端点和内分点分别连接起来，这两条连线就是逆平行线.

3. 旋转型相似三角形.

i)旋转角为一般角的旋转型相似三角形.

图形的基本性质：(如图 1・35)

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAC=\angle DAE \\ \angle C=\angle E\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle ADE,$$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}, AB \cdot AE=AC \cdot AD$$

$\angle BAD=\angle CAE$(旋转角)

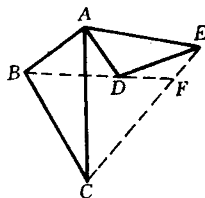


图 1・35

若 BD 的延长线交 CE 于 F，则$\triangle ABD \backsim \triangle ACE$. 且 A、B、C、F 四点共圆. A、D、F、E 四点共圆.

图形的基本特征：将$\triangle ABC$绕顶点A旋转一个角度后边长再放大或缩小一定的倍数后得到的相似三角形，图形中必定同时出现两对旋转型相似三角形和两个圆内接四边形．同时还出现了由一点发出的四条，且两两交成等角的成比例线段．

当几何问题中出现了：(1)绕三角形一个顶点旋转的相似三角形；(2)由一点发出的四条且两两夹成等角的成比例线段这两种情况之一时，就可以应用旋转型相似三角形进行分析．

应用的方法是：(1)直接应用旋转型相似三角形的性质进行分析和证明．(2)将由一点发出的四条成比例线段两两组成相似三角形，即将四个端点中对应的两点分别连接起来，这时可出现两对旋转型相似三角形，同时还可以应用两个圆内接四边形的性质来进行分析和证明．

ii)旋转角等于三角形的一个内角的旋转型相似三角形．

图形的基本性质：(如图1·36)

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAC=\angle DAE\\ \angle C=\angle E\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle ABC\backsim\triangle ADE,$$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE},AB\cdot AE=AC\cdot AD$$

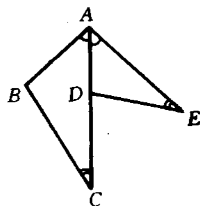


图1·36

图形的基本特征：图形具有旋转角为一般角的旋转型相似三角形的性质．将一个三角形绕一个顶点旋转，并使旋转角就等于这个内角，然后边长再放大或缩小一个倍数后得到的相似三角形，这时还出现由一点发出的四条成比例线段中，有一组相乘线段重叠在角平分线上．

当几何问题中出现了：(1)绕三角形一个顶点旋转且旋转角等于这个内角的相似三角形；(2)由一点发出的四条成比例线段，且其中一组相乘线段重叠在一条角平分线上这两种情况之一时，就可以应用或添加旋转角等于三角形一个内角的旋转型相似三角形

进行分析.

应用的方法是:(1)直接应用旋转型相似三角形的性质进行分析和证明.(2)将由一点发出的四条成比例线段两两组成相似三角形.

iii)由直角三角形斜边上的高得到的旋转型相似三角形.

图形的基本性质:(如图 1·37)

$$\angle ADC=\angle ACB=90°\Rightarrow\triangle ADC\backsim\triangle CDB$$
$$\Rightarrow\frac{CD}{BD}=\frac{AD}{CD}=\frac{AC}{CB}$$
$$\Rightarrow CD^2=AD\cdot BD$$

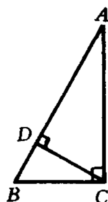


图 1·37

图形的基本特征:将 $Rt\triangle ADC$ 绕直角顶点 D 旋转 90°,并把边长放大或缩小一个适当的倍数成为 $Rt\triangle CDB$ 得到的相似三角形,旋转角等于 90°,且等于三角形的一个内角.这时还出现由一点发出的四条成比例线段,其中的一组相乘线段重叠在直角三角形的斜边上,另一组是直角三角形斜边上的高的平方.

当几何问题中出现了:(1)直角三角形斜边上的高;(2)一组相乘线段重叠在直角三角形的斜边上,或直角三角形斜边上的高的平方这两种情况之一时,就可以应用或添加由直角三角形斜边上的高得到的旋转型相似三角形进行分析.

应用的方法是:(1)直接应用直角三角形斜边上的高的性质进行分析和证明.(2)将由一点发出的四条成比例线段两两组成相似三角形,这时图形就成为直角三角形斜边上的高的基本图形.

4. 位似型相似三角形.

i)外位似型相似三角形.

图形的基本性质:(如图 1·38)

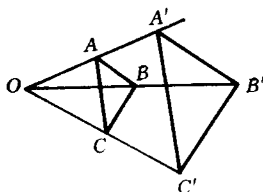


图 1·38

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}\Rightarrow\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{OA}{OA'}$$

图形的基本特征:相比两线段分别在平行线段上,三组对应顶点连线的延长线相交于一点,图形中还同时出现三对平行线型相似三角形.

当几何问题中出现了:(1)相比两线段平行,且对应顶点的连线的延长线相交于一点;(2)两组具有公共顶点的平行线型相似三角形的组合关系这两种情况之一时,就可以应用和添加外位似型相似三角形进行分析.

应用的方法是:(1)将对应顶点分别连接,则三条连线的延长线必定相交于一点.(2)直接应用平行线型相似三角形和位似型相似三角形的性质进行分析和证明.

ii)内位似型相似三角形.

图形的基本性质:(如图 1・39)

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}\Rightarrow\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=\frac{OA}{OA'}$$

图形的基本特征:相比两线段分别在平行线段上,三组对应顶点的连线相交于一点,图形中还同时出现三对平行线型相似三角形.

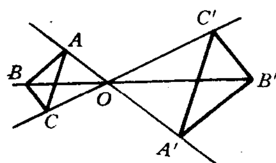


图 1・39

当几何问题中出现了:(1)相比两线段平行,且对应顶点的连线相交于一点;(2)两组具有公共顶点的平行线型相似三角形的组合关系这两种情况之一时,就可以应用或添加内位似型相似三角形进行分析和证明.

应用的方法是：(1)将对应顶点分别连接，则三条连线必定交于一点.(2)直接应用平行线型相似三角形和位似型相似三角形的性质进行分析和证明.

六、特殊角三角形.

1. 30°角的直角三角形.

图形的基本性质：(如图 1·40)

$$\begin{cases}\angle ACB=90^\circ \\ \angle A=30^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} AB=2BC \\ AC=\sqrt{3}\,BC \\ \angle B=60^\circ\end{matrix} \quad \begin{cases}BC=\frac{1}{2}AB \\ BC=\frac{\sqrt{3}}{3}AC\end{cases}$$

图形的基本特征：

图形中出现了 30°、60°的特殊角以及线段之间的 2 倍、$\sqrt{3}$ 倍这样的特殊关系.

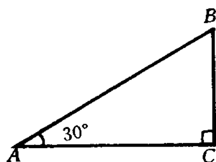


图 1·40

当几何问题中出现了：(1) 30°, 60°, 120°, 150°这些特殊角；(2)线段之间的倍半关系，且这种倍半关系是和上述特殊角发生联系；(3)线段之间的 $\sqrt{3}$ 倍关系这些情况之一时，就可以应用或添加 30°角的直角三角形进行分析.

应用的方法是：(1)过特殊角一边上的点向另一边作垂线.(2)直接应用 30°角直角三角形的性质进行分析和证明.

2. 45°角的直角三角形.(等腰直角三角形).

图形的基本性质：(如图 1·41)

$$\begin{cases}\angle ACB=90^\circ \\ \angle A=45^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}AB=\sqrt{2}\,AC \\ AC=BC \\ \angle B=45^\circ\end{cases}$$

$$AC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$$

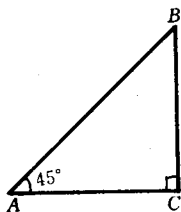


图 1·41

图形的基本特征：图形中出现了 45°的特殊角以及线段之间的 $\sqrt{2}$ 倍这样的数量关系.

当几何问题中出现了:(1)45°,135°这些特殊角;(2)45°角和30°角的组合关系(如15°,75°等);(3)线段之间的$\sqrt{2}$倍关系这些情况之一时,就可以应用或添加45°角的直角三角形进行分析.

应用的方法是:(1)过45°角一边上的点向另一边作垂线.(2)直接应用45°角的直角三角形的性质进行分析和证明.

七、与面积方法有关的三角形.

1. 同底等高的三角形.

图形的基本性质:(如图1·42)

直线$MN\parallel BC$,

A、A'是直线MN上的点$\Rightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'BC}$

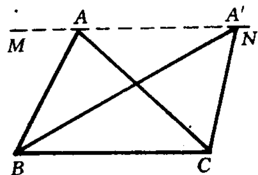


图1·42

图形的基本特征:出现了两个具有公共底边的等积三角形.

当几何问题中出现了具有公共底边的三角形的等积变形问题时,就可以应用或添加同底等高的三角形进行分析.

应用的方法是:过公共底边所对的顶点作这条公共底边的平行线.

2. 等底同高三角形.

图形的基本性质:(如图1·43)

$BD=DE\Rightarrow S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABE}$.

$BD=DE=CE\Rightarrow S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADE}=S_{\triangle AEC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$

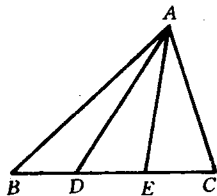


图1·43

图形的基本特征:出现了三角形一边上的n等分点,以及它们和这一边所对顶点的连线所构成的面积等分线.

当几何问题中出现了三角形一边上的n等分点且是与三角形的面积性质发生联系时,就可以应用或添加等底同高的三角形进

行分析.

应用的方法是将一边上的 n 等分点与这边所对的顶点连接起来,再应用面积方法进行分析和证明.

3. 同底三角形.

如图 1·44,△ABC 中,D 是 BC 上任一点,P 是 AD 上任一点(P 可取在 D 点)$\Rightarrow\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{BD}{CD}$.

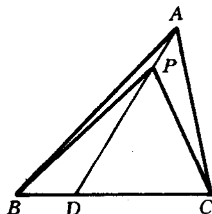


图 1·44

图形的基本特征:△ABP 和△ACP 是两个具有公共底边 AP 的三角形,且相比两线段 BD 和 CD 在同一直线上且有公共点在一直线上.

当几何问题中出现了相比两线段重叠时,就可以应用或添加同底三角形,并应用三角形面积的性质和方法来进行分析和证明.

应用的方法是将过线段内分点的线段上的两点分别和线段的两个端点相连接,构成同底三角形.

第二节　怎样应用基本图形分析法添辅助线

添辅助线是教好、学好平面几何的关键问题,然而,长期以来,它又是平面几何教学的难题.

由于添辅助线这个难题多年来得不到很好的解决,平面几何的教育质量长期以来在大范围内都是居低不上,学生又产生了很强的畏难以至放弃学习的心态,造成了数学教育界出现了一种企求通过降低要求、删减内容以摆脱这种困境的倾向,尽管有时这种举措会冠以"冠冕堂皇"的理由.这种现象不仅在我国存在,在国外

也同样是非常普遍地存在.其实,这种回避问题的实质和要害的做法并不是解决问题的有效的办法,也不是摆脱平面几何教学的这种困境的正确的出路.

从教好、学好平面几何,大面积提高平面几何教学质量的目标出发,添辅助线是一个不能回避而必须解决的问题,因此,任何一种行之有效的几何分析方法也都必须正面、直接地解决添辅助线的问题.

应用基本图形分析法,怎样解决添辅助线的问题呢?由于应用基本图形分析法的本质,首先是分析并找到基本图形,然后是应用基本图形的性质解决问题,这样就会出现两种情况:一是所有分析、找到的基本图形都是完整的,这样应用这些基本图形的性质就不会有什么困难,问题自然也就得到了解决,显然这时也就不存在添辅助线的问题.二是在分析和找到的基本图形中,有一个、两个或者若干个基本图形是不完整的,这样在应用基本图形性质的时候显然就会发生困难,从而就使我们在应用这些基本图形的性质以前,必须要先将不完整的基本图形补完整,这就出现了添辅助线的需要,而添辅助线的实质也就成为将不完整的基本图形补完整的问题.由此,我们就可以得到应用基本图形分析法添辅助线的基本方法:

在平面几何问题的分析过程中,根据问题的条件和结论,分析和找到的基本图形如果不完整,就可以通过添加辅助线将不完整的基本图形补完整,这就是添辅助线的基本方法.至于对每一个基本图形补完整的具体方法,在上一节内容中已作了详尽的论述,在这里就不再重复讨论了.

根据以上对添辅助线的基本方法的讨论,我们可以发现,应用基本图形分析法来讨论添辅助线的问题时,我们的着眼点已经不再聚焦在作为图形的局部的线上,而是在一个完整的图形上,因此,我们就认为添辅助线已经不再仅仅是一个添线的问题,其实质

应是一个补图的问题，是一个基本图形完整化的问题. 也就是说添辅助线实质上是基本图形完整化的必然结果. 在教学过程中，我们也就能够发现，只要找到基本图形，就不怕添不出辅助线. 而且也必然会出现辅助线的正确添加超前于正确的推理、证明的获得的现象.

在讨论了应用基本图形分析法添辅助线的基本方法以后，当然还要研究和讨论这样一个问题，就是这种基本方法是否解决了几何问题添辅助线的所有问题，对此我们的回答是还没有. 这是因为几何问题的分析过程中，还会出现或遇到一些并不是与具体的、特定的基本图形直接相联系的性质，由此也就需要应用一些具体的，作为基本方法的补充的并且是具有辅助性的添线方法. 这些添线方法主要有以下三种：

一、应用几何概念的定义添辅助线的方法.

在几何问题中，经常会出现一些与某一个或某几个具体的几何概念有直接联系的性质，或者是直接给出了这些几何概念，而这些几何概念又常常被用来作为我们的分析或证明的出发点，而在已知条件所给出的图形中，又缺乏构成这些几何概念所必需的某些线，这时就可以直接根据几何概念的定义将这些必需的线添上，其目的就是要使有关的几何概念及其性质能得到应用. 这种添线的方法就是应用几何概念的定义添辅助线的方法.

例如，在几何问题中出现了要证明一条线段等于两条线段的和的问题，那就可以根据两条线段的和的定义，将这两条线段接起来，然后证明所得的线段与和线段相等，也可以根据两条线段的差的定义，在和线段上截取两条线段中的一条，然后证明剩下来的线段与另一条线段相等；要证明一个角等于另一个角的两倍，就可以根据两个角的倍半关系的定义，将这个倍角两等分，也就是作它的角平分线，然后证明它的一半和另一个角相等；要证明两条线段垂直，就可以根据线段垂直的定义，将它们延长到相交，然后证明它

们的交角是直角；如果出现了三角形的内心，就可以根据三角形内心的定义，将这个点与三角形的两个顶点连接起来，这两条连线必定是三角形的两条内角平分线等.

二、将多边形问题转化为三角形问题的添线方法.

在几何问题中，三角形是边数最少，最简单也是最基本的多边形. 几何问题所讨论和研究的对象，所研究的许多性质也都是围绕着三角形来讨论和展开的，也是以三角形的性质为基础的. 因此，对于几何问题中的许多有关多边形的问题，在分析时的基本思路就是将多边形问题转化成三角形的问题来研究和讨论. 将多边形问题转化为三角形问题讨论的方法主要是：

1. 添对角线.

将多边形问题转化为三角形问题的最常用、最基本的方法是添对角线. 四边形(包括特殊的四边形，如梯形、平行四边形等)的一条对角线可以将这个四边形分成两个三角形，从而可在两个三角形中分别应用三角形的有关性质来进行分析和讨论(如图 1・45). 对于边数更多的多边形，则可以有类似的性质和方法.

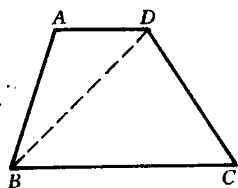


图 1・45

2. 将梯形问题转化成三角形问题的方法.

在几何问题中，梯形是一种特殊的四边形，因此，在几何问题中出现梯形问题时，除了可以用一般四边形问题的添对角线的方法来将问题转化成三角形问题讨论以外，还可以应用其它一些特殊的方法来进行转化. 这些方法分别是：

i)平移对角线.(过顶点作对角线的平行线)

当几何问题中出现有关梯形的两对角线的长或梯形上、下底的和的性质时，就可以平移对角线(如图 1・46).

ii)平移腰.(过顶点作腰的平行线)

当几何问题中出现有关梯形的两腰长或梯形上、下底的差的

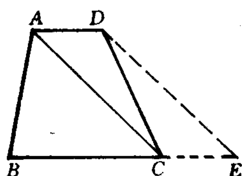


图 1・46

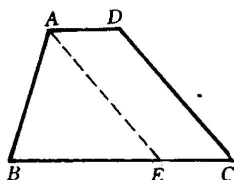


图 1・47

性质时，就可以平移腰(如图 1・47).

iii)添高.

当几何问题中出现了有关梯形的高(上、下底之间的距离)或面积的性质，或者需要将问题转化成为直角三角形问题来进行分析、证明或计算时，就可以添加梯形的一条或两条高(如图 1・48).

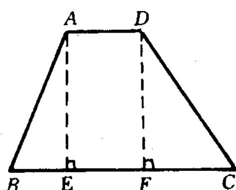


图 1・48

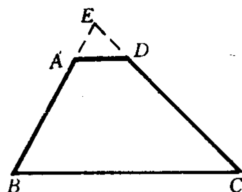


图 1・49

iv)延长两腰到相交.

当几何问题中需要将梯形的上、下底转化成为三角形内一条边的平行线段时，就可以将梯形的两腰延长到相交(如图 1・49).

三、将线段或角进行平移和旋转的方法.

当几何问题中出现了具有某种数量关系(包括相等关系，和差关系，倍半关系，大小关系，成比例关系等)的线段或角位于不容易建立这种数量关系的位置上时，就可以将线段或角改变位置. 在几

何问题中，改变线段或角的位置的基本方法是：平移和旋转（除这两种方法外，还有轴对称、中心对称等，由于这些方法已在基本图形分析法中进行了讨论和阐述，所以这里就不再讨论）. 在具体应用时，当需要改变位置的线段或角是与圆或等腰三角形有联系时，首先考虑旋转. 当需要改变位置的线段或角与圆、等腰三角形没有直接联系时，首先考虑平移.

以上所介绍的三类添辅助线的方法，我们都看作是辅助性的添线方法，这主要是由于以下的原因：(1)这些添辅助线的方法都不是普遍适用的方法，它们都只适用于某一类特定的问题，应用的面比较小，而前面所介绍的基本方法则是基本上属于普遍适用的方法. (2)对一个具体问题来说，应用这些方法中的任何一种方法添出辅助线以后，常常还仅仅是完成了整个问题分析中的某一个特定的步骤，以后（在有些问题中也可以包含以前）的分析，直至整个问题的解决和分析的完成，还是要应用基本方法来完成的.

在完成了以上的讨论以后，我们就可以提出以下几个关于几何问题中添加辅助线的基本观点：

一、几何问题中的添辅助线是有规律性的，是有规律可循的.

对添辅助线的规律性的揭示和认识，是应用基本图形分析法的几何教学与传统的几何教学的根本的分水岭. 在几何教学中，学生常常会向教师提出这样的问题："添辅助线有规律吗？""添辅助线的规律是什么？""老师，这条辅助线你是怎么样想出来的？""老师，为什么你会想到这样添辅助线，而我就想不到？"等等. 要对这些问题作出正确的回答，其前提就是要能揭示添辅助线的规律性.

由于应用基本图形分析法来添辅助线，可以从根本上解决添辅助线的规律性问题，所以在这样一个前提下，我们就可以明确地阐明这一基本观点：平面几何中的添辅助线问题是有规律性的，是有规律可循的.

二、几何问题中的每一条辅助线都是分析的结果，因此，对每一条辅助线都能够讲清楚它是怎样想出来的.

几何问题中的所有的辅助线是从哪里来的？它们都应该是由人的大脑想出来的，应该是人们经过分析和思维得到的，而绝不是从天上掉下来的或者是突然从地上冒出来的.因此，几何问题中的每一条辅助线都应该是分析的结果，从而对每一条辅助线，我们也就能够明白它是怎样想出来的.在教学中，教师应将每一条辅助线想出来的过程，剖析出来并展示在学生们的面前.在一个几何问题的分析过程中，在任何一个步骤中，教师都能接受学生的提问："老师，你这条辅助线是怎样想出来的？"并能给予正面、直接和正确的回答.

三、几何问题中的每一条辅助线都是分析的结果，因此，它们应该随着分析过程的进行，逐步添加出来.

几何问题中出现的辅助线是从哪里来的？尤其是当一个问题中出现了多条辅助线时，这些辅助线是一下子、一起添出来的吗？结论应该是否定的，几条辅助线在几乎所有的问题中都是不可能同时一起添出来的，这里有一个先后的过程，故只能是一条一条、有先有后地想出来或添出来，从而也就只能随着分析过程的进行和发展，逐步添加逐步完成.也就是分析到什么地方就添加到什么地方，这样就能够完整地向学生显示出每一条辅助线是怎样想出来的，整个问题的解决又是怎样一步一步想出来的.在这样一个前提下，我们还可以进一步发现：几何问题中的辅助线是既不能少添，这样问题就会解决不了；也不能多添，因为这时多添加出来的部分就会是说不清楚道理的.

四、几何问题添辅助线的规律性，只要经过认真的学习，是可以学会、可以掌握，从而也就是可以学好的.

由于平面几何中的添辅助线问题是有规律性的，而且这种规律性已经可以用明确的语言来向学生进行介绍和教学，所以学生

就会感到能够学，学得会，这就从根本上消除了学生长期以来存在着的对平面几何学习，实质上就是对添辅助线问题学习的畏惧心理，学生能够学好平面几何，能够掌握学好平面几何的方法当然也就是必然的结果.

在进行了上述讨论以后，教师在学生问有关辅助线的问题时，再作如下的回答就是不可取的：

几何问题的辅助线无规律可言，主要靠多做题目，积累经验，到时候自然会添.

几何问题中的辅助线有常法而无定法.

拿到一个几何问题要添辅助线时，可以先添一条试一试，不行就再添一条试试，多试几次总会成功的.

在教学中，教师使用还是不使用上述教学内容和教学语言，实际上也就构成了基本图形分析法和传统的几何思考方法的分水岭.

平面几何的学习问题，包括几何中的添辅助线问题，如同世界上的任何一门科学一样，都是有规律的，而且这种规律性也一定是可以认识，可以掌握的. 当我们的教师和学生都能掌握这些规律，学会和掌握正确的分析方法，从而具备和形成一定的分析能力，那么我们所遇到的许多新的几何问题都是可以迎刃而解的，平面几何教学质量大面积提高的目标也是一定可以实现的.

第二章　平行线

【分析方法导引】

当几何问题中出现了两直线平行的条件或者要证明两直线平行时，就意味着启动思维的源或出发点已经出现，这时就可以想到要应用平行线的基本图形的性质进行证明. 接下来就可以找出两条平行线被第三条直线所截的基本图形，而在基本图形确定以后，如果没有第三条直线，就将第三条直线添上；如果平行线尚不完整，则可将与第三条直线相交的一组平行线添完整. 在基本图形添完整后，分析也就完成.

例 1　(如图 2·1)，已知：四边形 $ABCD$ 中，$AB // DC$，$BC // AD$，

求证：$\angle B=\angle D$.

分析：本题条件中出现的是两组平行线，所以就是平行线性质的应用问题，也就是要应用平行线的基本图形进行分析. 那么进一步就是要解决两条平行线被第三条直线所截，若我们首先讨论 AB 和 DC 这一组平行线，那么从图形中就可以发现或看出 BC(或 AD)就可取作是与 AB 和 DC 都相交的第三条直线，那就可得 $\angle B+\angle C=180°$，根据同样的道理，根据 BC、AD 这一组平行线又被第三条直线 CD 所截，又可得 $\angle C+\angle D=180°$，所以 $\angle B=\angle D$ 就可以证明(如图 2·2).

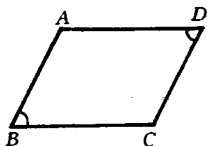


图 2·1

在上述分析过程中，我们可以发现这里的两条平行线被第三条直线所截的基本图形是一个不完整的局部图形，所以当我们应用平行线的其它性质时，就需要将这个局部图形补完整，或者是根据分析的需要，在局部上加以补充. 若我们现在考虑应用“两直线平行，同位角相等”的性质，那末由于图形中$\angle B$的同位角尚未出现，因此，首先要将$\angle B$的同位角添加出来，于是就想到要延长BC（或BA），若我们延长BC到E，则可得$\angle B=\angle DCE$（如图2·3）. 再由BC、AD这一组平行线被DC所截，可得$\angle D$和$\angle DCE$是一组内错角，当然也相等，所以$\angle B=\angle D$得证.

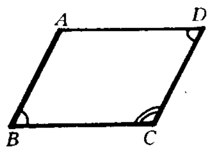


图2·2

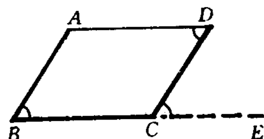


图2·3

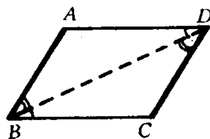


图2·4

由于AB和DC这两条平行线段现在是四边形$ABCD$的一组对边，而四边形的对边也可看作是被对角线所截，所以我们也可以将对角线取作同和这两条平行线相交的第三条直线，由于图形中的第三条直线尚未出现，所以应先将第三条直线添上，于是连结BD，可得$\angle ABD=\angle CDB$，根据同样的道理还可得$\angle CBD=\angle ADB$，再应用“等量加等量和相等”的性质也就可以证明结论（如图2·4）.

若我们将另一条对角线AC取作同与平行线AB、DC相交的第三条直线，则连结AC后也可得$\angle BAC=\angle DCA$，根据同样的道理还可得$\angle BCA=\angle DAC$，而这四个角和结论里出现的两个角构成的是两个三角形（即$\triangle ABC$和$\triangle CDA$）的六个内角，所以想到

可应用三角形内角和定理来完成分析，即两个三角形的两个角对应相等则第三个角必等，所以结论也可以证明(如图 2·5).

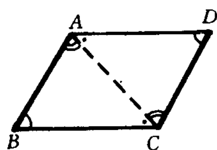


图 2·5

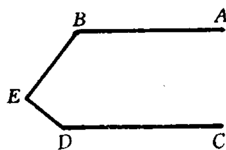


图 2·6

例 2 已知：图 2·6 中，$AB // CD$.

求证：$\angle B + \angle E + \angle D = 360°$.

分析：本题条件中出现了一组平行线($AB // CD$)，所以就可以应用平行线的基本图形进行证明. 但在已知图形中，直接与平行线 AB、CD 相交的第三条直线是没有的，所以要将第三条直线添上. 添加第三条直线的方法是在这两条平行线上各取一点作为交点，那么只要将这两个点连接起来，就可以成为第三条直线.

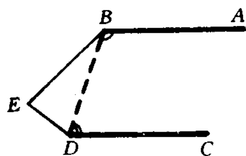


图 2·7

若我们在 AB 上取点 B，在 CD 上取点 D，那么 BD 就是截平行线 AB、CD 的第三条直线，于是连接 BD(如图 2·7)，根据平行线的性质可得：$\angle ABD + \angle CDB = 180°$，而在 $\triangle EBD$ 中又可以应用三角形内角和定理得 $\angle DBE + \angle E + \angle BDE = 180°$，然后将这五个角相加就可以证明结论.

若我们仍在 AB 上取点 B，而在 CD 上取交点时不取在 D 点，而是另外取一点，那么我们所要添加的第三条直线就出现了多种可能情况：

如将交点取在 CD 上，也就是在 CD 上任取一点 F，那么 BF 就是截 AB、CD 的第三条直线，于是连结 BF，可得 $\angle ABF =$

$\angle DFB$，而 $\angle FBE + \angle E + \angle D + \angle DFB = 360°$. 所以结论也就可以证明（如图 2·8）.

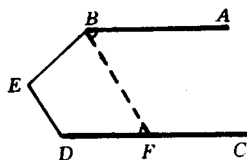


图 2·8

如果在上述分析中我们仅将 BF 截 AB、CD 看作是平行线这个基本图形的局部，那么也可以将这个局部图形逐步完整化. 于是延长 BF，且设与 ED 的延长线相交于 G（如图 2·9），那么 $\angle ABF + \angle CFB = \angle ABF + \angle DFG = 180°$，而在 $\triangle BEG$ 中，三个内角和为 $180°$，在 D 点处有 $\angle EDF + \angle GDF = 180°$，将这三组 $180°$ 加起来，然后再减去 $\triangle GDF$ 的内角和，显然也可以证明结论.

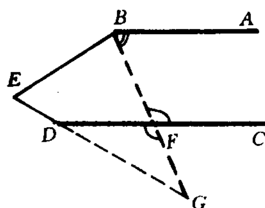


图 2·9

假如我们作出的 BF 延长后与 ED 的延长线不相交，那也就是过 B 作 $BF \parallel ED$ 交 CD 于 F. 从而就可得 $\angle ABF + \angle BFC = 180°$. 而 BF 和 ED 这一组平行线又可以看作分别是被 CD 和 BE 所截，那么 $\angle BFC = \angle D$、$\angle EBF + \angle E = 180°$，从而也就可以证明结论（如图 2·10）.

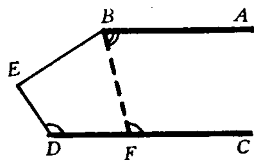


图 2·10

如将交点取在 CD 的延长线上，这时从图形上分析可以发现又会出现三种情况：

在 CD 的延长线上取点 F 后，BF 这条连线与 ED 相交于 G，则由 $\angle ABF + \angle F = 180°$，$\triangle BEG$ 的三个内角的和等于 $180°$ 和 $\angle EDC = \angle F + \angle DGF = \angle F + \angle BGE$ 就可以证明结论（如图 2·11）.

在 CD 的延长线上取点 F 后，BF 这条连线与 BE 重合，或者也就是延长 BE 交 CD 的延长线于 F（如图 2·12），那么 $\angle B+\angle F=180°$，而 $\angle CDE=\angle F+\angle DEF$，$\angle DEF+\angle DEB=180°$，从而也可以证明结论.

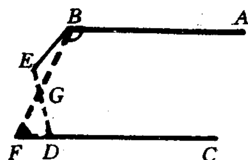


图 2·11

在 CD 的延长线上取点 F 后，BF 这条连线与 DE 的延长线相交于 G（如图 2·13），那么由平行线的性质可得：$\angle ABE+\angle EBF+\angle F=180°$，又因为 $\angle BED=\angle EBF$

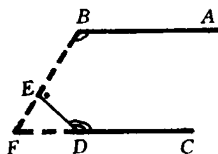


图 2·12

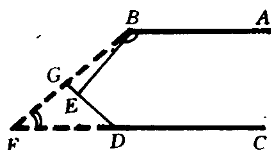


图 2·13

$+\angle F+\angle EDF$. 所以 $\angle ABE+\angle BED-\angle EDF=180°$，而 $\angle CDE=180°-\angle EDF$ 代入上式后也就可以证明结论.

若我们将第三条直线与 AB 的交点也不取在 B 点，而是取在 AB 或 AB 的延长线上，那么将这两种可能性与上述已经讨论过的各种情况组合起来，就又会出现好多种可能性，对此我们就不一一讨论，而是留给读者自行分析.

在上述讨论中，对于 BF 和 BE 重合的情况，实质上就是将 BE 取作第三条直线，这时的图形也可以看作是出现了第三条直线而尚未出现同与它相交的一组平行线，于是将与 BE 相交的 AB 的平行线添上，也就是过 E 作 BA 的平行线 EF（如图 2·14），从而由 $\angle B+\angle BEF=180°$ 和 $AB/\!/CD$ 推得

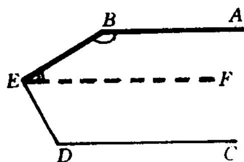


图 2·14

$FE /\!/ CD$、$\angle D+\angle DEF=180°$，也可以完成证明.

例 3 已知：图 2·15 中，直线 MN 与⊙O 相切于 A，BC 是弦，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$.

求证：$MN /\!/ BC$.

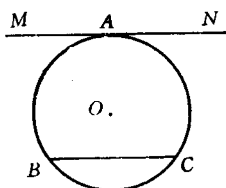


图 2·15

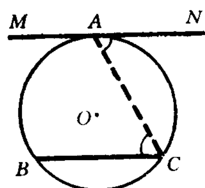


图 2·16

分析：本题要证明的结论是 $MN /\!/ BC$，这是两条平行线的判定问题，从而就可应用平行线的基本图形进行证明. 也就是需要这两条平行线被第三条直线所截，由于图形中这第三条直线尚未出现，所以应将第三条直线添上，于是在 MN 上取一点 A(即切点 A)，在 BC 上取一点 C(或 B)，那么将 AC 连起来就是同与 MN、BC 相交的第三条直线(如图 2·16)，从而只要证明 $\angle NAC=\angle C$. 由于条件中给出 MN 与⊙O 相切于 A，AC 是过切点 A 的弦，所以$\angle NAC$ 是一个弦切角，应用弦切角的性质可得$\angle NAC$ 的度数 $=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ 的度数. 又因为在⊙O 中，$\angle C$ 是一个圆周角，从而又可得$\angle C$ 的度数 $=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ 的度数，而已知 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，所以这两个角相等就可以证明，分析就可以完成.

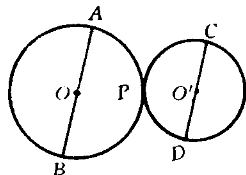


图 2·17

例 4 已知：图 2·17 中，⊙O、⊙O' 外切于 P，AB、CD 分别是⊙O、⊙O' 的

直径，且 $AB /\!/ CD$. 求证：A、P、D 和 B、P、C 共线.

分析：本题的条件中出现 $AB /\!/ CD$，是一个平行线性质的应用问题，从而就可应用平行线的基本图形进行证明. 由于图形中仅出现了两条平行线，所以应将同与这两条平行线相交的第三条直线添上. 由于在 AB 和 CD 上现在各出现了三个点，因此在 AB、CD 上各选取一点，再将它们连接起来就可以作为第三条直线. 但是 A、D 或 B、C 这两组连线涉及过两圆的切点 P 这一在结论中出现的又是尚未证明的性质，不能用，所以就考虑连结 OO' 作为第三条直线这种可能. 于是首先连结 OO'，由于⊙O、⊙O' 外切于 P，所以 OO' 必定过点 P（如图 2・18），再由 $AB /\!/ CD$，即可得 $\angle AOO' = \angle DO'O$.

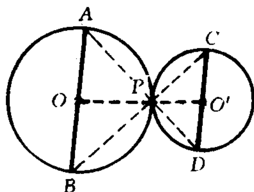


图 2・18

又因为要证明的结论是 A、P、D 共线，所以根据三点共线的定义，将这三个点分两次连结，也就是连结 AP、DP（如图 2・18）后，应证明 $\angle APO = \angle DPO'$. 但这两个角分别是等腰 $\triangle OPA$ 和等腰 $\triangle O'PD$ 的底角，而它们的顶角已经证明是相等的，所以 $\angle APO$ 和 $\angle DPO'$ 当然相等，结论就可以证明. 根据同样的道理就可以证明 B、P、C 共线.

例 5 已知：图 2・19 中，$AB /\!/ CD$，EF 分别交 AB、CD 于 G、H，GM、HN 分别是 $\angle EGB$ 和 $\angle EHD$ 的角平分线.

求证：$GM /\!/ HN$.

分析：本题要证的结论 $GM /\!/ HN$ 是两条平行线的判定问题，从而就可应用平行线的基本图形进行证明. 由于图形中出现了要证明的两条平行线是 GM 和 HN，所以就应取同与这两条直线相

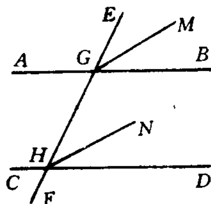


图 2・19

交的直线为第三条直线，从图形中我们可以发现直接符合这样的要求的第三条直线只有直线 EF. 当我们取了 EF 作为同与 GM、HN 相交的第三条直线(如图 2·20)以后，问题就转化为要证 $\angle EGM=\angle EHN$. 由条件已知 GM、HN 分别是 $\angle EGB$、$\angle EHD$ 的角平分线，所以 $\angle EGM=\frac{1}{2}\angle EGB$，$\angle EHN=\frac{1}{2}\angle EHD$. 从而问题又进一步转化为要证 $\angle EGB=\angle EHD$，而这两个角是 AB、CD 被 EF 所截后得到的一组同位角，由条件 $AB\parallel CD$，所以这两个角相等就可以证明(如图 2·21).

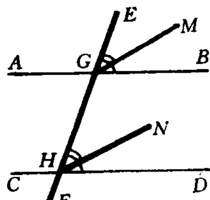


图 2·20

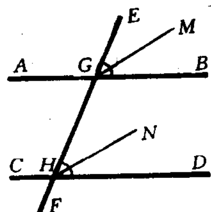


图 2·21

由于图形中同与 GM、HN 相交的第三条直线并非仅有 EF，因此也可以考虑选取其它的直线为第三条直线.

若取 CD 为第三条直线，则因为 CD 目前还仅与 HN 相交而与 GM 尚未相交，所以应将它们先延长到相交，于是延长 MG 交 CD 于 K(如图 2·22)，问题就成为应证 $\angle DHN=\angle DKM$. 又因为已知的 AB、CD 这一组平行线也可以看作是被 KM 所截，应用平行线的性质又可得 $\angle DKM=\angle BGM$，这样问题就转化成为应证 $\angle DHN=\angle BGM$，由于这两个角分别是 $\angle EHD$ 和 $\angle EGB$ 的一半，而 $\angle EHD$ 和 $\angle EGB$ 是平行线 AB、CD 被 EF 所截得到的一组同位角，当然相等，所以结论就可以证明.

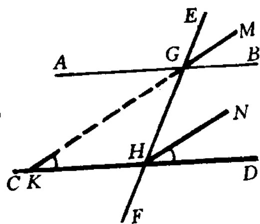


图 2·22

若取 AB 为第三条直线，则因为 AB 仅与 GM 相交，而与 HN

尚未相交，所以应将它们先延长到相交，也就是延长 HN 交 AB 于 K（如图 2・23），以下的分析请读者自行完成.

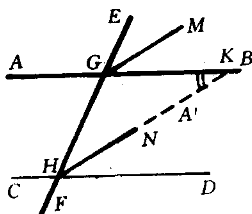


图 2・23

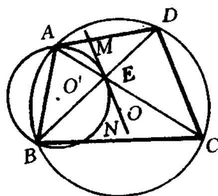


图 2・24

例 6 如图 1・24，已知：四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，AC、BD 相交于 E，过 E 作$\triangle ABE$ 的外接圆$\odot O'$ 的切线 MN. 求证：$MN \parallel DC$.

分析：本题要证明的结论是 $MN \parallel DC$，是两条平行线的判定问题，从而就可以应用平行线的基本图形进行证明，于是就应选取同与 MN、DC 相交的第三条直线. 从图形中，我们可以发现第三条直线可以取 AC，也可以取 BD.

若取 AC 为截 MN、DC 的第三条直线，则$\angle MEA$ 和$\angle DCA$ 就可以是一组同位角，这样，要证明 $MN \parallel DC$，就可以转化为要证明$\angle MEA = \angle DCA$（如图 2・25）.

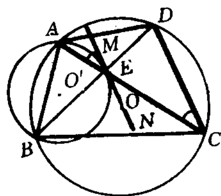


图 2・25

由条件 MN 与$\odot O'$ 相切于 E，而 EA 是过切点 E 的弦，所以可应用弦切角的基本图形的性质进行证明，于是可得$\angle MEA$ 是$\odot O'$ 的一个弦切角，$\angle MEA = \angle ABE$，那么问题就转化为要证$\angle ABE = \angle DCA$. 从图形中我们可以进一步发现这两个角都是$\odot O$ 的圆周角，它们所对的都是同一条$\overset{\frown}{AD}$，所以由 A、B、C、D 四点共圆和圆周角的基本图形的性质就可以完

成证明(如图 2・26).

若取 BD 为截 MN、DC 的第三条直线,读者可自已讨论.

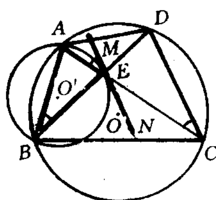


图 2・26

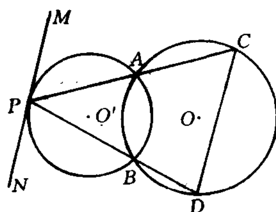


图 2・27

例 7 如图 2・27,已知:⊙O、⊙O' 相交于 A、B,P 是⊙O' 上的一点,PA、PB 的延长线分别交⊙O 于 C、D. 过 P 作⊙O' 的切线 MN. 求证:$MN /\!/ CD$.

分析:本题要证明 $MN /\!/ CD$,是两条平行线的判定问题,所以可应用平行线的基本图形进行证明,于是就应选取同和 MN、CD 相交的第三条直线. 从图形中我们可以看出第三条直线可以取 PD,也可以取 PC(分析略).

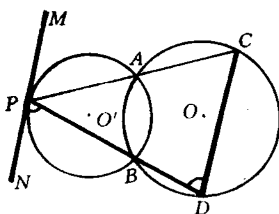


图 2・28

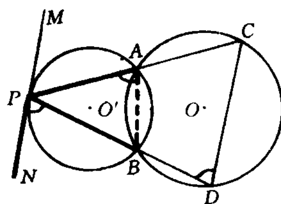


图 2・29

若取 PD 为第三条直线(如图 2・28),则问题就可以转化为要证 $\angle NPD=\angle D$. 又因为条件中出现了 MN 是⊙O' 的切线,而 PB 是过切点 P 的弦,所以可应用弦切角这个基本图形的性质进

行证明. 由于图形中已出现切线和过切点的弦，尚未出现这个弦切角所夹的弧所对的圆周角，所以应将这个圆周角添上，于是连结 AB，就可得$\angle NPB=\angle PAB$，问题就转化成要证明$\angle PAB=\angle D$（如图 2・29）. 而在$\odot O$中已经出现了 A、B、D、C 四点共圆，且 P、A、C 成一直线，所以应用圆周角的基本图形的性质就可以证明$\angle PAB=\angle D$这个性质，从而完成分析.

例 8 如图 2・30，已知：$\odot O$、$\odot O'$相交于 A、B，过 B 的直线分别交$\odot O$、$\odot O'$于 C、D，$\odot O'$的弦 AE 交$\odot O$于 F. 求证：$CF /\!/ ED$.

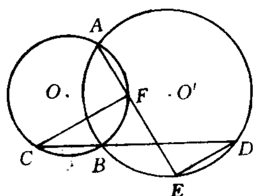


图 2・30

分析：本题要证明的结论 $CF /\!/ ED$ 是两条平行线的判定问题，所以可应用平行线的基本图形进行证明. 于是就应选取同与 CF、ED 相交的直线为第三条直线. 从图形中我们可看出第三条直线的选取可以有两种可能性，即取 CD 或 AE.

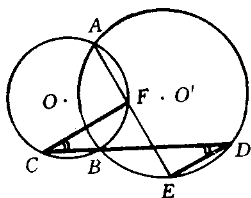


图 2・31

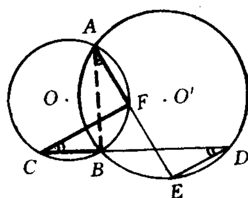


图 2・32

若取 CD 为截 CF、ED 的第三条直线，则问题就可转化为要证$\angle C=\angle D$（如图 2・31）. 由于$\angle C$是$\odot O$的一个圆周角，而且$\odot O$上出现了四个点 A、C、B、F，所以就可应用圆周角的基本图形

的性质进行证明. 由于$\angle C$这个圆周角所对的弧(即$\overset{\frown}{BF}$)所对的另一个圆周角尚未在图形中出现,所以应先将这个圆周角添上,于是连结AB(公共弦)(如图2・32),可得$\angle C=\angle A$,那么问题就转化为要证$\angle A=\angle D$,由于这两个角是$\odot O'$中同弧所对的圆周角,所以根据条件A、B、E、D四点共圆和圆周角的基本图形的性质就可以证明结论.

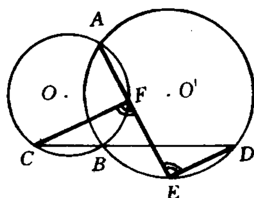


图2・33

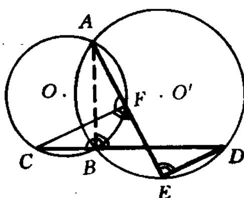


图2・34

若取AE为截CF、ED的第三条直线,则问题就可转化为要证$\angle CFE=\angle E$(如图2・33). 而$\angle E$是$\odot O'$中的一个圆周角,且$\odot O'$上出现了四个点A、B、E、D,所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 由于$\angle E$这个圆周角所对的弧(即$\overset{\frown}{AD}$)所对的另一个圆周角尚未在图形中出现,所以应先将这个圆周角添上,于是连结AB(如图2・34),可得$\angle E=\angle ABD$,那么问题就转化为应证$\angle CFE=\angle ABD$. 由图形中可以看出C、B、D和A、F、E都成一直线,所以现在要证明相等的这两个角分别是$\angle AFC$和$\angle ABC$的补角,所以问题又可以转化为要证这两个角(即$\angle AFC$和$\angle ABC$)相等. 由于这两个角是$\odot O$中同弧所对的圆周角,所以再一次应用圆周角的基本图形的性质就可以证明结论.

例9 如图2・35,已知:$\odot O$、$\odot O'$相交于A、B,M、N是$\odot O$上的两点,MA、MB的延长线分别交$\odot O'$于C、D,NA、NB的延长线分别交$\odot O'$于E、F. 求证:$ED /\!/ CF$.

分析：本题要证明的结论 $ED // CF$ 是两条平行线的判定问题，于是可应用平行线的基本图形进行证明. 从图形中我们可以看出与 ED 和 CF 都相交的直线可以取 MC（或 NF），MD（或 NE）（如图 2·36）.

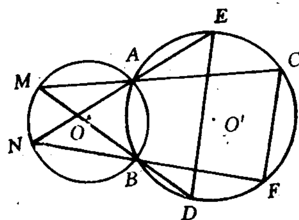


图 2·35

若取 MC 为截 ED、CF 的第三条直线，则可设 MC、ED 相交于 G，问题就成为要证明 $\angle MGD=\angle C$. 由于 $\angle MGD$ 是 $\odot O'$ 的一个圆内角，所以根据圆内角的性质有 $\angle MGD$ 的度数 $=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ABD}+\overset{\frown}{EC})$ 的度数，而 $\angle C$ 是 $\odot O'$ 的一个

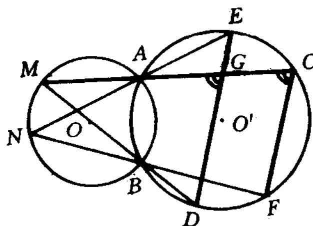


图 2·36

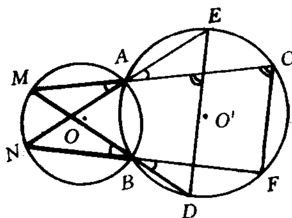


图 2·37

圆周角，所以也要应用圆周角的度数定理，得 $\angle C$ 的度数 $=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ADF}$ 的度数 $=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ABD}+\overset{\frown}{DF})$ 的度数，那么问题就转化为要证 $\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{DF}$. 由于在几何问题中，弧之间的等量关系可以转化为与圆有关的角之间的等量关系来讨论，而在图形中又分别出现了这两条弧所对的两个圆周角，即 $\angle EAC$ 和 $\angle FBD$，所以问题就成为要证 $\angle EAC=\angle FBD$. 由于这两个角分别是 $\angle MAN$ 和 $\angle MBN$ 的对顶角，所以问题又可进一步转化为要证 $\angle MAN=\angle MBN$. 而这两

个角是$\odot O$中同一条弧($\overset{\frown}{MN}$)所对的圆周角，所以再应用圆周角的基本图形性质就能证明结论.(如图 2·37)

若取 MD 为截 ED、CF 的第三条直线，则因 MD 目前尚未与这两条要证明平行的两条线段中的一条 CF 相交，所以应根据平行线的基本图形将它们先延长到相交，也就是延长 MD 交 CF 的延长线于 G(如图 2·38)，问题就成为要证$\angle G=\angle BDE$. 由于$\angle G$是$\odot O'$的一个圆外角，根据圆外角的性质有$\angle G$的度数$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BEC}-\overset{\frown}{DF})$的度数，而$\angle BDE$是$\odot O'$的一个圆周角，又可得$\angle BDE$的度数$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAE}$的度数，而$\overset{\frown}{BEC}=\overset{\frown}{BAE}+\overset{\frown}{EC}$. 所以问题也就转化为要证$\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{EC}$(以下分析略).

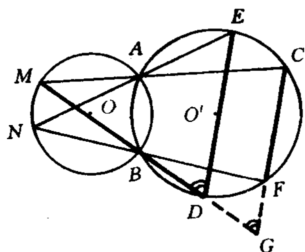


图 2·38

在取同与 ED、CF 相交的第三条直线时，也可以用在两线段上各取一点再连接的方法，那就可以连接 CD(或 EF)(如图 2·39)，问题也就转化为要证明$\angle EDC=\angle FCD$、$\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{DF}$，以下分析略.

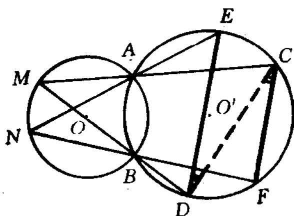


图 2·39

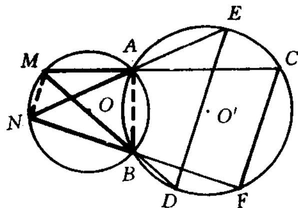


图 2·40

由于这个问题的条件中出现了⊙O和⊙O'相交于A、B，是两个圆的组合问题，所以也可以转化或分解到一个圆中进行分析. 在⊙O中，现在出现了圆上的四点A、M、N、B，所以可以应用圆周角的基本图形性质进行证明，由于现在图形中的圆内接四边形尚不完整，所以应先将这个圆内接四边形添完整，于是连结AB（公共弦）、MN（如图 2·40），可得$\angle MAB+\angle MNB=180°$，$\angle ABM=\angle ANM$. 而在⊙$O'$中，由于$ABFC$也是一个圆内接四边形，且$C$、$A$、$M$成一直线，所以$\angle MAB=\angle F$，这样就可得$\angle F+\angle MNB=180°$，$CF\parallel MN$. 而在⊙$O'$中，另外还出现一个圆内接四边形，即$A$、$B$、$D$、$E$四点共圆，而$D$、$B$、$M$成一直线，所以又可得$\angle MBA=\angle E$，从而又有$\angle E=\angle ANM$，$ED\parallel MN$. 而由$CF$、$ED$都与$MN$平行，当然就可推得结论.

例 10 如图 2·41，已知：⊙O、⊙O'内切于A，⊙O的弦AB、AC分别交⊙O'于D、E. 求证：$DE\parallel BC$.

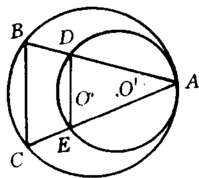


图 2·41

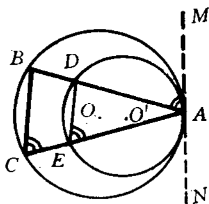


图 2·42

分析：本题的条件中出现了⊙O、⊙O'内切于A，这是两圆相切的问题，也是两个圆的组合图形问题，于是就可以将问题转化成为一个圆中的问题来进行讨论. 将两圆相切的问题转化到一个圆中的问题来进行讨论的方法是添加过切点的公切线，这样对每一个圆来讲都出现了一条切线，从而可应用弦切角的基本图形来进

行分析. 于是过切点 A 作两圆的公切线 MN（如图 2·42），那么在⊙O 中，由于出现了过点 A 的切线 MN 和过切点 A 的弦 AB，所以应用弦切角的基本图形的性质可得$\angle MAB=\angle C$. 而在⊙O' 中，我们可以应用同样的方法得到$\angle MAD=\angle AED$. 由于$\angle MAB$ 和$\angle MAD$ 是同一个角，所以就有$\angle C=\angle AED$. 又因为$\angle C$ 和$\angle AED$ 可以看作是 DE、BC 被直线 AC 所截而得到的一组同位角，那么由这两个角相等就可以推得 $DE\parallel BC$（如图 2·43）.

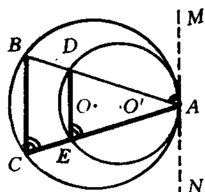


图 2·43

第三章　等腰三角形

第一节　等腰三角形

【分析方法导引】

当几何问题中出现了两条具有公共端点且不在一直线上的相等线段时，无论它们是在条件中出现还是在结论中出现，就应萌发应用等腰三角形的基本图形进行证明的意识. 然后就应将这两条具有公共端点的相等线段组成等腰三角形，如果图形中尚未出现底边的，就应将底边添上. 接下来就应应用等腰三角形中两条边相等和相对应的两个角相等之间的等价关系，将要证明的结论转化为要证它的等价性质，或者由条件直接推得它的等价性质成立. 若图形中出现了等腰三角形顶角的外角时，则应将两内角之间的相等关系转化为等价的外角与不相邻的内角之间的倍半关系来进行证明.

例 1　如图 3・1，已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，E 是 AC 上的一点，D 是 BA 的延长线上的一点且 $AD=AE$. 求证：$DE\perp BC$.

分析：本题要证明的结论是 $DE\perp BC$，这是证明两条线段垂直的问题，根据垂线的定义它们应相交成 $90°$ 角，而现在它们尚未相交，所以应将它们延长到相交，也就是延长 DE 交 BC 于 F（如图 3・2)，问题就成为要证 $\angle DFB$（或 $\angle EFC$）$=90°$. 由于 $\angle DFB$ 可以看作是 $\triangle DFB$ 的一个内角，所以要证明这个角是直角，也就是要

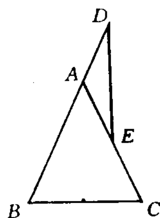


图 3・1

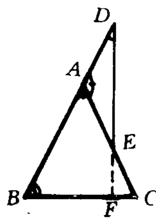


图 3・2

证明这个三角形中另外两个角的和等于 90°，也即要证$\angle D+\angle B=90°$.

由条件中出现 $AB=AC$ 是两条具有公共端点的相等线段，所以它们可组成一个等腰三角形，从而可应用等腰三角形的基本图形的性质进行证明. 又因为 B、A、D 成一直线，出现了这等腰三角形的顶角的外角，所以可得$\angle DAE=2\angle B$. 又因为条件中还出现 $AD=AE$，也是两条具有公共端点的相等线段，它们也可以组成等腰$\triangle ADE$，而由 D、A、B 成一直线，又可得$\angle BAC=2\angle D$. 而$\angle DAE+\angle BAC=180°$，所以$\angle D+\angle B=90°$就可以证明.

例 2 如图 3・3，已知：AB 是$\odot O$ 的弦，延长 AB 到 C，使 $BC=BO$，直线 CO 交$\odot O$ 于 D、E. 求证：$\overset{\frown}{AE}=3\overset{\frown}{BD}$.

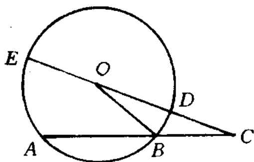


图 3・3

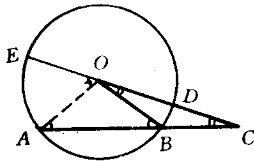


图 3・4

分析：本题要证明的结论是两条弧之间的倍数关系，或者讲是两条弧之间的一种数量关系. 在几何问题的分析中，对于弧之间的

数量关系的基本的处理方法就是转化成为与圆有关的角之间的数量关系来进行讨论.

由于在图形中对于$\overset{\frown}{BD}$来说，它所对的圆心角$\angle BOD$已经出现，所以对$\overset{\frown}{AE}$来说也需要用它所对的圆心角，但这个圆心角现在图形中尚未出现，所以根据圆心角的定义，可连结OA(如图3·4)，则$\angle AOE$就是$\overset{\frown}{AE}$所对的圆心角，那末问题即可转化为要证$\angle AOE=3\angle BOD$.

由条件$BC=BO$，这是两条具有公共端点B的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，所以就可应用等腰三角形的基本图形的性质进行证明. 根据条件C、B、A成一直线，这就出现了$\angle ABO$是等腰$\triangle BCO$的顶角的外角，从而就有$\angle ABO=2\angle BOD=2\angle C$. 又因为$OA$和$OB$是同圆的两条半径，当然相等，所以它们也是两条具有公共端点的相等线段，也就可以组成等腰三角形，应用等腰三角形这个基本图形的性质又可以得$\angle A=\angle ABO$.

由于条件中还给出C、O、E成一直线，这样结论中出现的$\angle AOE$就可以看作是$\triangle OAC$的一个外角，从而有$\angle AOE=\angle A+\angle C=2\angle BOD+\angle BOD$，分析就可以完成.

例3 如图3·5，已知：$\triangle ABC$内接于$\odot O$，过A、C、O三点作$\odot O'$交BC于D. 求证：$DA=DB$.

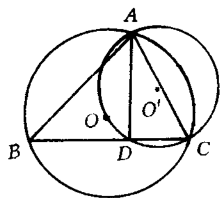


图3·5

分析：本题要证明的结论$DA=DB$，是两条具有公共端点D的相等线段，所以就可以组成一个等腰三角形的基本图形，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题. 由于条件中还出现B、D、C成一直线，出现了$\angle ADC$是这个要证明的等腰三角形的顶角的外角，所以要证明$DA=DB$，就可以转化为要证它的等价性质$\angle ADC=2\angle B$.

在这里出现了$\angle B$的两倍角关系，而$\angle B$在$\odot O$中是一个圆周角，所以就出现了圆周角的两倍问题．而根据圆周角的性质可知圆周角的两倍应等于它所对的弧所对的圆心角，但现在$\angle B$所对

图3・6

图3・7

的$\overset{\frown}{AC}$所对的圆心角在图形中尚未出现，所以应将它添上，这样就可以根据圆心角的定义连结AO、CO（如图3・6），于是就有$\angle AOC=2\angle B$，接下来的问题当然就是要证明$\angle AOC=\angle ADC$．由于这两个角都是$\odot O'$的圆周角，所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明，也就是由A、O、D、C四点共圆即可证明$\angle AOC=\angle ADC$，从而完成分析（如图3・7）．

例4　如图3・8，已知：$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle C$，AD是角平分线．求证：$AC=AB+BD$．

图3・8

分析：本题要证明的结论$AC=AB+BD$是一条线段等于两条线段的和的问题，所以可根据线段和的定义将AB和BD这两条线段接起来，证明所得到的线段与AC相等．将AB和BD这两条线段接起来有两种可能，一种是将AB接到BD上，另一种是将BD接到AB上，所以接下来可对这两种可能情况

图3・9

分别进行讨论：

若考虑将 AB 接到 BD 上，则延长 DB 到 E 使 $BE=BA$（如图 3·9）. 这样就出现了 BE、BA 是两条具有公共端点的相等线段，所以它们可以组成一个等腰三角形，由于这个等腰三角形还只出现两条腰而没有底边，所以应将底边添上，也就是连结 AE（如图 3·10），那么 $\angle E$ 就等于 $\angle BAE$，又因为 E、B、C 成一直线，出现了这个等腰三角形的顶角的外角，所以应用等腰三角形的基本图形的性质可得 $\angle ABC=2\angle E$，而已知 $\angle B=2\angle C$，从而就可推得 $\angle E=\angle C$，于是 $\triangle AEC$ 也是一个等腰三角形，$AE=AC$. 由于在将 AB 接到 BD 上后，有 $ED=EB+BD=AB+BD$，所以问题是要证明 $AC=ED$. 而我们已经证明了 $AE=AC$，这样问题又成为要证 $ED=EA$. 这又是两条具有公共端点 E 的相等线段，它们又可以组成一个等腰三角形，又成为一个等腰三角形的判定问题，所以要证明 $ED=EA$，就可以转而证明它的等价性质 $\angle EDA=\angle EAD$. 由于 $\angle EAD$ 可以看作是 $\angle EAB$ 和 $\angle BAD$ 的和，又由 E、D、C 成一直线，又可得 $\angle EDA$ 可以看作是 $\triangle ADC$ 的一个外角，所以 $\angle EDA=\angle C+\angle DAC$，而由条件 $\angle BAD$ 和 $\angle DAC$ 是相等的，所以现在只需证明 $\angle EAB=\angle C$，但由于这两个角都与 $\angle E$ 相等，所以这两个角当然相等，从而完成分析（如图 3·11）.

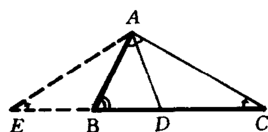


图 3·10

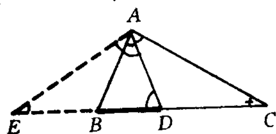


图 3·11

若考虑将 BD 接到 AB 上，则延长 AB 到 E 使 $BE=BD$（如图 3·12），这样就出现了 BE、BD 是两条具有公共端点的相等线段，所以它们也可以组成一个等腰三角形，现在这个等腰三角形也是只有两条腰

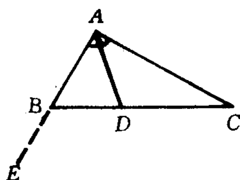


图 3·12

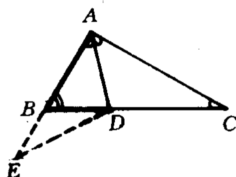


图 3·13

而没有底边，所以应将底边添上，也就是连接 ED（如图 3·13），又因为 A、B、E 成一直线，出现了这个等腰三角形的顶角的外角，所以应用等腰三角形的基本图形的性质可得 $\angle ABD=2\angle E$. 由于条件中给出了 $\angle B=2\angle C$，所以就可得 $\angle E=\angle C$.

现在我们将 BD 接到 AB 上以后，要证的结论就可转化为 $AC=AB+BE=AE$. 由条件 AD 是角平分线，所以 AE 和 AC 这两条要证明相等的线段就是关于 AD 成轴对称的，从而就可应用一次轴对称型全等三角形进行证明，由于 AE 和 AC 可以看作是 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$ 的一组对应边，而在这两个三角形中已经出现了 $\angle EAD=\angle CAD$、$\angle E=\angle C$ 和 $AD=AD$ 的条件，这两个三角形必定全等，所以分析就可以完成.

由于本题要证明的结论中出现的是两条线段的和的问题，所以也可以根据线段和差的逆运算关系，将结论转化为线段差的形式，再根据线段差的定义来进行分析. 于是首先将结论转化成 $AB=AC-BD$. 从而就可以在 AC 上截取 AE，使 $AE=AB$（如图 3·14），那么问题就是要证留下来的线段 CE 与 BD 相等. 而在作了 $AE=AB$ 以后，由于 AD 是角平分线，这样就出现了 AE 和 AB 这两条相等线段是关于角平分线 AD 成轴对称的，所以就可添加一对轴对称型全等三角形进行证明，但在这两个全等三角形中有一个尚未出现，于是就应先将这个三角形添出，也就是连接 DE（如图 3·15），这样即可证明 $\triangle ADB\cong\triangle ADE$，$BD=ED$，这样问题

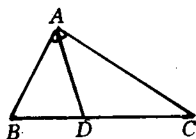


图 3・14

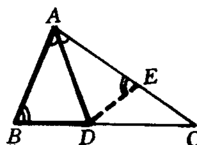


图 3・15

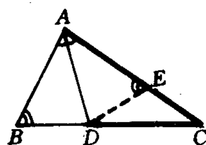


图 3・16

就转化为要证 $CE=ED$. 由于这是两条具有公共端点的要证明的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，从而就成为一个等腰三角形的判定问题，又因为 C、E、A 成一直线，出现了要判定的这个等腰三角形的顶角的外角，所以要证明 $CE=ED$，就可转化成应证它的等价性质 $\angle AED=2\angle C$，而已知 $\angle B=2\angle C$，所以问题归结到需要 $\angle B=\angle AED$ 成立，而这两个角是前述已经证明的一对全等三角形的对应角，当然相等，所以分析可以完成（如图 3・16）.

例 5 如图 3・17，已知：等边 $\triangle ABC$ 中，$BD\perp AC$ 垂足是 D，延长 BC 到 E，使 $CE=CD$. 求证：$DB=DE$.

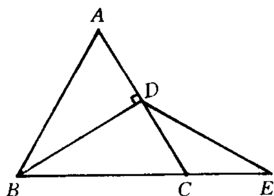


图 3・17

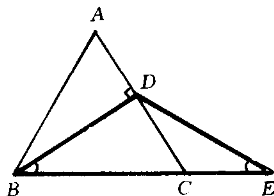


图 3・18

分析：本题要证明的结论 $DB=DE$，是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形的基本图形（如图 3・18），从而就成为一个等腰三角形的判定问题. 于是问题就可转化

为证明 $DB=DE$ 的等价性质 $\angle DBE=\angle E$. 由于条件给出 $\triangle ABC$ 是等边三角形，且 $BD\perp AC$，所以 BD 也是 $\angle ABC$ 的角平分线，而 $\angle ABC$ 是等边三角形的一个内角，应等于 60°，所以 $\angle DBE=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 60°=30°$，这样问题就成为要证 $\angle E$ 也等于 30°.

又因为条件中还给出 $CE=CD$，这也是两条具有公共端点 C 的相等线段，它们也可以组成一个等腰三角形的基本图形，又因为 E、C、B 成一直线，出现了这个等腰三角形顶角的外角，所以可得 $\angle ACB=2\angle E$，而 $\angle ACB$ 是等边三角形的一个内角，也等于 60°，所以 $\angle E=30°$就可以证明，分析也就可以完成(如图 3·19).

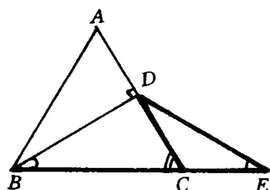


图 3·19

例 6 如图 3·20，已知：$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，D 是 AB 的延长线上的一点，且 $AD=AC$，E 是 AC 上的一点，且 $AE=AB$，过 D、E 的直线交$\odot O$ 于 F、G. 求证：$AF=AG$.

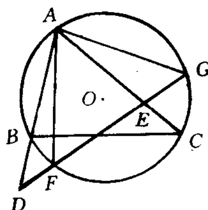


图 3·20

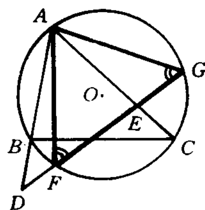


图 3·21

分析：本题要证明的结论 $AF=AG$ 是两条具有公共端点 A 的相等线段，所以可组成等腰三角形，是一个等腰三角形的判定问题，于是就可以转化成为要证 $AF=AG$ 的等价性质 $\angle AFG=\angle G$ (如图 3·21).

由于在$\odot O$中，$\angle G$是一个圆周角，所以可以应用圆周角的基本图形性质进行证明，由于图形中出现了A、F、C、G四点共圆，$\angle G$所对的$\overset{\frown}{ABF}$所对的另一个圆周角尚未出现，所以应先将这个圆周角添上，于是连接FC(如图3·22)，可得$\angle G=\angle ACF$，问题就转化为要证$\angle AFG=\angle ACF$.

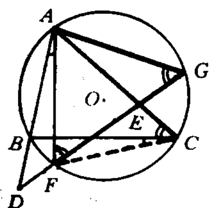


图3·22

由于条件中给出D、F、G成一直线，所以要证明的性质中的$\angle AFG$就可以看成是$\triangle ADF$的一个外角，所以$\angle AFG=\angle D+\angle DAF$，这样$\angle ACF$也就应看成是两个角之和，根据图形我们可以发现$\angle ACF=\angle ACB+\angle BCF$. 比较这两个关系，我们又可以发现由于$A$、$B$、$F$、$C$四点共圆，所以再应用一次圆周角的基本图形的性质可得$\angle DAF=\angle BCF$，那么问题进一步转化为只要证$\angle D=\angle ACB$.

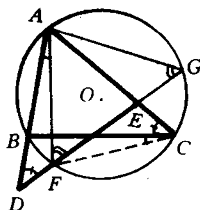


图3·23

由条件$AD=AC$，$AE=AB$，它们是两组具有公共端点的相等线段，且它们分别所夹的角是同一个角，所以这两组相等线段可以看作是位于一个等腰三角形的轴对称部分，从而就可以应用一次轴对称型的全等三角形进行证明，于是由上述两边夹角对应相等的条件，就可以证明$\triangle ADE\cong\triangle ACB$. 所以$\angle D=\angle ACB$就可以证明(如图3·23).

第二节　角平分线和平行线的组合图形

【分析方法导引】

当几何问题中出现角平分线和平行线的组合关系时，就可以想到要应用等腰三角形的基本图形进行证明. 然后就应用将角的边的平行线与角平分线及角的另一边相交或将角平分线的平行线与角的一边及另一边的反向延长线相交的方法找到等腰三角形的基本图形. 再应用角平分线、平行线、等腰三角形中任何两个性质成立就可以推得第三个性质成立的方法来完成分析.

例 7　如图 3·24，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle B$、$\angle C$ 的角平分线相交于 I，过 I 作 BC 的平行线分别交 AB、AC 于 D、E. 求证：$DE=BD+CE$.

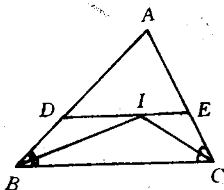


图 3·24

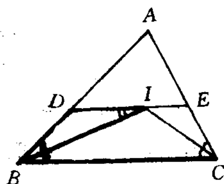


图 3·25

分析：本题条件中出现了 BI、CI 分别是 $\angle B$、$\angle C$ 的角平分线，且 $DE/\!/BC$，是一个角平分线和平行线的组合问题，所以必定出现一个等腰三角形的基本图形（如图 3·25）. 由于 $DE/\!/BC$，出现的是角的一条边的平行线，所以它必定要和角的另一边以及角平分线相交构成等腰三角形，于是就可找到这个等腰三角形应是

$\triangle DBI$. 那就可以由 $DE /\!/ BC$,且被 BI 所截得到$\angle IBC = \angle BID$,而由条件$\angle DBI = \angle IBC$,所以就可推得$\angle DBI = \angle BID$,$DB = DI$. 根据同样的道理还可得 $EC = EI$,所以结论就可以证明.

例 8 已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle B$ 的角平分线与$\angle C$ 的外角平分线相交于 M,过 M 作 BC 的平行线分别交 AB、AC 于 E、F. 求证:$EF = BE - CF$.

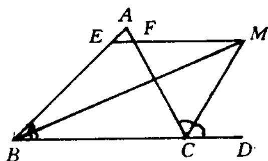


图 3・26

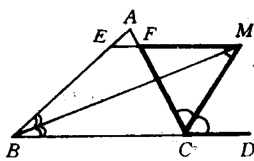


图 3・27

分析:本题条件中出现$\angle B$ 的角平分线 BM 和$\angle C$ 的外角平分线 CM,同时还出现 $EM /\!/ BC$,所以是一个角平分线和平行线的组合问题,从而就可以应用等腰三角形的基本图形进行证明. 由于 $EM /\!/ BC$ 是角的一条边的平行线,所以它应与角的另一边以及角平分线相交组成等腰三角形,于是根据 CM 是$\angle C$ 的外角平分线就可以找到这个等腰三角形应是$\triangle FCM$(如图 3・27). 那就可以根据 $FM /\!/ CD$,且被 CM 所截得到$\angle FMC = \angle DCM$. 而由条件$\angle DCM = \angle FCM$,就可推得$\angle FMC = \angle FCM$,$FC = FM$. 根据同样的道理还可推得 $EB = EM$. 而 $EF = EM - FM$,所以结论就可以证明.

例 9 已知:$\triangle ABC$ 中,AD 是角平分线,E 是 AB 上的一点,$AE = AC$,$EF /\!/ BC$ 交 AC 于 F. 求证:CE 平分$\angle DEF$.

分析:本题要证明的结论是:CD 是$\angle DEF$ 的角平分线,即$\angle DEC = \angle FEC$,同时条件中又出现 $EF /\!/ BC$,从而就构成了角平分线和平行线的组合关系,这样就想到要应用等腰三角形的基

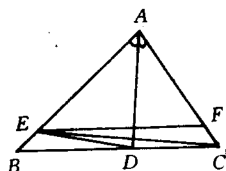


图 3・28

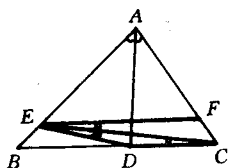


图 3・29

本图形进行证明．由于 $EF // DC$，出现了 DC 是角的一边的平行线，所以它应与角的另一边以及角平分线相交组成等腰三角形，于是就可以找到 $\triangle DEC$ 应是等腰三角形（如图 3・29）．但现在 $\angle DEC=\angle FEC$ 是要证明的结论，所以由 $EF // DC$，$\angle FEC=\angle DCE$，可知问题成为要证明 $\angle DEC=\angle DCE$，也就是要先证明 $\triangle DEC$ 是等腰三角形，或者也就是要证明 $\angle DEC=\angle DCE$ 的等价性质 $DE=DC$．

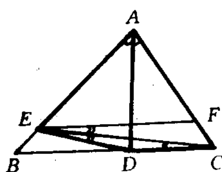


图 3・30

由条件给出 $AE=AC$，AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，这就出现了 AE、AC 这两条相等线段是关于角平分线 AD 成轴对称的，所以就可以应用轴对称型全等三角形进行证明（如图 3・30），由于现在要证明相等的 DE、DC 这两条线段也可以看作是 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ADC$ 的对应边，所以问题就是要证明这两个三角形全等，而由 $AE=AC$，$\angle EAD=\angle CAD$ 和 $AD=AD$ 就能完成证明，所以 $DE=DC$ 也就可以证得．

例 10 已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，过 C 作 AB 的平行线交 AD 的延长线于 E，过 E 作 CB 的平行线交 AB 的延长线于 F．

求证：$AF=AB+AC$．

分析：本题的条件中出现了 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线和 CE

$// AB$，这就构成了角平分线和平行线的组合关系，从而就可以应用等腰三角形的基本图形进行证明. 由于 $CE // AF$ 是角的一边的平行线，所以它应与角的另一边以及角平分线相交组成等腰三角形，于是就可以找到这个等腰三角形应是 $\triangle CAE$（如图 3・32）. 于是由 $\angle CAE = \angle FAE$ 和 $CE // AB$，$\angle CEA = \angle FAE$，可推得 $\angle CAE = \angle CEA$，$CA = CE$. 这样要证明的结论就转化为 $AF = AB + AC = AB + CE$. 又因为 $AF = AB + BF$，比较这两个关系可知问题进一步转化为要证 $BF = CE$，而由条件 $BC // FE$，$BF // CE$，四边形 $BFEC$ 是一个平行四边形，这一组对边当然相等，所以分析可以完成.

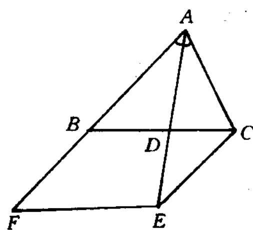


图 3・31

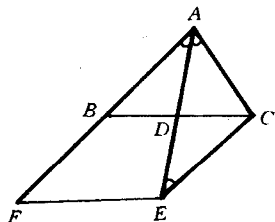


图 3・32

例 11 已知：$\square ABCD$ 中，$AB > AD$，$\angle A$、$\angle D$ 的角平分线相交于 E，$\angle B$、$\angle C$ 的角平分线相交于 F. 求证：$EF = AB - AD$.

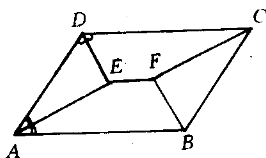


图 3・33

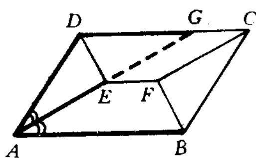


图 3・34

分析：本题条件中出现了 AE 是 $\angle A$ 的角平分线，且四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$DC // AB$，所以就是一个角平分线和平行线

的组合问题，这样就可以想到要应用等腰三角形的基本图形进行证明. 由于 $DC \parallel AB$ 出现的是一条边 AB 的平行线，所以这条平行线应与角的另一边以及角平分线相交构成等腰三角形，而现在的图形中 DC 尚未与角平分线 AE 相交，所以应首先将它们延长到相交，于是延长 AE 交 DC 于 G（如图 3・34），这样由 $\angle BAG = \angle DAG$ 和 $DC \parallel AB$、$\angle DGA = \angle BAG$，就可推得 $\angle DAG = \angle DGA$，$DA = DG$. 这样要证明的结论就转化为 $EF = AB - AD = DC - DG = GC$（其中后两个等号已成立）.

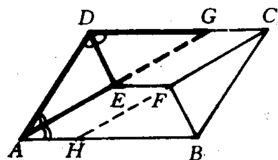


图 3・35

又因为在证明了 $\triangle DAG$ 是等腰三角形以后，由于条件中还出现 DE 是 $\angle D$ 的角平分线，这样就出现了具有重要线段的等腰三角形的基本图形（如图 3・35），应用这个基本图形的性质可得 E 是 AG 的中点，$EG = \frac{1}{2}AG$. 以上的分析是对于 $\angle A$、$\angle D$ 这两条角平分线的条件来进行的，那么对于 $\angle B$、$\angle C$ 这两条角平分线来讲也可以用同样的方法来进行分析，于是延长 CF 交 AB 于 H，可得 $AH = AB - BC = AB - AD = GC$，$FH = FC = \frac{1}{2}CH$.

现由 $AH = GC$ 和 $AH \parallel GC$，可得四边形 $AHCG$ 是平行四边形，$GA \parallel CH$，$GA = CH$，再由 E、F 分别是 GA、CH 的中点，$EG = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}CH = CF$，可得四边形 $EFCG$ 也是平行四边形，所以 $EF = GC$ 就可以证明.

在上述分析过程中，如果在得到 $DA = DG$ 和 $AE = EG = \frac{1}{2}AG$ 后，考虑图形中出现的 AE 和 CF 是位于$\square ABCD$ 中的中心对称部分的两条对应线段，那就可以想到要应用中心对称型全等三角形来进行证明，而根据平行四边形中的中心对称部分就可以找

到这一对全等三角形是$\triangle ADE$和$\triangle CBF$(如图3·36),在这两个三角形中,应用平行四边形的性质和已经给出的四条角平分线的条件,可以得到$AD=CB$,$\angle DAE=\angle BCF$,$\angle EDA=\angle FBC$,所以这两个三角形全等可以证明,那么AE就等于CF,就可得$EG=FC$.

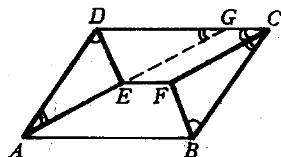


图3·36

由于现在的问题是要证$EF=GC$,那么在四边形$EFCG$中,就出现了两组对边相等,所以这个四边形必定是平行四边形,但要证明这个四边形是平行四边形时,$EF=GC$这个性质是不能用的,所以只能证明EG和FC不但相等,而且平行.由于EG和FC可以看作是被DC所截,而且我们已经证明$\angle DGE=\angle DAE=\angle BCF=\angle DCF$,所以$EG\parallel FC$,四边形$EFCG$是平行四边形,从而也就可以完成分析.

例12 已知:$\square ABCD$中,$AD=2AB$,将AB向两方分别延长至E、F,使$AE=AB=BF$.求证:$CE\perp DF$.

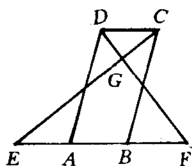


图3·37

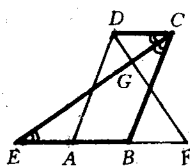


图3·38

分析:本题条件中出现了$BC=AD=2AB$,且由$AE=AB$可得$BE=2AB$,所以就有$BC=BE$,这样就出现了两条具有公共端点的相等线段,它们就可以组成一个等腰三角形.又因为条件中给出四边形$ABCD$是平行四边形,$CD\parallel BE$,是等腰三角形一条腰

的平行线，这样就出现了等腰三角形与腰的平行线的组合关系，就必定出现了角的平分线. 于是由 $BE=BC$，可得$\angle E=\angle BCE$，由 $DC\parallel EB$，可得$\angle DCE=\angle E$，从而就可得到$\angle BCE=\angle DCE$.

根据同样的道理，由 $BF=AB$，$AF=2AB=AD$ 和 $DC\parallel AF$ 出发进行分析，也可以得到$\angle ADF=\angle CDF$.

由条件 $AD\parallel BC$，这一组平行线可以看作是被 DC 所截，那么$\angle ADC+\angle DCB=180°$，从而可推得$\angle DCE+\angle CDF=90°$，分析就可以完成(如图 3・38).

在上述分析中，在得到了 EC、FD 分别是$\angle DCB$ 和$\angle CDA$ 的角平分线以后，由于 $AD\parallel BC$，所以又出现了一次角平分线和平行线的组合关系，这样也就必定可以再得到一个等腰三角形的基本图形(如图 3・39). 由于 $DA\parallel CB$ 可以看作是$\angle DCB$ 的一条边的平行线，所以它一定与角的另一边以及角平分线相交构成等腰三角形，这样就可找到这个等腰三角形应是$\triangle DHC$，也就是由$\angle BCE=\angle DCE$ 和 $DA\parallel CB$，$\angle DHC=\angle BCE$，可推得$\angle DHC=\angle DCH$，$DH=DC$. 而在等腰$\triangle DHC$ 中，出现了 FD 是顶角的角平分线，因此它必定和底边垂直，分析也就可以完成.

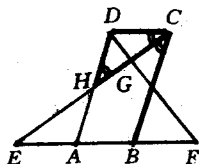


图 3・39

例 13 已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，M 是 BC 的中点，$MF\parallel DA$ 交 AB 和 CA 的延长线于 E、F.

求证：$BE=CF=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

分析：本题的条件中出现了 AD 是角平分线，$MF\parallel DA$，构成了角平分线和平行线的组合关系，所以可得到一个等腰三角形的

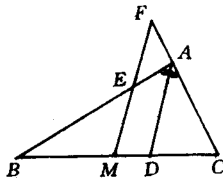


图 3・40

基本图形，由于 MF 是角平分线的平行线，所以它应和角的一边（AB）以及另一边（AC）的反向延长线相交构成等腰三角形，于是就可找到这个等腰三角形应是$\triangle AEF$（如图 3·41），于是由$\angle EAD=\angle CAD$ 和 $MF \parallel DA$，$\angle AEF=\angle EAD$，$\angle F=\angle CAD$，可得$\angle AEF=\angle F$，$AE=AF$.

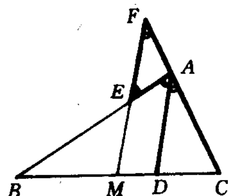


图 3·41

由于 AF 是结论中出现的线段 CF 的一部分，这样 AF 就可以看作是折过来成为 AE，所以 CF 就转化成 $CA+AF=CA+AE$，问题就成为要证 $BE=CA+AE$.

现在出现的问题就是要证明一条线段等于两条线段的和，所以可根据线段和的定义将两条线段接起来，或者也就是将其中的

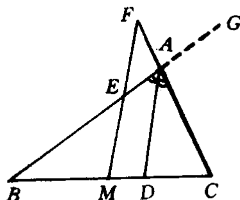


图 3·42

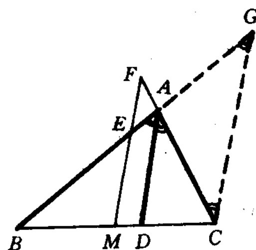


图 3·43

一条线段接到另一条线段上去. 但将 AE 接到 CA 上，则问题又回到了原来的性质，所以只能考虑将 AC 接到 EA 上，即延长 BA 到 G 使 $AG=AC$（如图 3·42），于是要证的结论又进一步转化为 $BE=CA+AE=AG+AE=EG$，即要证 E 是 BG 的中点.

又因为在作了 $AG=AC$ 后，这就是两条具有公共端点的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，但这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，所以应考虑将底边添上，于是连接 CG（如图 3·

43). 又因为条件中出现 AD 是角平分线，从而在这里又出现了一次等腰三角形和角平分线的组合关系，所以必定会出现一个平行线的基本图形，也就是由 AD 是等腰$\triangle ACG$ 的顶角的外角平分线，就可推得 $AD /\!/ GC$. 也就是由 $AC=AG$ 和 B、A、G 成一直线，可得$\angle ACG=\angle G$，$\angle BAC=\angle ACG+\angle G=2\angle G$，又因为$\angle BAC=2\angle BAD$，从而就可得$\angle BAD=\angle G$ 和 $AD /\!/ GC$. 又因为已知 $ME /\!/ DA$，所以又有 $GC /\!/ EM$.

最后就可以由 $BM=CM$ 和 $ME /\!/ CG$，再应用三角形中位线的基本图形性质来证明 $BE=EG$.

而在证明了 $BE=EG=CF$ 后，就可进一步得到 $BE=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}(AB+AG)=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

本题在由 AD 是角平分线和 MF 是 DA 的平行线得到应添加等腰三角形的基本图形进行证明以后，由于 MF 是角平分线的平行线，所以它也可以和角的一边以及角的另一边的平行线相交构成等腰三角形，由于它已和角的一边 AB 相交于 E，所以它应和 AC的平行线相交，而图形中尚没有 AC 的平行线，所以应先将这条平行线添出.

图 3・44

若考虑过端点 B 作 AC 的平行线，则过 B 作 $BG /\!/ AC$ 交 FM 的延长线于 G(如图 3・44)，那就可得$\triangle BGE$ 应是等腰三角形. 也就是可由 $GF /\!/ DA$，得$\angle BEG=\angle BAD$，由 $BG /\!/ AC$，得 $\angle G=\angle F$，而 $\angle F=\angle CAD$，$\angle CAD=\angle BAD$，所以 $\angle BEG=\angle G$，$BE=BG$，这样问题就可以转化为证 $BG=CF$.

由条件 $BM=CM$，且 BC、FG 在 M 点相交，就出现了两条相等的线段在一组对顶角的两边，而且成一直线，所以可应用中心对

称型全等三角形来进行证明(如图 3·45),由 $BM=CM$、$\angle BMG=\angle CMF$ 和 $\angle G=\angle F$,就可以证明$\triangle BMG\cong\triangle CMF$,即可证得 $BG=CF$.

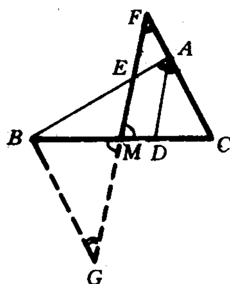


图 3·45

再进一步可得 $AB+AC=BE+EA+AC$. 而在前述分析中已经证明了 $EA=FA$,所以 $AB+AC=BE+FA+AC=BE+CF=BE+BE=2BE$,从而也就可证明 $BE=CF=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

若考虑过中点 M 作 AC 的平行线,则过 M 作 $MG\parallel CA$ 交 AB 于 G(如图 3·46),那么$\triangle GME$ 就应是一个等腰三角形,也就是由 $MF\parallel DA$ 和$\angle BAD=\angle CAD$,可得 $\angle GEM=\angle GAD$, $\angle GME=\angle F=\angle CAD$,并进而得$\angle GEM=\angle GME$,$GM=GE$.

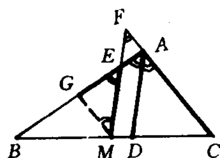


图 3·46

但由 $BM=CM$,$MG\parallel CA$,就可应用三角形中位线的基本图形性质得 $BG=AG=\frac{1}{2}AB$,$GM=\frac{1}{2}AC$. 于是就有 $BE=BG+GE=\frac{1}{2}AB+GM=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

而 $CF=AC+AF=AC+AE=AC+(AG-EG)=AC+\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}(AB+AC)$,所以分析可以完成.

在上述分析中,由于出现了 MG 是角的一边 CA 的平行线,所以这条平行线也可以与角的另一边以及角平分线相交构成等腰三角形,于是过 M 作 AC 的平行线交 AB 于 G,交 AD 的延长线于

H(如图 3·47),这样就可得 $GH=GA$,接下来的分析可请读者自行完成.

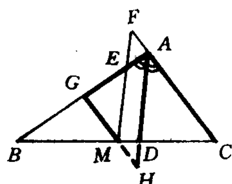


图 3·47

例 14 已知:$\triangle ABC$ 中,AD 是角平分线,$CE /\!/ DA$ 交 BA 的延长线于 E,F 是 CE 的中点.求证:$FA \perp DA$.

分析:本题条件中出现了 AD 是角平分线和 $CE /\!/ DA$,就是一个角平分线和平行线的组合问题,所以就可以得到一个等腰三角形的基本图形(如

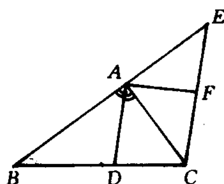


图 3·48

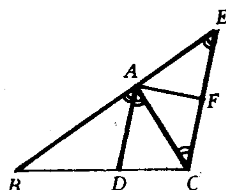


图 3·49

图 3·49).由于 CE 是角平分线 DA 的平行线,所以它应和角的一边 AC 及另一边 AB 的反向延长线相交组成等腰三角形,于是即可找到这个三角形应是$\triangle ACE$,也就是由$\angle BAD=\angle CAD$,$CE /\!/ DA$,可得$\angle ACE=\angle CAD$,$\angle E=\angle BAD$,$\angle ACE=\angle E$,$AC=AE$.

在证明了 $AC=AE$ 后,再由条件 F 是CE 的中点,出现了 AF 是等腰三角形底边上的中线,所以应用等腰三角形中的重要线段的基本图形的性质,就可得 $AF \perp CE$,而 $CE /\!/ DA$,所以 $AF \perp AD$ 就可以证明.

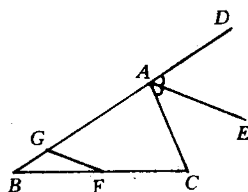


图 3·50

例 15 已知:$\triangle ABC$ 中,AE 是$\angle A$的外角平分线,F 是 BC 的中点,过 F 作 EA 的平行线交 AB 于

G. 求证：$BG=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

分析：本题条件中出现 AE 是 $\angle A$ 的外角平分线，$FG // EA$ 是角平分线的平行线，所以就一定出现一个等腰三角形的基本图形. 由于 FG 是角平分线的平行线，所以它应和角的一边以及另一边的反向延长线相交组成等腰三角形，而现在 GF 尚未与角的一边 AC 相交，所以应先将它们延长到相交，也就是延长 GF 交 AC 的延长线于 H，即可得 $\triangle AGH$ 应是一个等腰三角形(如图 3・51)，也就是由 $\angle DAE=\angle CAE$ 和 $GH // AE$，$\angle DAE=\angle AGH$，$\angle CAE=\angle H$，得 $\angle AGH=\angle H$，$AG=AH$.

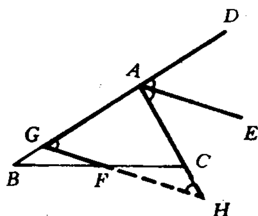


图 3・51

由于问题是要证明 $BG=\frac{1}{2}(AB-AC)$，所以就有 $AB-AC=(AG+BG)-(AH-CH)=BG+CH$，这样问题就转化为要证 $BG=CH$.

由条件 $BF=CF$、且 BC.GH 在 F 点相交，这就出现了 BF 和 CF 这两条相等直线是位于一组对顶角($\angle BFG$ 和 $\angle CFH$)的两边上，而且成一直线，所以可添加一对中心对称型的全等三角形进行证明，添加的方法是过两端点作平行线，并要与过中点的直线相交，于是过 C 作 $CK // AB$ 交 GH 于 K(如图 3・52)，则由 $\angle BFG=\angle CFK$，$BF=CF$，$\angle B=\angle FCK$ 可得 $\triangle BFG \cong \triangle CFK$，$BG=CK$，这样问题又成为要证 $CK=CH$. 由于 $CK // AB$. 而且 $\triangle AGH$ 已经证明是等腰三角形，所以 $CH=CK$ 就可以证明.

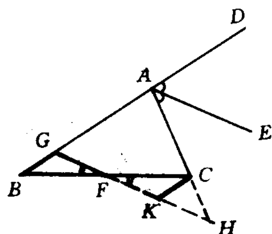


图 3・52

在上述分析中，由于已经出现的角平分线 AE 的平行线 GF

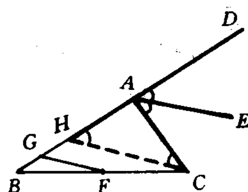


图 3・53

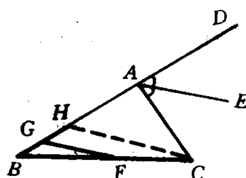


图 3・54

尚未与角的一边 AC 相交，所以要得到等腰三角形也可以再作一条同时与 AB、AC 相交的 AE 的平行线，于是过 C 作 EA 的平行线交 AB 于 H(如图 3・53)，那就即可证明 $AH=AC$，这样 $AB-AC$ 就等于 $AB-AH=BH$，也就是要证明 G 是 BH 的中点. 由于已知 F 是 BC 的中点，出现了两个中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形性质进行证明(如图 3・54)，也就是要证明 $BG=HG$ 可转化成要证 $GF/\!/HC$，而由条件 $GF/\!/AE$，再由作法 $HC/\!/AE$，所以 $GF/\!/HC$ 得以证明.

例 16 已知：E 是正方形 $ABCD$ 的边 CD 的中点，F 是 CE 的中点. 求证：$\angle BAF=2\angle DAE$.

分析：本题要证明的结论 $\angle BAF=2\angle DAE$ 是两个角之间的倍半关系，所以可根据角的倍半关系的定义，将这个倍角

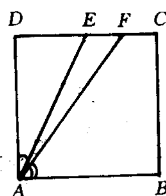


图 3・55

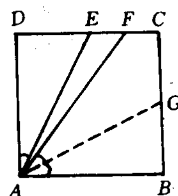


图 3・56

($\angle BAF$)二等分，也就是作这个角的角平分线后，证明这个角的一半与另一个角相等，于是作$\angle BAF$的角平分线AG交BC于G（如图3·56），问题就成为应证$\angle BAG=\angle DAE$.

在作出了AG是$\angle BAF$的角平分线以后，由于条件中给出了四边形$ABCD$是正方形，$DC /\!/ AB$，所以就出现了角平分线和平行线的组合关系，这样就必定产生一个等腰三角形的基本图形. 由于现在出现的DC是角的一边AB的平行线，所以它应该与角的另一边AF以及角平分线AG相交组成等腰三角形，而目前图形中DC尚未与角平分线AG相交，所以应将它们延长到相交，也就是延长DC交AG的延长线于H（如图3·57），于是由$\angle BAG=\angle FAH$和$DC /\!/ AB$，$\angle BAG=\angle H$，可得$\angle FAH=\angle H$，$FA=FH$.

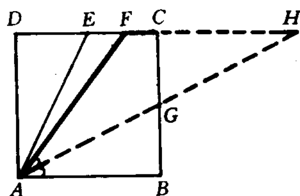


图3·57

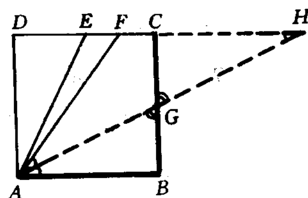


图3·58

由于我们现在要证明的性质是$\angle BAG=\angle DAE$，而这两个角可以分别看作是$\triangle BAG$和$\triangle DAE$的一个内角，而在这两个三角形中，已经出现了$\angle B=\angle D=90°$和$AB=AD$（即正方形的边长），所以$\triangle BAG$和$\triangle DAE$必定是一对全等三角形（如图3·58）. 而在证明这一对三角形全等时，由于$\angle BAG=\angle DAE$是要证明的结论不能用，那么它的等价性质$\angle AGB=\angle AED$也不能用，所以只能考虑再证一组对应边相等的条件. 由于条件中给出E是DC的中点，$DE=\frac{1}{2}DC$，所以考虑与条件有联系的性质，就应证明BG

$=DE$，从而进一步就是要证明 G 是 BC 的中点，$CG=BG$.

由于 AH、BC 相交于 G，所以要证明相等的这两条线段 BG 和 CG 就位于一组对顶角（$\angle AGB$ 和 $\angle HGC$）的两边而且成一直线，从而就可以应用中心对称型的全等三角形进行证明. 根据过两端点 B、C 的平行线与过中点的直线相交构成全等三角形的方法，就可以找到这对全等三角形应是 $\triangle AGB$ 和 $\triangle HGC$，在这一对三角形中，对应角相等的性质都已成立，所以就须证明一组对应边相等. 由于 AB 是正方形的边，所以可考虑证明 $AB=HC$. 根据条件 $FC=\frac{1}{4}CD=\frac{1}{4}AB$，可知只须证 $FH=\frac{5}{4}AB$，再由已证明的性质 $FA=FH$，可知要证明的结论又转化为 $FA=\frac{5}{4}AB$. 而由 $DF=\frac{3}{4}AB$、$AD=AB$ 和 $\angle D=90°$，应用勾股定理就可以证明 $FA=\frac{5}{4}AB$，从而完成分析.

例 17 已知：O 是 $\triangle ABC$ 的外心，AD 是高，AE 是角平分线. 求证：$\angle OAE=\angle DAE$.

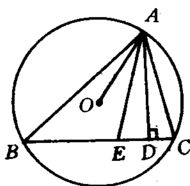


图 3·59

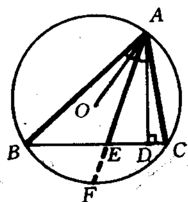


图 3·60

分析：由条件 AE 是角平分线，可知 $\angle BAE=\angle CAE$. 而这两个角都是圆周角，所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明，但这两个圆周角有一条边尚未和圆相交，所以要先将这条边延长

到与圆相交，于是延长 AE 交⊙O 于 F(如图 3·60)，就可得 $\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{CF}$，即 F 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点.

由于现在出现了弧的中点，所以可应用弧的中点的性质，也就是应用垂径定理，但现在图形中这条垂径尚未出现，所以应先将它添出，于是连结 OF，即可得 $OF\perp BC$，而已知 $AD\perp BC$，所以又有 $OF// AD$. 而我们要证的结论是 AE 为 $\angle OAD$ 的平分线，从而就出现了角平分线和平行线的组合关系，也就必定出现一个等腰三角形的基本图形. 由于 OF 是角的一边 AD 的平行线，所以它应和角的另一边 OA 以及角平分线 AF 相交组成等腰三角形，根据这样的方法我们就可以找到这个等腰三角形应是 $\triangle OFA$(如图 3·61). 由于现在 AF 是 $\angle OAD$ 的角平分线是要证明的结论，所以就要转而先证 $\triangle OFA$ 是等腰三角形，亦即要先证明 $OA=OF$. 由于 OA、OF 都是⊙O 的半径，当然相等，所以分析可以完成.

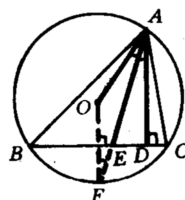


图 3·61

本题的分析也可以从另一种可能性来开始进行. 要证明 $\angle OAE=\angle DAE$，而已知 $\angle BAE=\angle CAE$，所以问题也可以转化为证 $\angle BAO=\angle CAD$. 由于 $\angle BAO$ 在⊙O 中是一个圆周角，但它

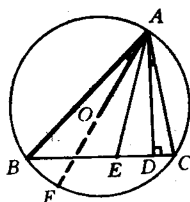


图 3·62

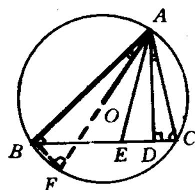


图 3·63

的一边 AO 尚未与⊙O 相交(指尚未出现第二个交点),所以应将它延长到与圆相交,也就是延长 AO 交⊙O 于 F(如图 3·62).然而在作出了 AF 后,就出现了 AF 是⊙O 的直径,从而就可以应用直径的性质,也就是半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明,但现在出现了圆的直径和半圆上的点 B(或 C),半圆上的圆周角尚未出现,所以应先将这个圆周角添出,也就是连结 BF(如图 3·63),可得$\angle ABF=90°$.而根据条件$\angle ADC=90°$,这样在$\triangle ABF$和$\triangle ADC$ 中,要证明$\angle BAF=\angle DAC$,就可以转化成要证明$\angle F=\angle C$,而这两个角都是圆周角,且它们所对的弧都是$\overset{\frown}{AB}$,所以由 A、B、F、C 四点共圆,就可以应用圆周角的基本图形性质证得$\angle F=\angle C$,分析就可以完成.

例 18 已知:⊙O、⊙O' 外切于 A,OO' 的延长线交⊙O' 于 P,PB、PC 与⊙O 相切于 B、C.求证:A 是$\triangle PBC$ 的内心.

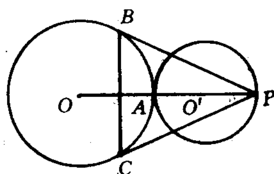


图 3·64

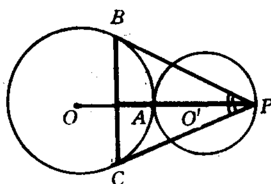


图 3·65

分析:欲证 A 是$\triangle PBC$ 的内心,就应根据三角形内心的定义,证明 A 是$\triangle PBC$ 的两条角平分线的交点.由于 PB、PC 与⊙O 相切于 B、C.且 O、A、O'、P 共线,故应用切线长定理可得 AP 平分$\angle BPC$,从而只须证明 A 也在$\angle PBC$(或$\angle PCB$)的平分线上,于是连结 AB,应证 AB 平分$\angle PBC$(如图 3·65).

又因为条件给出⊙O 和⊙O' 外切于 A,这是两个圆的组合问题,所以可以转化到一个圆中来讨论,而在两圆外切时,转化的方

法是过切点作两圆的内公切线，于是过 A 作两圆的公切线交 PB 于 F(如图 3·66)，可得 $AF\perp OO'$. 而根据切线长定理的推论，又有 $BC\perp OO'$，所以 $FA/\!/BC$，于是又出现了角平分线和平行线的组合关系，所以可得到一个等腰三角形的基本图形. 由于 FA 是角的一边 BC 的平行线，所以它应和角的另一边 BP 以及角平分线 BA 相交组成等腰三角形，于是就可以找到这个三角形应是$\triangle FAB$. 由于现在这条 BA 是$\angle CBP$ 的角平分线是要证明的结论，所以问题就要先证这个三角形是等腰三角形，也就是要证明 $FB=FA$. 由于它们都是由 F 点所作的$\odot O$ 的切线，所以再应用一次切线长定理就能证得这个性质，分析也就可以完成.

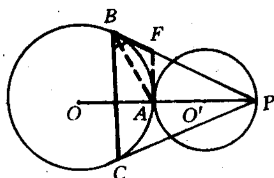


图 3·66

例 19 已知：$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$ 且 $AB=AC$，$\odot O'$ 与$\odot O$ 内切于 D，且与 AB、AC 分别相切于 E、F，I 是 EF 的中点. 求证：I 是$\triangle ABC$ 的内心.

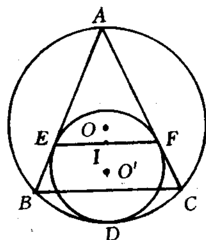


图 3·67

分析：要证明 I 是$\triangle ABC$ 的内心，可根据三角形内心的定义，证明 I 是$\triangle ABC$ 的两条角平分线的交点. 由于条件中出现 AB、AC 与$\odot O'$ 相切于 E、F，所以首先证明 IA 是$\angle BAC$ 的平分线. 于是连结 $O'A$(如图 3·68)，应用切线长定理以其推论可得 $O'A$ 平分$\angle BAC$，且 $AE=AF$，$O'A\perp EF$，且 $O'A$ 过 EF 的中点 I，所以可证明 IA 平分$\angle A$.

接下来就要证明 IB(或 IC)平分$\angle ABC$(或$\angle ACB$)，所以连结 BI. 应证 BI 是$\angle ABC$ 的角平分线. 由于在$\triangle AEF$ 中，已经证

明了 $AI \perp EF$，而在$\triangle ABC$ 中，由 $AB=AC$ 和 $O'A$ 平分$\angle BAC$，就可应用等腰三角形中重要线段的基本图形进行证明，但在$\triangle ABC$ 中，这条$O'A$ 尚未与底边相交，所以应将它们延长到相交，也就是延长 AO' 交 BC 于 G(如图 3·69)，就可得 $AG \perp BC$，$BG=CG$. 从而可推得 $EI // BC$，这样就出现了角平分线和平行线的组合关系，也就必定会出现一个等腰三角形的基本图形. 由于 EI 是角的一边 BC 的平行线，所以它必定要和角的另一边 BE 以及角平分线 BI 相交组成等腰三角形，这样我们就能找到这个三角形应是$\triangle EBI$. 由于现在 BI 是角平分线是要证明的结论，所以就要先证明这个三角形等腰，也就是要证 $EB=EI$.

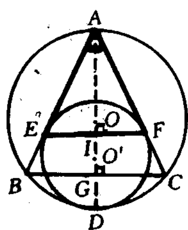


图 3·68

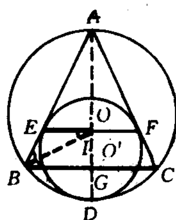


图 3·69

在上述分析中，由于得到了 $AG \perp BC$，$BG=CG$，所以 AG 就是 BC 的垂直平分线，而已知 O 是$\triangle ABC$ 的外心，那么 AG 必定经过 O 点，这样 AG 实质上就成为两圆的连心线，而已知$\odot O$ 和$\odot O'$ 在 D 点内切，所以 AG 的延长线必定经过 D 点，AD 就是$\odot O$ 的直径.

由于现在出现了 AD 是$\odot O$ 的直径，所以就要应用直径的性质，也就是可应用半圆上的圆周角的基本图形进行证明. 现在图形中有直径，有半圆上的点 B，而没有圆周角，所以应先将圆周角添出，于是连结 DB，得$\angle ABD=90°$. 而前面已证$\angle EID=90°$，这样要证明相等的这两条相等的线段 EB 和 EI 就成为点 E 到$\angle BDI$ 的两边的距离，也就出现了要证明相等的这两条线段 EB 和 EI 是关于$\angle BDI$ 的平分线成轴对称的，从而就可以添加一对轴对称型的全等三角形进行证明。由于这一对轴对称型全等三角形的基本

图形中尚缺少对称轴，所以应先将对称轴添上，也就是连结 DE（如图 3·70），问题就应证明$\triangle DBE$ 和$\triangle DIE$ 全等. 由于 $DE=DE$，且已经证明$\angle DBE=\angle DIE=90°$，所以还需要一个条件. 由于 BE 是$\odot O'$ 的切线，所以就可以应用弦切角的性质，而 ED 是过切点的弦，所以$\angle BED$ 就是一个弦切角，而它的对应角$\angle IED$ 是$\odot O'$ 的一个圆周角，这样问题就成为要证这两个角相等，而要证这两个角相等，又可以转化成为要证明它们分别所夹的弧和所对的弧相等，即要证$\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{DF}$，由 $AD\perp EF$，应用垂径定理就可证明上述性质，分析就可完成.

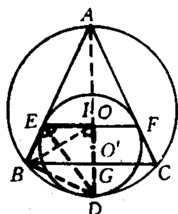


图 3·70

例 20 已知：$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，$\odot O'$ 与$\odot O$ 内切于 D，且$\odot O'$ 分别与 AB、AC 相切于 E、F，I 是 EF 的中点.

求证：I 是$\triangle ABC$ 的内心.

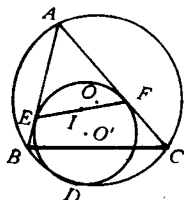


图 3·71

分析：本题要证明 I 是$\triangle ABC$ 的内心，根据三角形内心的定义，就应证明它是这个三角形的两条角平分线的交点.

由条件 AB、AC 与$\odot O'$ 相切于 E、F，所以可应用切线长定理及其推论，于是连结 $O'A$，则 $O'A$ 平分$\angle BAC$，且 $O'A$ 经过 I，从而就证明了 IA 是$\angle BAC$ 的角平分线（如图 3·72）.

接下来的问题就是要证明 BI 是$\angle ABC$ 的角平分线，于是连结 BI（如图 3·73），应证$\angle ABI=\angle CBI$.

而在证明了$\angle O'AB=\angle O'AC$后，由于这两个角都是$\odot O$ 的圆周角，所以可应用圆周角的基本图形性质进行证明. 由于这两个圆周角的一条公共的边 AO' 尚未与$\odot O$ 相交，所以应首先延长到

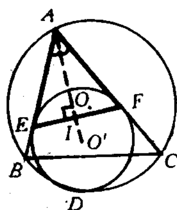


图 3・72

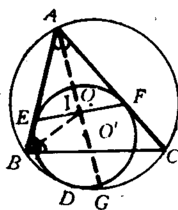


图 3・73

相交，也就是延长 AO' 交⊙O 于 G. 可得 G 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点（如图 3・74）. 现在⊙O 上已经出现了四点，即 A、B、G、C，所以进一步再连结 GB 后，可得 $\angle GBC=\angle GAC=\frac{1}{2}\angle BAC$.

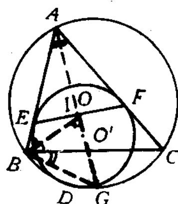


图 3・74

由于 G 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，如果 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，则必有 $GI=GB$，现在的问题则是倒过来，也就是要证明 $\angle ABI=\angle CBI$，就可转化为要证 $GI=GB$. 对这一部分内容的详细分析可以是这样：要证明 $\angle ABI=\angle CBI$，从图形中我们可以看到根据角的和的定义，有 $\angle GBI=\angle CBI+\angle GBC$，而由 A、I、G 成一直线，又出现了 $\angle GIB$ 是 $\triangle ABI$ 的外角，所以 $\angle GIB=\angle ABI+\angle BAI$. 而 $\angle GBC=\angle GAC=\angle BAI=\frac{1}{2}\angle BAC$，所以问题转化成为要证 $\angle GBI=\angle GIB$，进一步就是要证 $GI=GB$. 由于从图形中可以看出 $GI=O'I+O'G$，所以可分别讨论与 $O'I$ 和 $O'G$ 有联系的数量关系.

由条件 AB 与⊙O' 相切于 E，应用切线的性质，就可以想到连结 $O'E$ 后有 $\angle O'EA=90°$，而应用切线长定理及其推论已经得到 $\angle EIA=90°$，所以 EI 就成为 $Rt\triangle O'AE$ 的斜边上的高（如图 3・75），那么应用直角三角形斜边上的高的基本图形性质可得 $O'E^2=O'I\cdot O'A$. 为了表述的清晰，也可以设⊙O、⊙O' 的半径分别为

R、r，则有 $r^2=O'I\cdot O'A$.

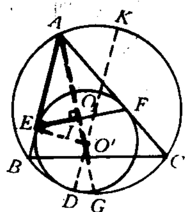


图 3・75

又因为条件中给出⊙O、⊙O' 内切于 D，应用两圆内切的性质，可知 O、O'、D 三点在一直线上，所以应将这条直线添出，也就是连结 OD，则 OD 必定过 O'，且延长 DO 交⊙O 于 K，则 DK 为⊙O 的直径，$DK=2R$. 这样 AG 和 DK 就是⊙O 的两条相交于 O' 点的弦，于是就可应用相交弦定理，得 $O'G\cdot O'A=O'D\cdot O'K=r\cdot O'K$. 由于我们需要的是 $O'I+O'G$，所以应考虑将上述两式加起来，可得 $O'I\cdot O'A+O'G\cdot O'A=r^2+r\cdot O'K$，$O'A(O'I+O'G)=r(r+O'K)$，$O'A\cdot GI=r\cdot 2R$（这是因为 $r+O'K=O'D+O'K=DK=2R$），$GI=\dfrac{2Rr}{O'A}$. 于是接下来的问题就是要证 $GB=\dfrac{2Rr}{O'A}$.

由于式中的 r 和 $O'A$ 可以看作是一个直角△$O'AE$ 的直角边 $O'E$ 和斜边，所以式中的 GB 和 $2R$ 也应成为一个与这个三角形相似的直角三角形的直角边和斜边，于是过 BG 的端点 G（或 B）作直径 GH，并连结 BH. 则由于 GH 是⊙O 的直径，可得 $\angle GBH=90°$，$\angle GBH=\angle O'EA$，而由 A、B、G、H 四点共圆，又可得 $\angle GHB=\angle O'AE$，所以△GHB∽△$O'AE$，从而就有 $\dfrac{BG}{EO'}=\dfrac{GH}{O'A}$，即可得 $GB=\dfrac{2Rr}{O'A}$，分析就可以完成（如图 3・76）.

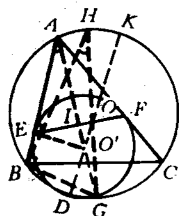


图 3・76

例 21 已知：△ABC 中，$\angle C=90°$，M 是 AB 的中点，$MD\perp AB$ 且交 $\angle ACB$ 的角平分线于 D.

求证：$MD=MC$.

分析:本题要证明的结论 $MD=MC$ 是两条具有公共端点的相等线段,所以它们可以组成一个等腰三角形(如图 3·78),问题就成为一个等腰三角形的判定问题,也就是问题应转化为证 $MD=MC$ 的等价性质 $\angle D=\angle MCD$.

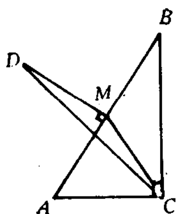


图 3·77

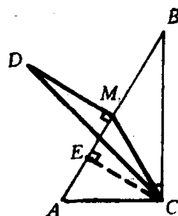


图 3·78

由于 $\angle D$ 除了是 $\triangle MDC$ 的一个内角以外,与 $\angle MCD$ 没有其它的位置关系,所以不易直接建立它们之间的等量关系,在这种情况下就应考虑将 $\angle D$ 改变位置. 由于在条件中 $\angle D$ 尚没有直接与圆发生关系,所以首先可考虑将 $\angle D$ 进行平移,实质上就是作 DM 的平行线,当然所作的平行线只要一越过 CD 与 AB 的交点,在平

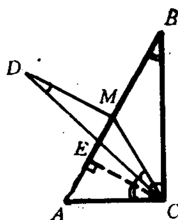


图 3·79

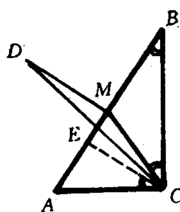


图 3·80

移中的 $\angle D$ 的同位角就会转化成内错角. 然而在我们作平行线的时候,就会立即发现这时图形中出现了等腰三角形和平行线的组合关系,于是就必定会出现一个角的角平分线,因而这条平行线就

必须过 C 点作，也就是过 C 作 $CE /\!/ MD$ 交 AB 于 E（如图 3·79），那么由 $\angle D=\angle ECD$，可知问题转化成应证 $\angle ECD=\angle MCD$，由已知条件 $\angle ACD=\angle BCD$，问题又进一步转化成要证 $\angle ACE=\angle BCM$.

根据前述的作图 $CE /\!/ MD$，而已知 $MD\perp AB$，所以就有 $CE\perp AB$，CE 就成为直角三角形斜边上的高，这样就可以应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质得 $\angle ACE=\angle B$，问题就成为要证 $\angle BCM=\angle B$.

根据条件 M 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 AB 的中点，所以可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明，从而就可得 $MC=MB=\frac{1}{2}AB$，$\angle MCB=\angle B$，分析就可以完成.

本题也可以从另一种可能性出发进行分析：本题要证明 $MD=MC$，由于 M 是斜边 AB 的中点，所以可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质得 $MC=MA=MB$，这样就出现了 D 和 A、C、B 这四个点应在同一个圆上（如图 3·81）. 这个圆就是 $\triangle ABC$ 的外接圆，也就是以 M 为圆心、以 MA 的长为半径的圆. 在这个圆中，$\angle ACD$ 和 $\angle BCD$ 是两个相等的圆周角，所以它们所对的弧相等，因此 CD 与 $\angle ACB$ 所对的 $\overset{\frown}{AB}$（实质上就是半圆）的交点就是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，也就是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点必定在 CD 上. 另一方面 $MD\perp AB$，且 $MA=MB$，所以 MD 与 $\overset{\frown}{AB}$ 的交点也是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，也就是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点也必定在 MD 上. 根据以上这两个性质可得 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点就是 CD 和 MD 的交点 D，所以就有 $MD=MC$.

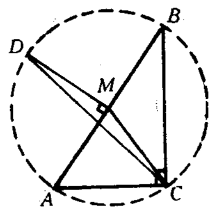


图 3·81

例 22 已知：矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于 O，$CE\perp BD$ 垂足是 E，$\angle BAD$ 的角平分线交 EC 的延长线于 F. 求证：

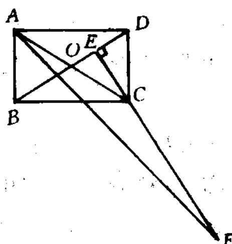


图 3・82

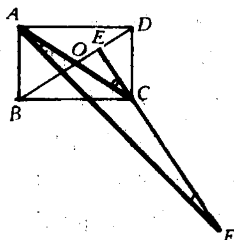


图 3・83

$AC=FC$.

分析:本题要证明 $AC=FC$,这是两条具有公共端点的相等线段,所以它们可以组成一个等腰三角形,这就成为一个等腰三角形的判定问题.又因为已知 E、C、F 成一直线,图形中出现了这个要证明的等腰三角形的顶角的外角,所以问题就成为要证 $AC=FC$ 的等价性质$\angle ECA=2\angle F$(如图 3・83).

现在要证明一个角是另一个角的两倍,就可以根据角的倍半关系的定义,将大的角两等分,也就是作$\angle ECA$ 的角平分线交 BD 于 G(如图 3・84)后,应证$\angle GCE=\angle F$.由于我们作出了一条角平分线,而要证明的是一个等腰三角形,所以就出现了角平分线和等腰三角形的组合关系,从而就一定出现一组平行线,所以问题实质上就成为要证 $CG/\!/FA$.由于 CG、FA 这一组要证明的平行线,也可以看作是被 BC 所截,所以问题就成为要证$\angle AHB=\angle GCB$.

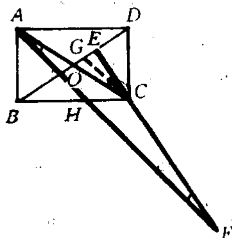


图 3・84

由条件四边形 $ABCD$ 是矩形,$AD/\!/BC$ 和 AH 平分$\angle BAD$,可得$\angle AHB=\angle HAD=\frac{1}{2}\angle BAD=45°$,所以问题就是要证

$\angle GCB$ 也是 45°，就是要证 $\angle GCB = \angle GCD$. 由于我们已经作出 $\angle GCO = \angle GCE$，所以问题又成为要证 $\angle BCO = \angle DCE$. 由条件 $CE \perp BD$，CE 就是直角 $\triangle BDC$ 的斜边上的高（如图 3·85），应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质可得 $\angle DCE = \angle DBC$，而应用矩形的性质又可得 $OB = OC$，$\angle OBC = \angle BCO$，所以 $\angle BCO = \angle DCE$ 可以证明，从而可完成分析.

图 3·85

第三节　等腰三角形中的重要线段

【分析方法导引】

当几何问题中出现了等腰三角形中的下列三条件之一：顶角的角平分线，底边上的高，底边的中点或出现了一线段（将其看作是某三角形的一条边）上的高、中线或所对角的角平分线中的两条重合在一起时，就可以想到要应用等腰三角形中重要线段的基本图形进行证明. 这时总共可出现六种可能情况，就可按每一种情况分别讨论完成基本图形的添加. 接下来就可以根据基本图形的四个基本性质所具有的两两等价性完成分析. 即在这四个基本性质中，只要有两个成立，就必定可以推得另外两个成立. 在分析中一般的情况是，四个性质中有一个是要证明的结论，有一个是已经给出的条件，从而要证明结论成立，就应转而证明另外两个性质中的一个，只要其中

的一个性质获证，那就可以根据两两等价性推得结论成立. 由于在上述分析过程中要在两个性质中选择证明一个，所以必然也就出现了分析上的两种可能性.

例 23 如图 3·86，已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，CD 是边 AB 上的高.

求证：$\angle BCD=\frac{1}{2}\angle A$.

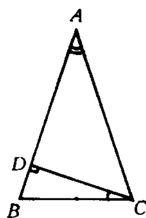


图 3·86

分析：本题要证明的结论 $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle A$，是两个角之间的倍半关系，所以可以根据两个角的倍半关系的定义将大的角两等分后，证明大的角的一半和小的角相等，于是可作 $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于 E（如图 3·87），问题就转化为应证 $\angle BAE=\angle BCD$.

然而在作出了 $\angle BAC$ 的角平分线 AE 后，由于已知 $AB=AC$，所以就出现了 AE 是等腰 $\triangle ABC$ 的顶角的平分线，所以就可以应用等腰三角形中的重要线段这个基本图形的性质得 $AE\perp BC$，进一步又可得 $\angle BAE+\angle B=90°$，而由 $CD\perp AB$，还可得 $\angle BCD+\angle B=90°$，所以 $\angle BAE=\angle BCD$ 就可以证明.

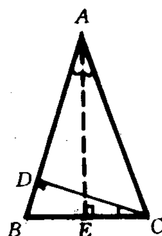


图 3·87

在上述分析中，在得到 $AE\perp BC$，$\angle AEC=90°$后，也可以再由 $AB\perp DC$，$\angle ADC=90°$，得 A、D、E、C 四点共圆，那么应用圆周角的基本图形的性质，也可以直接推得 $\angle BAE=\angle BCD$.

本题在根据两个角的倍半关系的定义进行分析时，也可以考虑另一种可能性，就是作出小的角的两倍角，再证明所得到的角和大的角相等，于是作 $\angle BCE=\angle BCD$，然后就要证明 $\angle DCE=$

$\angle A$. 在作$\angle BCE=\angle BCD$时，当然会遇到一个问题，就是CE应作多长？由于$\angle BCE$和$\angle BCD$是关于BC成轴对称的，所以可添加一对轴对称型的全等三角形进行证明，于是根据图形的轴对称性可取$CE=CD$. 这样又出现了它们是两条具有公共端点的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，而这个等腰三角形目前只有两条腰，而没有底边，所以应将底边添上，也就是连结DE（如图3·88）. 这样在这个等腰$\triangle CDE$中，又出现了CB是顶角的角平分线，所以就可以应用等腰三角形中的重要线段的基本图形，实质上也就是一对轴对称型的全等三角形的性质进行证明，于是就可以由$CD=CE$和$\angle DCB=\angle ECB$，并设DE与BC的交点为F后，推得$CF\perp DF$. 再由条件$\angle CDB=90°$，所以DF就是直角$\triangle BCD$的斜边上的高，应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，可得$\angle CDF=\angle B$，那么在$\triangle ABC$和$\triangle CDE$中，首先它们都是等腰三角形，且它们的底角（$\angle CDF$和$\angle B$）相等，所以它们的顶角也必定相等，分析即可完成.

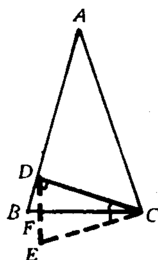


图 3·88

例 24 如图 3·89，已知：$\square ABCD$中，以A为圆心，AB的长为半径作$\odot A$交BC、AD于E、F，交BA的延长线于G，EG交AD于H.

求证：$EH=GH$.

分析：本题的条件中出现了BG是$\odot A$的直径，所以就想到要应用直径的性质，也就是半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明，于是就可得$\angle BEG=90°$. 而已知四边形$ABCD$是平行四边形，$AD\parallel BC$，所以$\angle AHG=\angle BEG=90°$. 而现在要证的结论

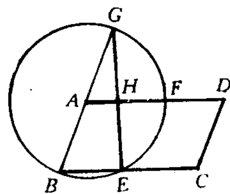


图 3·89

是 $EH=GH$，出现了 EG 边上的高和中线重合，也就是出现了线段 EG 的垂直平分线，所以可添加等腰三角形中的重要线段这个基本图形进行证明，添加的方法是将等腰三角形的腰添上，于是连结 AE（如图 3·90），由于 AE 和 AG 都是⊙A 的半径，所以 $AE=AG$，再加上 $AH\perp EG$，当然就可以推得 $EH=GH$.

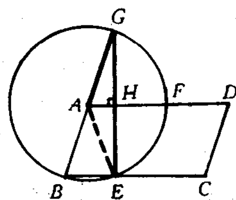


图 3·90

本题的分析也可以从已知的圆的条件开始，因为圆内不在一直线上的两条半径可以组成一个等腰三角形，同时在图形中过 E 点的半径尚未出现，所以可首先将半径 AE 添上（如图 3·91），这样 AB 和 AE 这两条半径就成为由同一点 A 发出的两条相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，又因为条件中给出 $AD/\!/BC$，就构成了等腰三角形和平行线的组合关系，这样就必然会出现角平分线，于是由 $AB=AE$，得$\angle B=\angle AEB$，由 $AD/\!/BC$，得 $\angle B=\angle GAD$，$\angle AEB=\angle EAD$，从而进一步推得 $\angle GAD=\angle EAD$. 又因为 AG 和 AE 也是同圆的两条半径，它们也可以组成等腰$\triangle AEG$，而 AH 是顶角的角平分线，所以应用等腰三角形中重要线段的基本图形性质也就可以证明 $EH=GH$.

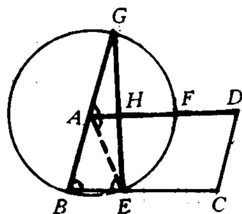


图 3·91

例 25　如图 3·92，已知：▱$ABCD$ 中，$AD=2AB$，$CE\perp AB$，垂足是 E，F 是 AD 的中点. 求证：$\angle EFD=3\angle AEF$.

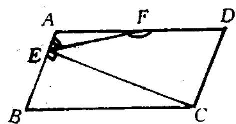


图 3·92

分析：本题要证明的结论$\angle EFD=3\angle AEF$ 是两个角之间的三倍角关系，所以可根据角的三倍关系的

定义，将大的角，即$\angle EFD$三等分，然后证明其中的一个角与$\angle AEF$相等. 在具体等分时，可逐次进行. 于是先作$\angle EFG=\angle AEF$且交EC于G（如图3·93），由于这两个角可以看作是AB、FG被EF所截得到的一组内错角，所以就可得$FG /\!/ AB$，而已知$AB\perp EC$，就可推得$FG\perp EC$.

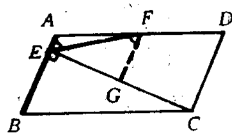


图3·93

在得到了$FG /\!/ AB$后，由条件$AB /\!/ DC$和F是AD的中点，就出现了FG应是梯形$AECD$的中位线，于是就可由$FG /\!/ AB$和$AF=DF$推得$EG=CG$，但我们已有$FG\perp EC$，这样就出现了一边EC上的高和中线重合的条件，所以就可应用等腰三角形中的重要线段的基本图形的性质进行证明. 由于这个等腰三角形的一条腰尚未出现，所以应先将这条腰添上，也就是连接FC（如图3·94），即可得$FE=FC$，$\angle CFG=\angle EFG$. 这样实际上我们已证明了$\angle EFC$是$\angle AEF$的两倍，所以接下来的问题就是要证明剩下来的这个角$\angle CFD$也等于$\angle AEF$.

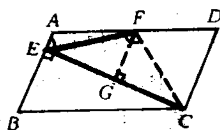


图3·94

现在的问题实质上也就是要证$\angle CFD=\angle CFG$，也就是FC是$\angle DFG$的角平分线. 由于我们已经证明$FG /\!/ DC$，所以在这里又出现了一次角平分线和平行线的组合关系，所以必定出现一个等腰三角形的基本图形，由于$DC /\!/ FG$是角的一边的平行线，所以它应和角的另一边以及角平分线相交组成等腰三角形，于是就可找到这个等腰三角形应是$\triangle DFC$（如图3·95）. 而现在FC是$\angle DFG$的角平分线是要证明的结论，所以就要先证明这个三角形是等腰三角形，也就是要证明$DF=DC$，由条件$AD=2AB=$

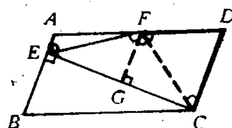


图3·95

$2DC$，且 F 是 AD 的中点，$AD=2DF$，所以 $DF=DC$ 可以证明，分析也就能够完成.

例 26 如图 3·96，已知：AB、CD 是 $\odot O$ 的直径，$AB\perp CD$，E 是 $\overset{\frown}{AD}$ 上的一点，F 是 OD 上的一点，$EF=EO$，EF、EO 的延长线交 $\odot O$ 于 G、H. 求证：$\overset{\frown}{BG}=3\overset{\frown}{BH}$.

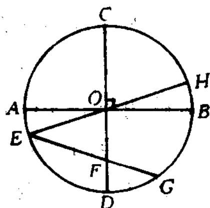


图 3·96

分析：本题要证明的是两条弧之间的倍数（数量）关系，解决弧之间的数量关系的基本方法是将问题转化成与圆有关的角之间的数量关系来讨论.

由于 $\overset{\frown}{BH}$ 所对的圆心角是 $\angle BOH$，所以对 $\overset{\frown}{BG}$ 也可讨论相应的圆心角，而这个圆心角在图形中尚未出现，因此就应先将这个圆心角添上，也就是连结 OG（如图 3·97），这样问题就转化为要证明 $\angle BOG=3\angle BOH$.

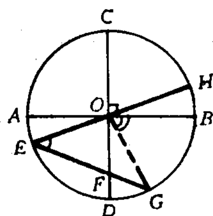


图 3·97

在连结了 OG 后，由于 OG 和 OE 是同圆的两条半径，是两条具有公共端点 O 的相等线段，所以它们可组成一个等腰三角形. 又因为 E、O、H 成一直线，出现了这个等腰三角形的顶角的外角，所以应用等腰三角形的基本图形的性质可得 $\angle GOH=2\angle OEF$，由于这里出现了 $\angle GOH$，所以要证明的结论也可转化成 $\angle GOH$ 的关系式，也就是 $\angle GOH=4\angle BOH$，比较这两个关系式，可知问题就转化为要证 $\angle OEF=2\angle BOH$. 这是两个角之间的倍半关系，所以可根据两个角的倍半关系的定义，将大的角二等分以后，证明它的一半和小的角相等. 于是作 $\angle OEF$ 的平分线 EM 交 OD 于 M（如图 3·98），然后应证 $\angle OEM=\angle BOH$. 而在作了 $\angle OEF$ 的角平分线以后，由

于条件中给出了 $EF=EO$，所以就出现了等腰三角形的顶角的平分线，从而就可以应用等腰三角形中重要线段这个基本图形的性质进行证明，于是由 $EF=EO$ 和 EM 平分 $\angle OEF$，即可推得 $EM\perp OD$，而已知 $AB\perp CD$，所以 $EM\parallel AB$. 而现在要证明相等的这两个角，即 $\angle OEM$ 和 $\angle BOH$ 是 EM 和 AB 这一组平行线被 EH 所截得到的一组同位角，当然相等，所以分析可以完成.

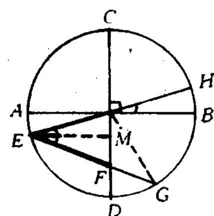


图 3・98

本题由于条件给出 AB、EH 都是直径，所以 $\angle AOE=\angle BOH$，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BH}$，所以问题也可转化为证 $\overset{\frown}{BG}=3\overset{\frown}{AE}$. 由于 $\overset{\frown}{AE}$ 所对的圆心角 $\angle AOE$ 已经出现，所以也应将 $\overset{\frown}{BG}$ 所对的圆心角作出，于是连结 OG，那么问题就转化为应证 $\angle BOG=3\angle AOE$.

由条件 A、O、B 成一直线，$\angle BOG$ 可以看成是一个三角形的外角，但图形中这个三角形尚不完整，所以应先将三角形添出，也就是延长 GE 交 OA 的延长线于 K（如图 3・99），即可得 $\angle BOG=\angle G+\angle K$. 又因为已知 $EF=EO$，且 $\angle KOF=90°$，所以 OE 就应是直角三角形 KFO 的斜边上的中线，于是就可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明. 也就是由 $EF=EO$，可得 $\angle EFO=\angle EOF$，又因为 $\angle KOF=90°$，又可得 $\angle K=\angle EOA$，$EK=EO$，$\angle FEO=2\angle K$.

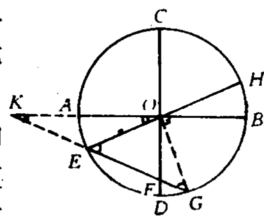


图 3・99

又因为 OK 和 OE 是 $\odot O$ 的两条半径，它们可以组成一个等腰三角形，应用等腰三角形的性质又可得 $\angle G=\angle GEO$，从而就可

得$\angle BOG=\angle G+\angle K=\angle GEO+\angle K=2\angle K+\angle K=3\angle K$
$=3\angle AOE$.

例 27 如图 3·100，已知：XY 是⊙O 外一直线，$OA\perp XY$，垂足是 A，过 A 作⊙O 的割线交⊙O 于 B、C，过 B、C 分别作⊙O 的切线交 XY 于 D、E. 求证：$AD=AE$.

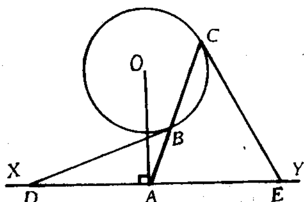


图 3·100

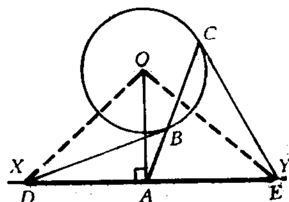


图 3·101

分析：由结论 $AD=AE$ 和条件 $OA\perp DE$，就出现了边 DE 上的高和中线重合的关系，从而就可应用等腰三角形中重要线段这个基本图形的性质进行证明. 应用或添加的方法是将等腰三角形的腰添上，于是连结 OD、OE（如图 3·101），问题就成为要证明 $OD=OE$ 或 $\angle DOA=\angle EOA$.

若考虑证明 $OD=OE$，则由于条件中还出现 BD、CE 是⊙O 的切线，故要应用切线的性质，但现在图形中，过切点的半径尚未作出，所以首先应将半径添上，于是连结 OB、OC（如图 3·102），可得 $\angle OBD=\angle OCE=90°$，而 OB、OC 都是⊙O 的半径，当然相等，所以就出现了由同一点 O 发出的两组相等线段，当

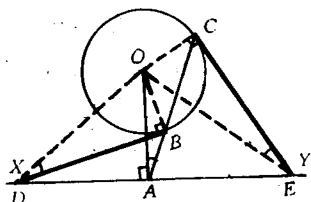


图 3·102

它们两两交成等角时，就会出现一对旋转型全等三角形．由于它们两两组成$\triangle ODB$和$\triangle OEC$，在这两个三角形中，已经出现了$\angle OBD=\angle OCE=90^\circ$，所以这两个三角形必定全等．而要证明这两个三角形全等，还需要证明一组对应边或对应角相等．由于一对旋转型全等三角形必定同时出现两个圆内接四边形，所以可先考虑证明一组对应角相等．于是由$\angle OCE=90^\circ$和条件中给出的$\angle OAE=90^\circ$，可得O、A、E、C四点共圆（如图3·103），$\angle OEC=\angle OAC$，根据类似的道理，由$\angle OBD=\angle OAD=90^\circ$，可得$O$、$D$、$A$、$B$四点共圆，$\angle ODB=\angle OAB$，从而就可以证明$\angle ODB=\angle OEC$，分析也就完成．

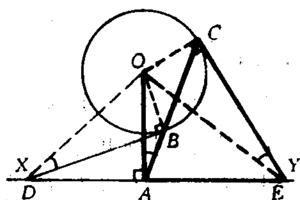


图3·103

在证明$OD=OE$时，也可以作为一个等腰三角形的判定问题，而转化为证明$OD=OE$的等价性质$\angle ODE=\angle OED$．这样由条件中出现的两条切线，就可以应用切线的性质连结OB、OC后，可得$\angle OBD=\angle OCE=90^\circ$，并进一步可得$O$、$A$、$E$、$C$四点共圆，$\angle OEA=\angle OCA$和$O$、$D$、$A$、$B$四点共圆，$\angle ODA=\angle OBC$，但$\angle OCA$和$\angle OBC$是等腰$\triangle OBC$的两个底角，当然相等，所以$\angle ODE=\angle OED$也就可以证明（如图3·104）．

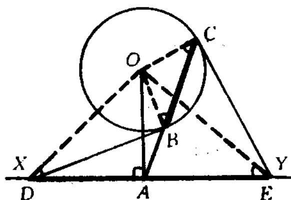


图3·104

若考虑证明$\angle DOA=\angle EOA$，则由条件中出现的切线想到要应用切线的性质，于是连结OB、OC后，可得$\angle OCE=\angle OAE=90^\circ$，$O$、$A$、$E$、$C$四点共圆，$\angle EOA=\angle ECA$和$O$、$D$、$A$、$B$四点共

圆，$\angle DOA=\angle DBA$，这样问题就转化成要证$\angle ECA=\angle DBA$，由条件EC与$\odot O$相切于C，CB是过切点的弦，$\angle ECB$是弦切角，而且DB与$\odot O$相切于B，BC也是过切点的弦，$\angle DBA$的补角是弦切角，所以$\angle DBA$的对顶角也是弦切角，于是延长DB交EC于F，则$\angle FBC=\angle DBA$，而$\angle FBC$和$\angle FCB$是夹同一条弧即$\overset{\frown}{BC}$的弦切角，当然相等，分析即可完成(如图3·105).

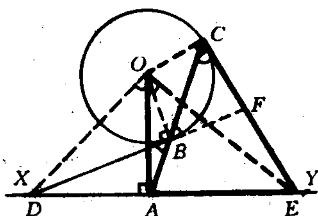


图3·105

例28 如图3·106，已知：AB是$\odot O$的直径，CD是弦，且$CD\perp AB$垂足是E，F是CA的延长线上一点，且$AF=AC$. 求证：$CF\cdot CA=AB\cdot DF$.

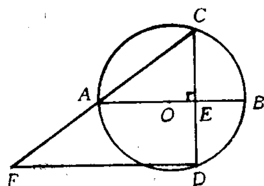


图3·106

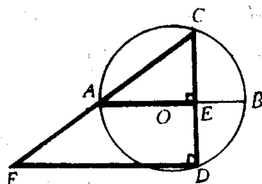


图3·107

分析：本题的条件中出现了AB是$\odot O$的直径，CD是弦且$CD\perp AB$，所以就可应用垂径定理得$CE=DE$.

又因为条件中还出现A是CF的中点，这样就出现了两个中点，是多个中点问题，就可以应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明(如图3·107)，于是就可得$AE/\!/FD$.

再由条件AB是$\odot O$的直径，C是半圆上的一点，就可以应用直径所对的圆周角的基本图形的性质进行证明，但图形中这个半

圆上的圆周角尚未出现，所以应先将这个圆周角添出，也就是连结 BC，可得$\angle ACB=90°$(如图 3・108).

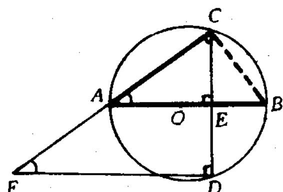


图 3・108

由于我们要证明的结论 $CF\cdot CA=AB\cdot DF$，经过描图以后，我们可以发现它们两两组成$\triangle ACB$ 和$\triangle FDC$，且结论就是它们的对应边之间的比例关系，所以问题可转化为证明这两个三角形相似. 由我们已经证明的性质 $AB /\!/ FD$，可得$\angle CAB=\angle DFC$，$\angle CDF=\angle CEA=90°$，所以$\angle ACB=\angle FDC=90°$，从而就可以证明$\triangle ACB\backsim\triangle FDC$，分析就可以完成.

例 29 如图 3・109，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，以 AC 为直径的$\odot O$ 交 AB 于 D，$DE /\!/ CA$ 交$\odot O$ 于 E，$EF\perp AC$ 交$\odot O$ 于 F. 求证：$AF^2=AD\cdot BD$.

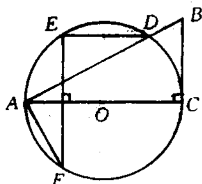


图 3・109

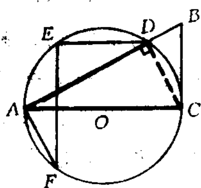


图 3・110

分析：本题条件中出现 AC 是$\odot O$ 的直径，D 是半圆上的点，所以可应用直径所对的圆周角的基本图形的性质进行证明. 由于图形中尚未出现这个圆周角，所以应先将这个圆周角添出，也即连结 CD(如图 3・110)，就可得$\angle CDA=90°$.

由条件$\angle ACB=90°$，这样就出现了 CD 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边上的高，从而就可以应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性

质进行证明(如图 3·111).于是应用射影定理可得 $CD^2=AD\cdot BD$,将这一性质与结论进行比较,可得问题就转化为要证 $AF=CD$.

由条件 AC 是$\odot O$ 的直径,EF 是弦且 $EF\perp AC$,出现了垂直于弦的直径,所以就可以应用垂径定理得$\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{AE}$,由条件 $DE\parallel CA$,又可得$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}$,所以$\overset{\frown}{AF}$就和$\overset{\frown}{CD}$相等,也就可以证明 $AF=CD$.

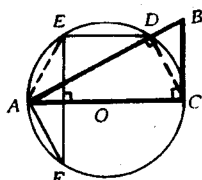


图 3·111

第四节　角平分线和垂线的组合图形

【分析方法导引】

当几何问题中,出现了角平分线和向角平分线所作的垂线的时候,就要想到可应用等腰三角形中重要线段的基本图形进行证明.

若角平分线的垂线没有过角的顶点时,可直接将角平分线的垂线延长到与角的两边相交,构成等腰三角形中重要线段的基本图形,然后再应用一次轴对称型全等三角形来完成分析.

若角平分线的垂线经过角的顶点时,则应将角平分线的垂线作平行移动,使它离开角的顶点,然后再与角的两边相交构成等腰三角形中的重要线段的基本图形.

例 30　如图 3·112,已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle A=90^\circ$,$AB=AC$,BD 是角平分线,$CE\perp BD$ 垂足是 E.求证:$BD=2CE$.

分析:本题的条件中出现了 BD 是角平分线和 $CE\perp BD$,就构成了角平分线和向角平分线所作的垂线之间的组合关系,所以必

定构成一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的，而现在这条角平分线的垂线 CE 还仅仅是和角的一边 BC 相交，所以应将它延长到和另一边 BA 也相交，于是延长 CE 交 BA 的延长线于 F(如图 3・113)，即可得$\triangle BFE\cong\triangle BCE$，$FE=CE$. 而问题要证明的结论是 $BD=2CE$，而现在已经得到的是 $FC=2CE$，所以问题就成为要证 $BD=CF$.

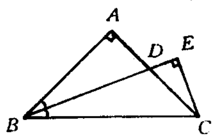


图 3・112

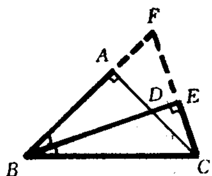


图 3・113

由于现在这两条要证明相等的线段 BD 和 CF 可以分别看作是 $Rt\triangle BDA$ 和 $Rt\triangle CFA$ 的斜边，且已知这两个直角三角形的一条直角边 BA 和 CA 是相等的，所以这两个三角形必定全等(如图 3・114). 当然在证明这两个三角形全等时，$BD=CF$ 这一性质是不能用的，所以还要另外证明一个性质. 由于条件给出了$\angle BEA=90°$，所以$\angle DBA+\angle F=90°$，同样道理由$\angle CAF=90°$，可得$\angle FCA+\angle F=90°$，从而可推得$\angle DBA=\angle FCA$，这两个三角形全等就可以证明，分析也就完成.

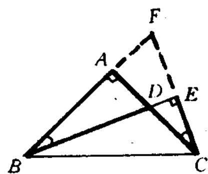


图 3・114

例 31 如图 3・115，已知：$\triangle ABC$ 中，BD、CE 是角平分线，$AF\perp CE$、$AG\perp BD$，垂足分别是 F、G.

求证：(1)$FG/\!/BC$；(2)$FG=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

分析：本题条件中出现了两条角平分线和两条角平分线的垂线，所以它们就构成了角平分线和向角平分线所作的垂线之间的

组合关系，也就必定得到一个等腰三角形的基本图形. 找这个等腰三角形的方法是将角平分线的垂线延长到和角的两边相交.

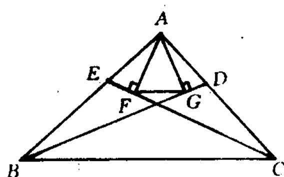


图 3・115

如果我们先讨论角平分线 BD 和 BD 的垂线 AG，那么延长 AG 交 BC 于 H 后，就可得 $\angle BAH=\angle BHA$，$BA=BH$ 和 $AG=HG$. 根据同样的道理，延长 AF 交 BC 于 K 后，可得 $AC=KC$，$AF=KF$（如图 3・116）.

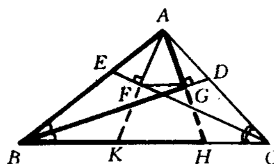


图 3・116

现在由 G 是 AH 的中点和 F 是 AK 的中点，就出现了两个中点，是多个中点问题，就可以应用三角形中位线的基本图形进行证明. 由于已知中点 F、G 所在的线段 AK、AH 有公共端点 A，可以组成$\triangle AKH$，所以 FG 这两个中点的连线就是这个三角形的中位线，所以就得到 $FG\parallel KH$，$FG=\frac{1}{2}KH$. 由此即可证明 $FG\parallel BC$. 对于第二个结论可与上述等量关系进行比较，可知问题就是要证 $AB+AC-BC=KH$，由于 $AB+AC-BC=BH+CK-BC=BH+(KH+CH)-BC=(BH+CH)+KH-BC=KH$，所以分析可以完成.

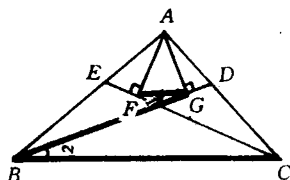


图 3・117

对于这个问题的第一个结论，由于这是两条平行线的判定问题，从而可以应用平行线的基本图形的性质进行证明. 由 FG、BC 被 BD（或 CE）所截，问题就可证$\angle 1=\angle 2$（如图 3

·117).

若设 BD、CE 的交点为 I，则由条件 $\angle AFI=\angle AGI=90°$，可得 A、F、I、G 四点共圆，于是就可应用圆周角的基本图形的性质进行证明，所以连结 AI(如图 3·118)，即可得 $\angle1=\angle3$，这样问题就转化成为要证明 $\angle2=\angle3$.

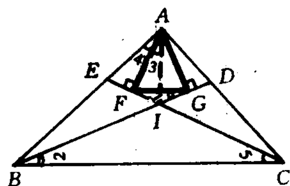


图 3·118

由条件 BD、CE 是角平分线，所以 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，AI 就成为 $\angle BAC$ 的平分线，$\angle3$ 就成为 $\angle BAI$ 也就是 $\frac{1}{2}\angle A$ 的一部分，而 $\angle2$ 又是 $\frac{1}{2}\angle B$，所以想到要应用三角形的三个内角的半角关系来进行分析. 于是就有 $\angle2+(\angle3+\angle4)+\angle5=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C=90°$，从而应证明的结论 $\angle2=\angle3$ 就可以转化为要证明 $2\angle2+\angle4+\angle5=90°$. 而由条件 $AF\perp CE$，所以 $\angle4+\angle AEF=90°$，比较这两个关系，可得问题成为要证 $2\angle2+\angle5=\angle AEF$. 由于 A、E、B 成一直线，$\angle AEF$ 可以看成是 $\triangle BEC$ 的一个外角，所以应用三角形外角定理即可证明 $\angle AEF=\angle EBC+\angle ECB=2\angle2+\angle5$，分析就可以完成.

例 32 如图 3·119，已知：BD、CE 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$、$\angle C$ 的外角平分线，$AF\perp BD$、$AG\perp CE$，F、G 是垂足.

求证：(1) $FG\parallel BC$；(2) $FG=\frac{1}{2}\triangle ABC$ 的周长.

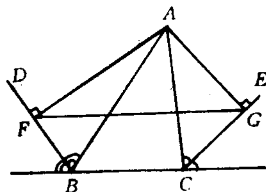


图 3·119

分析：本题的条件中出现了 BD、CE 是 $\angle B$、$\angle C$ 的外角平分线和 AF、AG 是向角平分线所作的垂线，就构成了角平分线和向角平分线所作的

垂线之间的组合关系，所以就一定出现一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的，而现在图形中的这两条垂线都还没有和角的第二条边相交，所以应将它们延长到相交，即延长 AF 交 CB 的延长线于 K，可得 $\triangle ABF \cong \triangle KBF$，$BA=BK$ 和 $FA=FK$. 根据同样的道理延长 AG 交 BC 的延长线于 H，可得 $\triangle ACG \cong \triangle HCG$，$CA=CH$ 和 $GA=GH$（如图 3・120). 这样又出现了 F、G 分别是 AK、AH 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 于是即可推得 $FG /\!/ BC$，$FG=\frac{1}{2}KH=\frac{1}{2}(KB+BC+CH)=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$，分析即可完成.

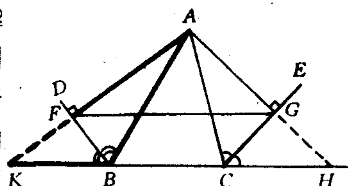


图 3・120

例 33　如图 3・121，已知：$\triangle ABC$ 中，BE、BF 分别是 $\angle B$ 和 $\angle B$ 的外角的角平分线，$AG \perp BF$，$AH \perp BE$，垂足分别是 G、H，过 G、H 的直线分别交 AB、AC 于 M、N.

求证：(1) 四边形 $AGBH$ 是矩形；

(2) $MN=\frac{1}{2}BC$.

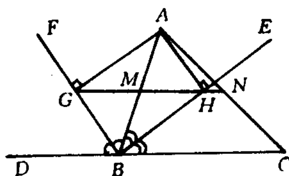


图 3・121

分析：本题条件中出现了 BE、BF 分别是 $\angle B$ 和 $\angle B$ 的外角的角平分线，所以必定有 $BE \perp BF$，$\angle EBF=90°$，又因为条件给出了 $AG \perp BG$，$AH \perp BH$，$\angle AGB=\angle AHB=90°$，这样在四边形 $AGBH$ 中就出现了三个内角都是直角，所以这个四边形必定是矩形，且可进一步得到 $AM=BM$ 或 M 是 AB 的中点.

又因为 BE 是角平分线，且 $AH \perp BE$ 是向角平分线所作的垂线，所以就构成了角平分线和向角平分线所作垂线的组合关系，这样也就一定能得到一个等腰三角形的基本图形，由于这个等腰三角形应是角平分线的垂线和角的两边相交得到的，所以应将 AH 延长到与角的另一边 BC 相交，于是延长 AH 交 BC 于 K，即可得 $\triangle ABH \cong \triangle KBH$，$AH=KH$，$H$ 是 AK 的中点，这样又出现了两个中点，是多个中点问题，且 M、H 所在的线段 AB、AK 有公共端点 A，可以组成三角形，所以应用三角形中位线定理就可得 $MH /\!/ BK$，亦即 $MN /\!/ BC$，从而就可进一步推得 $AN=CN$，$MN=\frac{1}{2}BC$(如图 3・122).

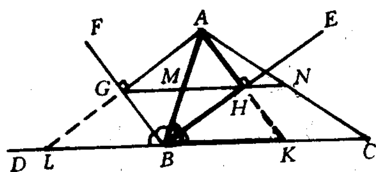


图 3・122

本题在证明了四边形 $AGBH$ 是矩形以后，也可以连续两次考虑角平分线和向角平分线所作的垂线之间的组合关系以及由此而得到的等腰三角形，从而就应延长 AG、AH 分别交 CB 的延长线和 BC 于 L、K(如图 3・122)，并得到 $AG=LG$，$AH=KH$，那么接下来再应用三角形的中位线定理及其逆定理，也就可以证得 $MN=\frac{1}{2}BC$.

本题在证明了四边形 $AGBH$ 是矩形以后，应用矩形的性质即可得 M 是 AB 的中点，这样要证明 $MN=\frac{1}{2}BC$，就可以转化成要证 $MN /\!/ BC$，而已知 BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线，从而就出现了一次角平分线和平行线的组合关系，也就必定得到一个

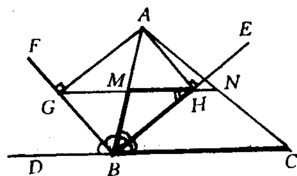


图 3・123

等腰三角形的基本图形，由于 MN 是角的一边 BC 的平行线，所以它应和角的另一边 BA 以及角平分线 BE 相交构成等腰三角形，从而就可找到这个三角形应是$\triangle MBH$（如图 3・123），显然应用矩形的性质即可得 $MB=MH$，$\angle MBH=\angle MHB$，而已知$\angle MBH=\angle HBC$，所以$\angle MHB=\angle HBC$ 和 $MN\parallel BC$ 都可以证明，分析也就可以完成.

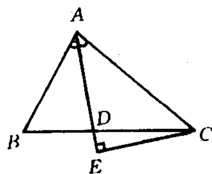


图 3・124

例 34 如图 3・124，已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，$AD=AB$，$CE\perp AD$ 交 AD 的延长线于 E. 求证：$AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

分析：由条件 AD 是角平分线和 $CE\perp AD$ 是向角平分线所作的垂线，就构成了角平分线和向角平分线所作垂线的组合关系，从而就一定得到一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线与角的两边相交得到的，而现在这条 CE 尚未与角的另一边 AB 相交，所以应将它们延长到相交，也就是延长 CE 并和 AB 的延长线相交于 F（如图 3・125），即可得 $\triangle AEF\cong\triangle AEC$ 和 $AF=AC$、$EF=EC$. 这样要证明的结论就转化成为 $AE=\frac{1}{2}(AB+AC)=\frac{1}{2}(AB+AF)$，由于图中 AF 可以看作是 AB 和 BF 的和，而两个 AB 之和又可以和括号前面的$\frac{1}{2}$进行约分，所以结论又进一步转化为 $AE=\frac{1}{2}(AB+AB+BF)=AB+\frac{1}{2}BF$.

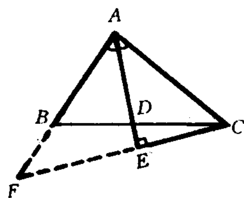


图 3・125

由于这个关系式中出现了$\frac{1}{2}BF$，从而可根据线段倍半关系的

定义，先将$\frac{1}{2}BF$作出，并应能将它接在AB上.于是取BF的中点G，得$BG=\frac{1}{2}BF$，从而欲证的结论又进一步转化为$AE=AB+BG=AG$.

在取了G是BF的中点后，由于E已经证明是CF的中点，于是又出现了多个中点问题，从而就要应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明.由于G、E这两个中点所在的线段FB、FC具有公共端点F，可以组成三角形，所以GE这两个中点的连线就是三角形的中位线，而现在图形中是有三角形却没有中位线，所以应将中位线添上，

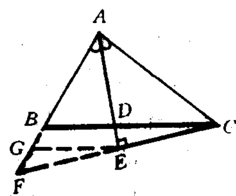


图 3・126

也就是连结EG，得$EG/\!/BC$(如图 3・126).现在要证明的是$AE=AG$，这是两条具有公共端点的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，而$EG/\!/BC$，$\triangle ABD$和$\triangle AGE$相似.而$\triangle ABD$已知是等腰三角形，所以$AE=AG$就可以证明.

本题在转化到应证$AE=AB+\frac{1}{2}BF$以后，也可以根据线段之间的和差之间的逆运算关系，将问线转化为线段的差来进行分析，那就可将上式转化为$AE-AB=\frac{1}{2}BF$，而已知$AB=AD$，所以$AE-AB=AE-AD=DE$，问题成为应证$DE=\frac{1}{2}BF$.这是两条线段之间的倍

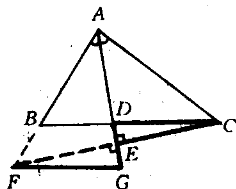


图 3・127

半关系，从而又可以根据线段倍半关系的定义，将半线段的两倍作出，于是延长DE到G，使$EG=DE$，这样问题就成为要证明$BF=DG$.而在作出$EG=DE$后，由于已经证明$FE=CE$，且FC、DG在E点相交，这样就出现了两组相等线段位于一组对顶角的两边上，

且成一直线，所以可应用中心对称型的全等三角形进行证明，应用的方法是将四个端点两两连起来，也就是连接 FG，即可得 $\triangle DCE \cong \triangle GFE$（如图 3・127），并可进一步推得 $FG /\!/ DC$，于是由 $\triangle ABD \backsim \triangle AFG$ 和 $AB=AD$，也就可以证明 $BF=DG$.

本题在转化成要证 $DE=\frac{1}{2}BF$ 后，这是两条线段之间的倍半关系，且由于 E 是 FC 的中点，这个线段之间的倍半关系是和线段的中点发生联系的，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明，而应用的方法就出现了两种可能性：

若将倍线段 BF 取作三角形的边，则应将三角形的中位线添上，于是取 BC 的中点 G，连接 EG，可得 $EG /\!/ BF$，$EG=\frac{1}{2}BF$，这样问题就成为应证 $EG=ED$. 而由 $EG /\!/ BA$，又可得 $\triangle ABD \backsim \triangle EGD$（如图 3・128），而已知 $AB=AD$，所以 $EG=ED$ 就可以证明.

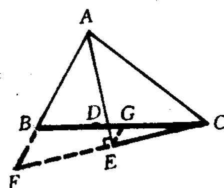


图 3・128

若将半线段 DE 取作三角形的中位线，则应将三角形的边添上. 这时要使 DE 成为三角形的中位线，必须要使 D、E 都成为中点，而现在图形中 D 还不是中点，所以延长 CB 到 G，使 $DG=DC$，这样 D、E 就分别成为具有公共端点 C 的线段 CG、CF 的中点，所以 DE 就是 $\triangle CGF$ 的中位线，现在图形中是有中位线而三角形不完整，所以应将三角形的边添上，也就是连接 GF，就可得 $DE=\frac{1}{2}GF$，$DE /\!/ GF$，问题就转化为要证 $BF=GF$（如图 3・129）. 而由 $DE /\!/ GF$，又可得 $\triangle FBG \backsim \triangle ABD$，而 $AB=AD$，所以 $BF=GF$ 就可以证明.

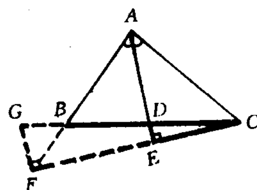


图 3・129

例 35　如图 3·130，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle B=3\angle C$，AD 是角 A 的平分线，$BE\perp AD$，垂足是 E. 求证：$BE=\frac{1}{2}(AC-AB)$.

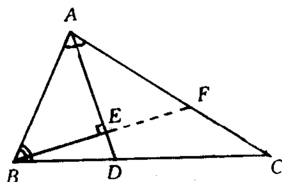


图 3·130

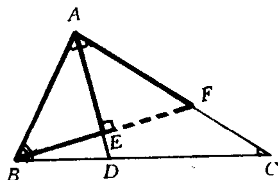


图 3·131

分析：本题条件中出现了 AD 是角平分线和 $BE\perp AD$ 是向角平分线所作的垂线，就构成了角平分线和向角平分线所作垂线的组合关系，从而就可以得到一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的，所以延长 BE 交 AC 于 F（如图 3·131）后，就可得 $\triangle ABE\cong\triangle AFE$，$BE=FE$，$AB=AF$. 这样就可进一步得到 $BE=\frac{1}{2}BF$，$AC-AB=AC-AF=CF$，问题也就转化成为要证 $BF=CF$.

由于 BF 和 CF 应是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，所以就成为一个等腰三角形的判定问题，于是就可以转而证明 $BF=CF$ 的等价性质 $\angle FBC=\angle C$. 由条件 $\angle ABC=3\angle C$，且 $\angle ABC=\angle ABF+\angle FBC$，所以 $\angle ABF+\angle FBC=3\angle C$. 另一方面我们已经证明了 $\angle ABF=\angle AFB$，而由 A、F、C 成一直线，又可得 $\angle AFB$ 是 $\triangle FBC$ 的一个

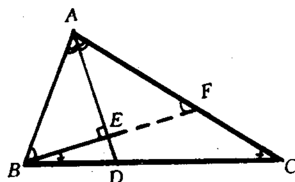


图 3·132

外角；$\angle AFB=\angle FBC+\angle C$，于是就有$\angle FBC+\angle C+\angle FBC=3\angle C$，也就可以证明$\angle FBC=\angle C$（如图 3・132）.

例 36 如图 3・133，已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，E 是 BC 的中点，$EF\perp AD$ 交 AD、AB 的延长线于 F、G. 求证：$AC-AB=2BG$.

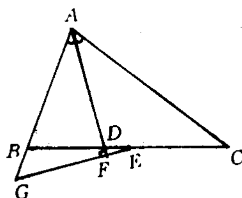


图 3・133

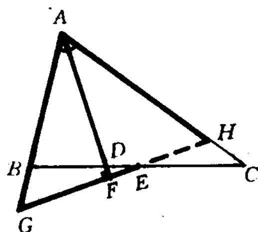


图 3・134

分析：由条件 EF 是向角平分线 AD 所作的垂线，就可以得到一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线与角的两边相交得到的，而 EG 尚未与角的另一边 AC 相交，所以延长 GE 交 AC 于 H，可得$\triangle AGF\cong\triangle AHF$，$AG=AH$（如图 3・134）. 这样要证的结论就成为 $2BG=AC-AB=(AH+CH)-(AG-BG)=CH+BG$，从而只要证明 $BG=CH$.

由条件 $BE=CE$，且 BC、GH 在 E 点相交，就出现了 BE、CE 这两条相等线段是位于一组对顶角的两边且成一直线，从而就可添加一对中心对称型全等三角形进行证明，添加的方法是过端点作平行线.

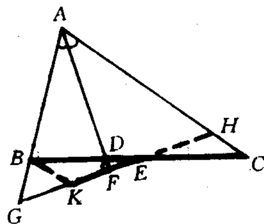


图 3・135

若考虑过端点 B 作平行线，则过 B 作 $BK\parallel AC$ 交 GH 于 K，就可得$\triangle BEK$

和$\triangle CEH$全等，于是$BK=CH$（如图 • 135）．而由$BK // AC$、$AG=AH$和$\triangle BGK \backsim \triangle AGH$，又可以证明$BK=BG$，从而$BG=CH$就可以得到证明．

图 3 • 136

图 3 • 137

若考虑过端点C作平行线，则过C作$CM // GA$交GH的延长线于M，可得$\triangle BEG \cong \triangle CEM$，$BG=CM$（如图 3 • 136）．再由$CM // GA$、$AG=AH$又可得$\triangle AGH \backsim \triangle CMH$，$CM=CH$，所以也可推得$BG=CH$．

例 37 如图 3 • 137，已知：$\triangle ABC$中，$\angle ABC=2\angle C$，AD是角平分线，E是BC的中点，$EF \perp AD$交AD、AB的延长线于F、G．求证：$BD=2BG$．

分析：由条件中出现EF是向角平分线AD所作的垂线，所以必定会构成一个等腰三角形的基本图形．但目前这条角平分线的垂线尚未与角的边AC相交，所以延长GE交AC于H，可得$\triangle AGF \cong \triangle AHF$，$AG=AH$（如图 3 • 138）．

图 3 • 138

又因为条件中出现E是BC的中点，且BC、GH在E点相交，就出现了BE、CE这两条相等线段是位于一组对顶角，即$\angle BEG$和$\angle CEH$的两边且成一直线，所以可添加中心对称型

的全等三角形进行证明，添加的方法是过端点作平行线，于是过 B 作 $BK // AC$ 交 GH 于 K 后，可得$\triangle BKE \cong \triangle CHE$，$BK=CH$（如图 3・139）．而由 $BK // AC$，又可得$\triangle BGK \backsim \triangle AGH$，而 $AG=AH$，所以 $BG=BK$，从而可得 $BG=CH$，这样要证明的结论就成为 $BD=2CH$.

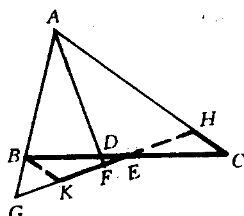


图 3・139

现在要证明 BD 是 CH 的两倍，就可以根据线段倍半关系的定义，将 CH 的两倍作出后，证明所得的线段与 BD 相等．于是在 HA 上截取 $HM=CH$，问题就成为要证 $BD=CM$（如图 3・140）.

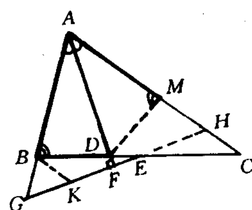


图 3・140

又因为 $AM=AH-HM=AG-BG=AB$，且 AD 是角平分线，所以 AM 和 AB 这两条相等线段就关于这条角平分线成轴对称，这样就可以添加一对轴对称型全等三角形进行证明．根据图形的轴对称性可以找到这一对三角形应是$\triangle ABD$ 和$\triangle AMD$，但$\triangle AMD$ 尚未出现，所以应先连接 MD（如图 3・140）．从而由 $AB=AM$，$\angle BAD=\angle MAD$ 和 $AD=AD$，就可证明$\triangle ABD \cong \triangle AMD$，$BD=DM$，这样问题又转化为要证 $DM=CM$．由于这是两条具有公共端点 M 的相等线段，所以它们可以组成一个等腰三角形，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题，且因为 C、M、A 成一直线，出现了这个要证明的等腰三角形的顶角的外角，所以问题可转化成为要证 $DM=CM$ 的等价性质$\angle AMD=2\angle C$．由条件$\angle ABC=2\angle C$，这样问题又应证$\angle AMD=\angle ABD$，而这两个角是全等三角形，即$\triangle AMD$ 和$\triangle ABD$ 的对应角，当然相等，所以分析

可以完成.

由于本题要证明的结论 $BD=2BG$ 是线段之间的倍半关系，所以也可以根据应用线段之间倍半关系的定义来开始进行分析. 于是先将 BG 的两倍作出，也就是延长 BG 到 H 使 $GH=BG$，然后就证明 $BD=BH$. 由于这是两条具有公共端点 B 的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，但这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，所以应将底边添上，也就是连结 HD，这样就成为一个等腰三角形的判定问题. 由条件 A、B、H 成一直线，图形中出现了这个等腰三角形的顶角的外角，所以要证明 $BD=BH$，就可转化为证它的等价性质 $\angle ABD=2\angle BHD$，但由条件 $\angle ABD=2\angle ACB$，从而只须证明 $\angle BHD=\angle ACB$(如图 3・141).

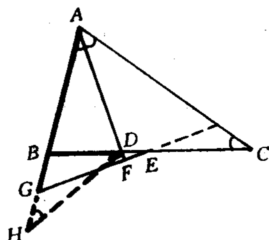


图 3・141

又因为条件中还给出 E 是 BC 的中点，且我们作出了 G 是 BH 的中点，这样就出现了两个中点，是多个中点问题，就可以应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 G、E 所在的线段有公共的端点 B，可以组成三角形，所以 GE 就是三角形的中位线，但现在图形中是有中位线而三角形不完整，所以应将三角形的边添上，于是连结 HC，即可得 $GE\parallel HC$(如图 3・142). 再由条件 $GE\perp AD$，又可推得 $HC\perp AD$，根据垂线的定义，它们应相交成 90°角，而现在 HC 与 AD 尚未相交，所以应将它

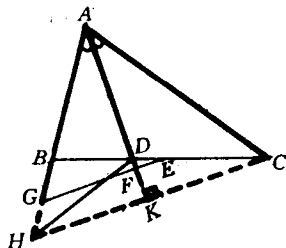


图 3・142

们延长到相交，也就是延长 AF 交 HC 于 K，就可得 $AK\perp HC$（如图 3·142），由于 AK 是$\angle HAC$ 的平分线，这样就构成了角平分线和向角平分线所作垂线之间的组合关系，从而必定得到一个等腰三角形的基本图形，而由角平分线的垂线 HC 与角的两边分别相交于 H、C，即可找到这个等腰三角形应是$\triangle AHC$，于是就可以由$\angle HAK=\angle CAK$、$AK=AK$，$\angle AKH=\angle AKC=90°$，推得$\triangle AHK\cong\triangle ACK$，$AH=AC$. 于是再由 $AH=AC$，$\angle HAD=\angle CAD$ 和 $AD=AD$，就可证明$\triangle AHD\cong\triangle ACD$，$\angle AHD=\angle ACD$，分析也就可以完成.

例 38 如图 3·143，已知：$\triangle ABC$ 中，D、E 分别是 AB、AC

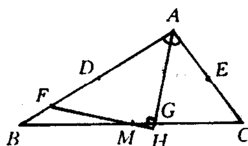


图 3·143

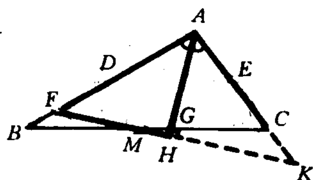


图 3·144

的中点，F 是 DB 上的一点，且 $DF=AE$，AG 是角平分线，$FH\perp AG$，垂足是 H 且交 BC 于 M.

求证：$BM=CM$.

分析：本题的条件中出现了 AG 是角平分线和 $FH\perp AG$ 是向角平分线所作的垂线，就必定构成一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形应是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的，所以延长 FH 交 AC 的延长线于 K，即可得$\triangle AFH\cong\triangle AKH$，$AF=AK$（如图 3·145）. 由条件给出 $DF=AE$，就可推得 $AD=AF-DF=AK-AE=EK$，而已知 $AD=BD=BF+DF$，所以 $BF=BD-DF=EK-DF=EK-AE=EK-CE=CK$.

本题要证明的结论是 $BM=CM$，而 BC、FK 又在 M 点相交，这样就出现了 BM 和 CM 这两条要证明的相等线段是位于一组对顶角的两边且成一直线，所以可添加中心对称型全等三角形进行证明. 添加的方法是过端点作平行线，于是过 C 作 $CN \parallel FB$ 交 FK 于 N，可得 $\triangle BFM$ 和 $\triangle CNM$ 必定全等（如图 3·145）. 而在这两个三角形中，已经出现的条件是 $\angle FMB=\angle NMC$，$\angle FBM=\angle NCM$，而 $BM=CM$ 是要证明的结论不能用，所以必定要另找一组边对应相等的条件. 由于我们已经证明 $BF=CK$，所以问题就应证明与这一性质有关的对应边相等，也就是要证明 $BF=CN$，从而又可进一步转化为要证 $CN=CK$，但由 $CN \parallel AF$，可得 $\triangle KCN \backsim \triangle KAF$，而我们已证 $AF=AK$，所以 $CN=CK$ 可以证明.

图 3·145

例 39　如图 3·146，已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，$CE \perp AD$，$BF \perp AD$，垂足分别为 E、F，G 是 BC 的中点.

图 3·116

图 3·117

求证：$GE=GF=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

分析：本题条件中出现了 AD 是角平分线和 $CE \perp AD$，就构成了角平分线和向角平分线所作垂线之间的组合关系，从而就必定

得到一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形应是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的，而现在这条 CE 尚未与角的一边 AB 相交，所以应将它们延长到相交，也就是延长 CE 交 AB 于 M（如图 3·147），就可得 $\triangle AME \cong \triangle ACE$，$AM=AC$，$ME=CE$.

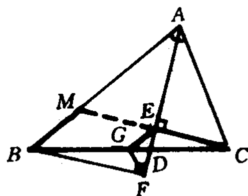


图 3·148

现在由 $ME=CE$ 可知 E 是 CM 的中点，而已知 G 是 BC 的中点，出现了两个中点，是多个中点问题，从而就可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 E、G 这两个中点所在的线段 CM、CB 有公共的端点 C，可以组成 $\triangle CMB$，所以 GE 就是 $\triangle CMB$ 的中位线，从而可推得 $EG=\frac{1}{2}BM=\frac{1}{2}(AB-AM)=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

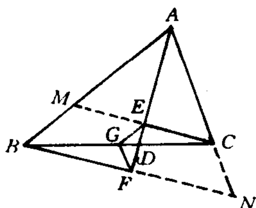


图 3·149

对于 AD 是角平分线和 $BF\perp AD$ 的条件我们可以用同样的方法进行分析，由此也就可得延长 BF 交 AC 的延长线于 N，$BF=FN$，$AB=AN$ 和 $GF=\frac{1}{2}CN=\frac{1}{2}(AB-AC)$，分析就可以完成（如图 3·149）.

例 40 如图 3·150，已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是高，AE 是角平分线，F 是 BC 的中点，$CG\perp AE$，$BH\perp AE$，垂足分别为 G、H. 求证：D、G、F、H 四点共圆.

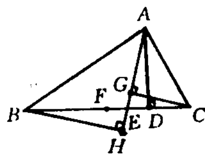


图 3·150

分析：由条件 AE 是角平分线和 $CG\perp AE$，就构成了角平分线和向角平分线所作的垂线的组合关系，从而就必定得到一个等

腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线 AE 的垂线 CG 和角的两边 AB、AC 相交得到的，而现在 CG 与 AB 尚未相交，所以应将它们延长到相交，也就是延长 CG 交 AB 于 M（如图 3·151），即可得 $\triangle AMG \cong \triangle ACG$，$AM=AC$ 和 $GM=GC$.

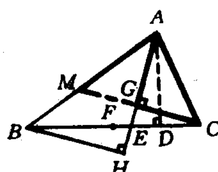


图 3·151

在得到 G 是 CM 的中点后，由于条件中还给出 F 是 BC 的中点，这样就出现了两个中点，是多个中点问题，所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明（如图 3·152），于是可得 $GF \parallel MB$，$GF=\frac{1}{2}MB$.

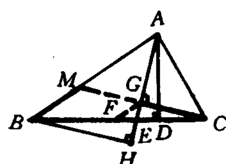


图 3·152

由于本题要证明的结论是 D、G、F、H 四点共圆，是一个圆内接四边形也就是圆周角的基本图形的应用问题. 由于这个圆周角的基本图形中，已经有一条边 FG，所以应将相应的一条对边添上，于是连结 HD

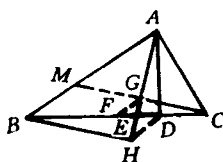


图 3·153

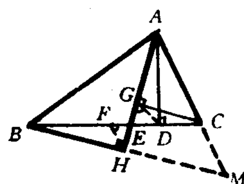


图 3·154

（如图 3·153），问题也就转化成要证 $\angle GFD=\angle GHD$. 而由 $GF \parallel MB$. 可得 $\angle GFD=\angle MBC$，这样问题又成为要证 $\angle ABD=\angle AHD$，A、B、H、D 四点共圆，而条件中已经给出 $AD \perp BD$、$AH \perp BH$，所以分析可以完成.

如果我们的分析是从 AE 是角平分线和 BH 是角平分线 AE 的垂线开始，那也可以用类似的方法完成分析. 也就是由 AE 是角平分线，$BH\perp AE$，可得延长 BH 交 AC 的延长线于 M 后，有 $AB=AM$，$BH=MH$. 而由 F、H 分别是 BC、BM 的中点，可得连结 FH 后（如图 3·154），有 $FH\parallel CM$，$\angle HFD=\angle ACB$. 而由 $\angle ADC=\angle AGC=90°$，又可得 A、G、D、C 四点共圆，所以连结 GD 后有 $\angle HGD=\angle ACB$，从而就可推得 $\angle HFD=\angle HGD$，D、G、F、H 四点共圆.

例 41 如图 3·155，已知：$\triangle ABC$ 中，MN 是 $\angle A$ 的外角平分线，$BD\perp MN$，$CE\perp MN$，垂足分别为 D、E，F 是 BC 的中点.

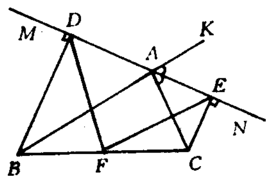


图 3·155

求证：$FD=FE=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

分析：本题条件中出现了 AN 是 $\angle A$ 的外角. 也就是 $\angle CAK$ 的角平分线，且 $CE\perp AN$ 是角平分线 AN 的垂线，所以可构成一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的，而现在这条 CE 尚未与角的一边 AK 相交，所以延长 CE 交 BA 的延长线于 G（如图 3·156），即可得 $\triangle ACE\cong\triangle AGE$，$AC=AG$，$CE=GE$.

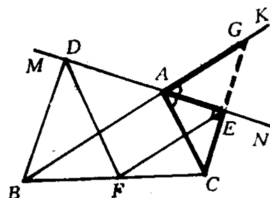


图 3·156

在得到了 E 是 CG 的中点后，由于条件中还给出 F 是 BC 的中点，就出现了两个中点，是多个中点问题，就可以应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 E、F 所在的线段 GC、BC 有公共端点 C，可以组成

$\triangle CBG$,所以 FE 就是$\triangle CBG$ 的一条中位线,从而也就可得 $FE=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}(AB+AG)=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

对于条件中给出的 AM 是$\angle A$ 的外角平分线和 $BD\perp AM$,我们也可以用同样的方法进行分析,所以延长 BD 交 CA 的延长线于 H(如图 3・157). 得 $AB=AH$,$BD=HD$,同样地再由 $BF=CF$,就可证明 $FD=\frac{1}{2}(AB+AC)$,分析就可以完成.

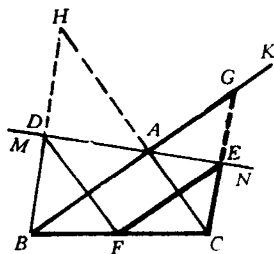


图 3・157

例 42 如图 3・158,已知:MN 是$\triangle ABC$ 的$\angle A$ 的外角平分线,$BD\perp MN$,$CE\perp MN$,垂足是 D、E,CD、BE 相交于 F.

求证:FA 平分$\angle BAC$.

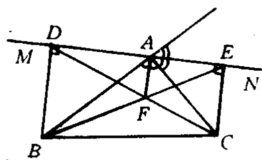


图 3・158

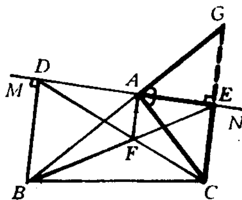


图 3・159

分析:本题条件中出现了 CE 是向$\angle A$ 的外角平分线 MN 所作的垂线,就必定会得到一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的,所以延长 CE 并与 BA 的延长线相交于 G(如图 3・159),就可得$\triangle ACE\cong\triangle AGE$,$AC=AG$,$CE=GE$.

本题要证明的结论是 FA 平分$\angle BAC$,这样 FA 和 EA 就分

别是$\angle A$的内外角平分线，所以只要证明$FA\perp EA$. 但已知$CE\perp AE$，于是又应证$FA/\!/CE$. 这样就出现了FA是$\triangle DEC$内一条边CE的平行线段，所以可应用平行线型相似三角形的性质进行证明，于是问题就可以转化为要证明$\frac{DA}{AE}=\frac{DF}{FC}$（如图3·160）. 而由条件$BD\perp MN$，$CG\perp MN$，可得$BD/\!/CE$，这是两条平行线段，且它们的四个端点两两的连线在$F$点相交，所以又可以得到一对平行线型相似三角形，从而就可推得$\triangle BDF\backsim\triangle ECF$，$\frac{DF}{CF}=\frac{BD}{CE}$. 类似地，由$BD/\!/GE$，又可推得$\triangle BDA\backsim\triangle GEA$，$\frac{DA}{AE}=\frac{BD}{GE}$，但$CE=GE$是已经证明的，所以$\frac{DF}{FC}=\frac{DA}{AE}$就可以证明.

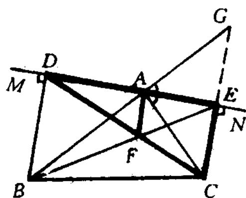


图3·160

例43 如图3·161，已知：$\triangle ABC$中，$BC=3AB$，BO是角平分线，$CD\perp BO$交BO的延长线于D. 求证：$DO=BO$.

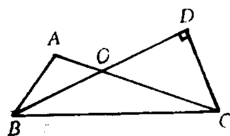


图3·161

分析：本题的条件中出现$CD\perp BO$是向角平分线所作的垂线，所以必定会构成一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的，而现在这条CD尚未和角的一边BA相交，所以应将它们延长到相交，亦即延长CD交BA的延长线于E（如图3·162），就可得$\triangle BED\cong\triangle BCD$，$BE=BC$，$DE=DC$. 并进一步可得$BE=3AB$，$AE=2AB$.

现在得到的$AE=2AB$是线段之间的倍半关系，所以可根据

线段倍半关系的定义将倍线段两等分，也就是取 AE 的中点 F 后可得 $AB=AF=EF$.

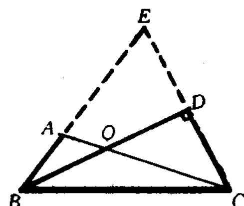


图 3・162

在作出了 F 是 AE 的中点后，由于已经证明 D 是 CE 的中点，出现了多个中点问题，从而就可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 F、D 这两个中点所在的线段 AE、CE 具有公共端点 E，可以组成三角形，所以 D、F 这两个中点的连线就是三角形的中位线，而现在图形中是有三角形而没有中位线，所以将中位线添上，即连结 DF（如图 3・163），得 $DF\parallel CA$. 现在要证明的结论是 $BO=DO$，而现在已经证明 $FD\parallel AO$，所以问题又转化为需要 $AB=AF$ 成立，但这一性质我们在前面分析过程中已经得到，所以分析可以完成.

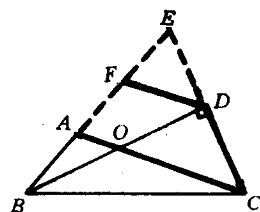


图 3・163

本题的分析在延长 CD 交 BA 的延长线于 E，$CD=ED$ 和 $AE=2AB$ 后，也可以再从结论 $DO=BO$ 接下去进行分析：

由结论 $DO=BO$，且 BD、AC 在 O 点相交，就出现了 DO 和 BO 这两条要证明相等的线段是位于一组对顶角的两边且成一直线，从而就可添加中心对称型全等三角形进行证明，添加的方法是过端点作平行线.

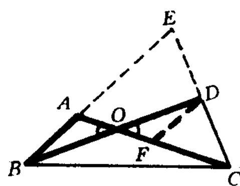


图 3・164

若平行线选择过端点 D 作，则过 D 作 $DF\parallel AB$ 交 AC 于 F（如图 3・164），那就可得 $\angle ABO=\angle FDO$，且 $\angle AOB=\angle FOD$，

但 $BO=DO$ 是结论，不能用，所以必须另外证一组边对应相等，由于已经证得 $AE=2AB$，根据这个条件应考虑证明 $AB=FD$，于是问题就可转而证 $AE=2FD$，但已证 D 是 CE 的中点且所作 $DF\parallel AE$，所以这个性质是可以证明的，那么通过$\triangle ABO\cong\triangle FDO$ 就可完成分析.

若平行线选择过端点 B 作，则过 B 作 $BF\parallel CD$ 交 CA 的延长线于 F(如图 3・165)，可得$\angle FBO=\angle CDO=90^\circ$，$\angle FOB=\angle COD$. 所以要证明$\triangle FOB$ 和$\triangle COD$ 全等，也必须要再证一组边对应相等. 由于 $BF\parallel CE$，且它们的四个端点的两两的连线在 A 点相交，所以可应用平行线型相似三角形进行证明，于是就可证明$\triangle BAF\backsim\triangle EAC$，$\dfrac{BF}{EC}=\dfrac{AB}{AE}$，但已证 $AE=2AB$，所以 $EC=2BF$，但我们已证明 $EC=2CD$，所以又可得 $BF=DC$，所以这两个三角形全等可以证明，分析也就可完成.

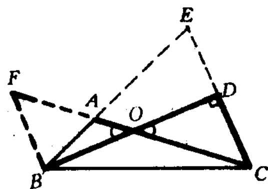


图 3・165

例 44 如图 3・166，已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，AE 是中线，$BG\perp AD$ 并交 AD 的延长线于 G，AE 的延长线交 BG 于 F.

求证：$DF\parallel AB$.

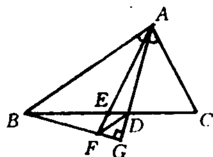


图 3・166

分析：本题条件中出现了 BG 是向角平分线 AD 所作的垂线，所以必定构成一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的，所以延长 BG 交 AC 的延长线于 H(如图 3・167)，即得$\triangle ABG\cong\triangle AHG$，$AB=AH$ 和 $BG=HG$. 进一步还可推得 $CH=AH-AC=AB-AC$.

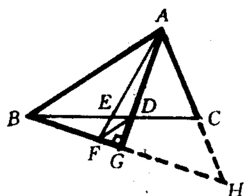


图 3·167

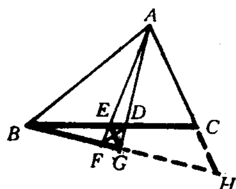


图 3·168

在得到了 G 是 BH 的中点后，由于条件中还给出 E 是 BC 的中点，就出现了两个中点，是多个中点问题，于是就可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 G、E 所在的线段 BH、BC 有公共端点 B，可以组成 $\triangle BCH$，所以 G、E 这两个中点的连线就是三角形的中位线，现在图形中是有三角形而没有中位线，所以应将中位线添上，也就是连结 EG（如图 3·168），可得 $EG \parallel CH$，$EG=\frac{1}{2}CH=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

本题要证明的结论是 $DF \parallel AB$，就出现了 DF 是 $\triangle GAB$ 内一条边 AB 的平行线段，所以可应用平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明. 于是要证 $DF \parallel AB$，就可转化为要证 $\frac{GF}{GB}=\frac{GD}{GA}$. 而 $GB=GH$，所以 $\frac{GF}{GB}=\frac{GF}{GH}$，又因为已证 $EG \parallel AH$，所以 EG 也是 $\triangle AHF$ 内一条边 AH 的平行线段，这样就又可应用平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明，于是就有 $\frac{GF}{GH}=\frac{EG}{AH-EG}$，由于 EG 和 AH 都已有与 AB、AC 有关的数量关系，所以代入后进行运算就可得 $\frac{EG}{AH-EG}=\frac{\frac{1}{2}(AB-AC)}{AB-\frac{1}{2}(AB-AC)}=$

$\frac{AB-AC}{AB+AC}$，这里出现的实质上是三角形的两边 AB、AC 之比的关系，而已知 AD 是角平分线，所以就可应用角平分线的性质 $\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BD}$，于是就有上式等于 $\frac{1-\frac{AC}{AB}}{1+\frac{AC}{AB}}=\frac{1-\frac{CD}{BD}}{1+\frac{CD}{BD}}=\frac{BD-CD}{BD+CD}=\frac{(BE+DE)-(CE-DE)}{BC}$，但已知 $BE=CE$，这样就推得 $\frac{GF}{GB}=\frac{2DE}{BC}$. 那么问题也就成为要证明 $\frac{GD}{GA}$ 也等于 $\frac{2DE}{BC}$. 由已证的 $EG /\!/ AC$，这两条平行线段的四个端点的两两的连线在 D 点相交，所以又可以应用平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明，于是又可得 $\frac{GD}{GA}=\frac{DE}{EC}$，而 $EC=\frac{1}{2}BC$，代入上式后即可得 $\frac{GD}{GA}=\frac{2DE}{BC}$，就可以完成分析.

本题在延长 BG 交 AC 的延长线于 H，连结 EG，并得到 $BG=HG$，$EG /\!/ CH$ 以后，又进一步将证明 $DF /\!/ AB$ 转化为要证 $\frac{GF}{GB}=\frac{GD}{GA}$. 对这一比例关系，首先也进行描图，以搞清楚比例线段之间的位置关系，经过描图可以发现 GF 和 GB、GD 和 GA 这两组相比线段都分别重叠在一直线上，所以仍然可以添加平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是过端点和内分点作平行线. 若首先考虑 GF 和 GB 这一组相比线段，那就应过端点 B 和内分点 F 作平行线，由于 FD 和 BA 是要证明的平行线，所以可取过内分点 F 的线段 FE 为平行方向线段，于是平行线就应过端点 B 作，也就是过 B 作 $BK /\!/ FE$ 交 GE 的延长线于 K（如图 3・169），即可得 $\triangle GEF \backsim \triangle GKB$，$\frac{GF}{GB}=\frac{GE}{GK}$，那么问题就转化为要证 $\frac{GD}{GA}=\frac{GE}{GK}$. 这是一个新的比例关系，所以我们首先仍然进行描图，搞清楚比例线段之间的

位置关系．而经过描图以后，我们又可以发现 GD 和 GA，GE 和 GK 这两组相比线段都重叠在一直线上，所以又可以添加平行线型相似三角形进行证明，添加的方法也是过端点和内分点作平行线．由于现在这两组重叠的相比线段有一个公共的端点 G，所以添加平行线的方法就是将端点和端点，内分点和内分点分别连起来，且这两条连线必定是平行线，于是连接 AK（如图 3・170），问题就成为应证 $AK \parallel DE$，也就是 $AK \parallel EB$，但我们已作 $BK \parallel EA$，所以四边形 $AKBE$ 就应是一个平行四边形，所以就可应用中心对称型全等三角形进行证明，根据这个平行四边形的中心对称部分，我们就能找到这对三角形应是 $\triangle BKM$ 和 $\triangle AEM$，由于在这两个三角形中已经可证 $\angle BMK = \angle AME$，$\angle KBM = \angle EAM$，所以必须要再证一组边对应相等的条件．由于已经证明 G 是 BH 的中点，$GM \parallel HA$，所以可得 $BM = AM$，那么通过这两个三角形全等，并进行证明四边形 $AKBE$ 是平行四边形后，就能得到 $AK \parallel DE$，分析就可以完成．

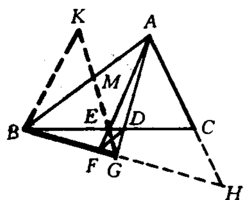


图 3・169

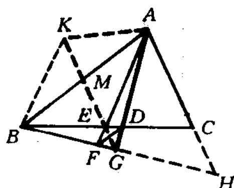


图 3・170

本题在分析得到 G 是 BH 的中点和 $EG \parallel CH$ 后，即可发现 $\triangle BCH$ 是 $\triangle BAH$ 的一部分，所以 $\triangle BCH$ 的中位线 EG 也是 $\triangle ABH$ 的中位线的一部分，因此考虑在 $\triangle ABH$ 中应用三角形中位线的基本图形的性质，就应先将这条中位线添完整，所以延长 GE 交 AB 于 M（如图 3・171）后，可得 $AM = BM$．这样在 $\triangle GAB$ 中可以发现过三角形顶点的三条线段 AF、BD、GM 相交于一点 E

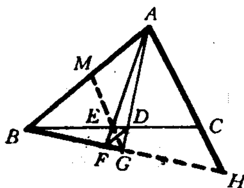


图 3·171

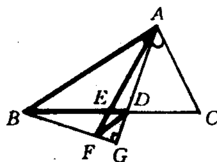


图 3·172

(如图 3·172),从而就可以直接应用西瓦定理得$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BF}{GF}\cdot\frac{GD}{AD}=1$,而$\frac{AM}{BM}=1$,于是$\frac{BF}{GF}\cdot\frac{GD}{AD}=1$,$\frac{BF}{GF}=\frac{AD}{GD}$,从而就可以证明结论.

本题要证明的结论是 $DF \parallel AB$,这是两条平行线段,且它们的四个端点的两两的连线在 E 点相交,所以可应用由三角形外的一条边的平行线段所得到的平行线型相似三角形进行证明.于是就可找到这对相似三角形应是$\triangle DFE$ 和$\triangle BAE$,问题也就转化为要证$\frac{AE}{FE}=\frac{BE}{DE}$.

又因为条件中给出 $BE=CE$,且 BC、AF 在 E 点相交,这样就出现了 BE、CE 这两条相等线段是位于一组对顶角的两边而且成一直线,从而就可以添加中心对称型全等三角形进行证明,添加的方法是过端点作平行线,于是过 B 作 $BH \parallel AC$ 交 AF 的延长线于 H(如图 3·173),就可得$\triangle ACE \cong \triangle HBE$,$AC=HB$,$AE=HE$.

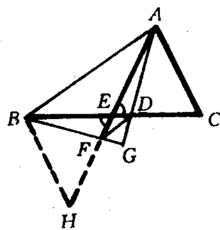


图 3·173

由所作的这一组平行线 AC、BH 可以看作是被 AB 所截,所以$\angle BAC$ 和$\angle ABH$ 就是一对同旁内角,它们的和就等于 180°.又因为 AD 是角平分线且 $BG \perp AD$,所以

BG 必定是 $\angle ABH$ 的角平分线，这样就可以在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BHA$ 中，分别应用三角形的角平分线的性质得 $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$，$\frac{AF}{HF}=\frac{AB}{BH}$. 而我们已证 $AC=BH$，所以 $\frac{BD}{CD}=\frac{AF}{HF}$，而我们要证的结论是 $\frac{AE}{FE}=\frac{BE}{DE}$，将两式进行比较，应将所得的关系式向结论转化，所以我们有 $BD=BE+DE$，$CD=CE-DE=BE-DE$，$AF=AE+EF$，$HF=HE-EF=AE-EF$，代入后即得 $\frac{BE+DE}{BE-DE}=\frac{AE+EF}{AE-EF}$，从而再进行运算就可证明 $\frac{BE}{DE}=\frac{AE}{FE}$，分析也就可以完成.

本题在延长 BG 交 AC 的延长线于 H 后，可得 $BG=HG$，$AB=AH$. 由 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，可得 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$，$\frac{AH}{AC}=\frac{BD}{CD}$，从而就有 $\frac{AH-AC}{AC}=\frac{BD-CD}{CD}$，由条件 E 是 BC 的中点，所以 $\frac{CH}{AC}=\frac{2DE}{CD}$. 由于比例关系中出现了数字 2，所以可应用线段倍半关系的定义进行证明. 于是考虑将 2 与 CH 组合，则作 CH 的中点 K，可得 $\frac{HK}{AC}=\frac{DE}{CD}$，$\frac{HK}{AC+HK}=\frac{DE}{CD+DE}$，$\frac{HK}{AK}=\frac{DE}{CE}=\frac{DE}{BE}$. 又因 E、K 分别是 CB、CH 的中点，是多个中点问题，从而应用三角形中位线的基本图形的性质，连结 EK（如图 3・174）后，可得 $EK\parallel BH$，所以又可得 $\frac{HK}{AK}=\frac{FE}{AE}$，从而有 $\frac{DE}{BE}=\frac{FE}{AE}$，所以 $DF\parallel AB$ 可以证明.

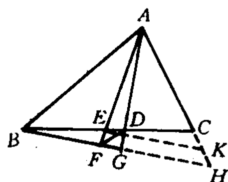


图 3・174

根据同样的道理，如果向角平分线所作的垂线改为过 C 点作，也就是过 C 作 $CG\perp AD$ 且分别交 AD、AE 于 G、F，那么也可以证明 $FD\parallel AC$.

例 45 如图 3・175，已知：$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，角平分线 AD

的延长线交⊙O 于 E，$BF \perp AE$，垂足是 F.

求证：$AB^2 - 2BF^2 = AB \cdot AC - 2AF \cdot EF$.

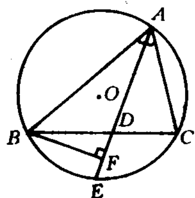


图 3・175

分析：本题的条件中出现了 BF 是向角平分线 AD 作的垂线，所以必定会构成一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的，所以延长 BF 交 AC 的延长线于 G，并设 BG 交 ⊙O 于 H（如图 3・176），即可得 $\triangle ABF \cong \triangle AGF$，$AG = AB$，$BF = GF$.

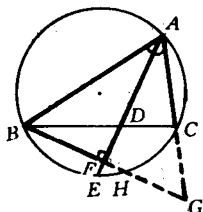


图 3・176

本题要证明的结论由于等式两边都出现了 AB，所以可先移项和提取公因式转化为 $AB(AB - AC) = 2BF^2 - 2AF \cdot EF$. 而 $AB(AB - AC) = AG(AG - AC) = AG \cdot CG$. 所以问题成为要证 $AG \cdot CG = 2BF^2 - 2AF \cdot EF$. 对这一线段之间的比例关系式，我们首先也进行描图，以搞清楚比例线段之间的位置关系. 经过描图，可以发现 AG 和 CG 这一组相乘线段重叠在一直线上，从而可应用逆平行线型相似三角形进行证明，由于现在出现的是由圆外一点 G 所作的圆的两条割线，所以可直接应用割线定理得 $AG \cdot CG = BG \cdot HG$，而 $BG = 2BF$，$HG = GF - HF$，所以 $AG \cdot CG = 2BF(GF - HF) = 2BF(BF - HF) = 2BF^2 - 2BF \cdot HF$. 将这个关系式与要证的结论相比较，即可得问题转化为要证 $AF \cdot EF = BF \cdot HF$，但 BH 和 AE 是⊙O 中相交于 F 点的两条弦，所以直接应用相交弦定理就可证明上述性质.

例 46 如图 3・177，已知：过⊙O 外的一点 P 作⊙O 的两条割线 PAB、PCD，且分别与⊙O 相交于 A、B，C、D. PM 是$\angle BPD$

的角平分线，$AE \perp PM$ 且分别交 PD、$\odot O$ 于 F、E，$OG \perp PM$ 垂足是 G. 求证：$EF=2OG$.

分析：本题条件中出现 AE 是向角平分线 PM 所作的垂线，所以必定构成一个等腰三角形的基本图形. 由 AE 与角的两边相交于 A、F（如图 3・178），就可得 $\triangle APH \cong \triangle FPH$，$PA=PF$，$AH=FH$.

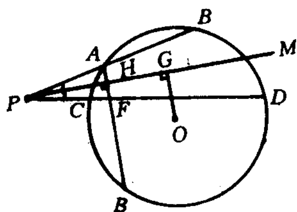


图 3・177

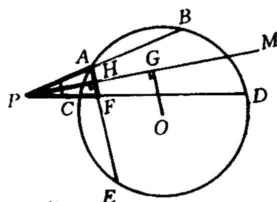


图 3・178

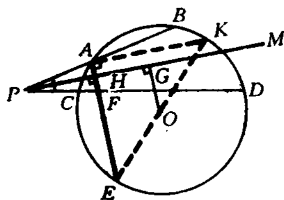


图 3・179

由条件$\angle MHE=90°$，而$\angle MHE$ 是$\odot O$ 的一个圆内角，而圆内角的问题可以转化为圆周角的基本图形来进行讨论，转化的方法可以是过圆周上的点作平行线.

若过 A 作 PM 的平行线交$\odot O$ 于 K，则$\angle KAE=90°$，这样就出现了 90°的圆周角，从而就可以应用 90°的圆周角的基本图形的性质进行证明，也就是$\angle KAE$ 所对的弧是半圆，所对的弦是直径，而现在图形中是有圆周角而没有直径，所以应将直径添上，也就是连结 EK 后（如图 3・179），必定有 EK 经过 O 点.

由条件 $OG \perp PM$ 和 $EA \perp PM$，可得 $OG /\!/ EA$，且我们已经证明 $OE=OK$，而要证的结论 $EF=2OG$ 是线段之间的倍半关系，所

以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 在$\triangle KAE$中,过一边EK的中点O所作的另一边EA的平行线尚未和第三边AK相交,所以首先应将它们延长到相交,也就是延长OG交AK于N(如图3·180),即可得N是AK的中点,$AE=2NO$.

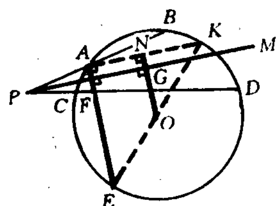


图3·180

而我们要证的是$EF=2OG$,于是上述性质可化为$AF+EF=2(NG+OG)=2NG+2OG$. 将两式加以比较可知问题成为应证$AF=2NG$,而我们已证$AF=2AH$,所以问题进一步转化为应证$AH=NG$,由$\angle GNA=\angle HGN=\angle NAH=90°$,四边形$AHGN$是矩形,当然就可以证明上述性质.

若过PM与$\odot O$的交点L作AE的平行线交$\odot O$于K,则$\angle MLK=90°$,从而又进一步可得$\angle MLK$所对的弦是直径,也就是连结KN后,必定有KN经过O点(如图3·181). 再由条件$OG\perp PM$,从而就可直接应用垂径定理,也就是设PM交$\odot O$于L、N,就有$GL=GN$,这样就出现了两个中点,是多个中点问题,就可以应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明,于是就可得$LK=2OG$,而要证明的是$EF=2OG$,从而就是应证$LK=FE$,而我们已作$LK\parallel FE$,所以四边形$LKEF$就应是平行四边形,但这个四边形目前尚不完整,所以应先将它的一组对边添上,也就是连结LF、KE(如图3·181). 由于在这个四边形中$LK=FE$是要证明的结论,不能用,所以要证明这个四边形是平行四边形就只能转而证明

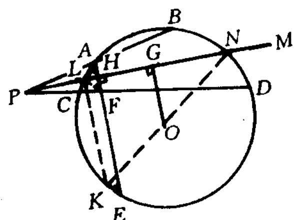


图3·181

LF 和 KE 也平行.

由条件 LK 和 AE 是⊙O 中的两条平行弦，应用平行弦的性质可得连结 LA 后有 $LA=KE$，四边形 $LKEA$ 是等腰梯形，所以 $\angle E=\angle LAF$. 又因为已证明 PM 是 AF 的垂直平分线，所以又可得 $\angle LAF=\angle LFA$，那就可以证明 $\angle LFA=\angle E$，$LF /\!/ KE$，也就可以完成分析.

图 3・182

本题要证的结论 $EF=2OG$ 是两条线段之间的倍半关系，所以可根据线段倍半关系的定义，作出 OG 的两倍，也就是延长 OG 到 K，使 $KG=OG$（如图 3・182），那么问题就是要证 $EF=OK$.

由条件 $EF\perp PM$，$OK\perp PM$，所以 $EF /\!/ OK$，这样就出现了 EF 和 OK 这两条线段不但相等，而且平行，所以它们可构成一个平行四边形，但这一个平行四边形目前还缺少一组对边，所以应先将这一组对边添上，也就是连结 FK、EO（如图 3・183），问题也就成为要证四边形 $FEOK$ 是平行四边形. 又因为 EF 和 OK 这一组对边相等是要证的结论，不能用，所以问题只能是证明另一组对边 FK 和 EO 也平行. 由于 FK 和 EO 可以看作是被 AE 所截，所以问题可转化为证 $\angle E=\angle AFK$.

图 3・183

由条件 MP 平分 $\angle BOD$ 和 $AF\perp PM$，可得 $\triangle PAH\cong\triangle PFH$，$AH=FH$，$PM$ 就是 AF 的垂直平分线，于是设 FK 与 PM 相交于 N，可得 N 在 AF 的垂直平分线上，所以又可以添加

等腰三角形中重要线段的基本图形进行证明，添加的方法是将等腰三角形的腰添上，也就是连结 NA（如图 3・183），可得 $NA=NF$，$\angle NAF=\angle NFA$，这样问题又转化为应证$\angle E=\angle NAF$.

又因为由条件 $PM\perp OK$ 和所作的 $OG=KG$，可得 PM 也是 OK 的垂直平分线，而 N 是 PM 上一点，所以可再一次添加等腰三角形中重要线段的基本图形进行证明，于是再连结 NO（如图 3・183）可得 $NO=NK$，$\angle K=\angle NOK$，又因为已知 $AE/\!/KO$，这一组平行线可以看作是被 FK 所截，所以$\angle AFK=\angle K$. 这样就可得到在等腰$\triangle NAF$ 和等腰$\triangle NOK$ 中，它们的底角是相等的，所以它们的顶角也相等，即$\angle ANF=\angle ONK$，但已知 F、N、K 在一直线上，所以 A、N、O 也在一直线上，这样 OA 就是$\odot O$ 的半径，$OA=OE$，那就可证$\angle E=\angle OAE$，分析完成.

例 47 如图 3・184，已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是高，P 是 AD 上的任一点，BP、CP 的延长线分别交 AC、AB 于 E、F.

求证：$\angle EDP=\angle FDP$.

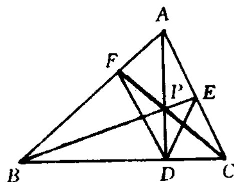


图 3・184

分析：本题要证$\angle EDP=\angle FDP$，即 DP 是$\angle EDF$ 的平分线. 而条件中出现 AD 是高，也就是 BC 是角平分线 DP 的垂线，从而就可构成一个等腰三角形的基本图形. 这个等腰三角形应是由角平分线的垂线和角的两边相交而得到，而现在图形中由于角平分线 DA 的垂线 BC 是经过$\angle EDF$ 的顶点 D 的，因此等腰三角形退化成一个点，即等腰三角形消失. 这样要作出等腰三角形，就必须要使这条角平分线的垂线离开角的顶点，而要使这条垂线既离开顶点又要保持与角平分线垂直，那也就是将 BC 平移. 而在平移过程中，只要一离开 D 点就可以在与角的两边相交后出现等腰三角形，所以在这个平移过程中能够得到的等腰三角形显然就可以有无数多个，因此，问题就成为要选择一个恰当的位置或者也

就是选取一点恰当的点作 BC 的平行线. 由于 A 是条件中给出的已知三角形的顶点，所以我们可选择过 A 作平行线，也就是过 A 作 $MN\perp AD$ 交 DE、DF 的延长线于 M、N（如图 3·185），那么 $\triangle DMN$ 必定是等腰三角形，而要证明 $\angle MDA=\angle NDA$，也就可以转化为要证明 $AM=AN$. 而由条件 $BC\perp AD$ 和所作 $MN\perp AD$，可得 $MN\parallel BC$. 这样 AN 和 DB 就是两条平行线段，且它们四个端点两两的连线在 F 点相交，从而可应用由三角形外一条边的平行线所得到的平行线型相似三角形进行证明（如图 3·186）. 也就是由 $AN\parallel DB$，可得 $\triangle AFN\backsim\triangle BFD$，$\frac{AN}{BD}=\frac{AF}{BF}$，从而有 $AN=\frac{AF}{BF}\cdot BD$. 根据同样的道理还可得 $AM=\frac{AE}{CE}\cdot CD$. 这样要证明 $AM=AN$，就可转化为证 $\frac{AE}{CE}\cdot CD=\frac{AF}{BF}\cdot BD$，将这个关系式中的项都移到等式的一边去，也就是要证 $\frac{AE}{CE}\cdot\frac{CD}{BD}\cdot\frac{BF}{AF}=1$. 显然这是西瓦定理结论的表达式，所以由 $\triangle ABC$ 内 AD、BE、CF 三线共点于 P，那么直接应用西瓦定理就可以证明上述性质.

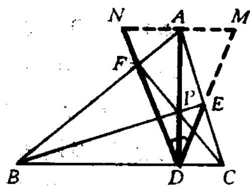


图 3·185

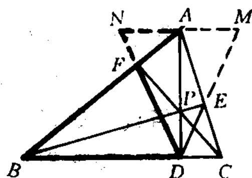


图 3·186

第五节　直角三角形斜边上的中线

【分析方法导引】

当几何问题中出现了直角三角形斜边上的中点

时，就应想到要应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明. 接下来就应将斜边上的中线添上. 进一步的分析就是：若斜边上的中点是条件，则直接推得斜边上的中线等于斜边的一半，并可直接应用两等腰三角形推得角之间的等量关系. 若斜边上的中点是要证明的结论，则应转而证明要证相等的这两条线段都和这条斜边上的中线相等，也就是转化为等腰三角形的判定问题或者也就是证明角相等的问题. 进一步也就是应用线段相等与角相等之间的等价关系来完成分析.

当几何问题中出现了线段之间的倍半关系，且倍线段是直角三角形的斜边时，就应想到要应用直角三角形斜边上的基本图形进行证明. 接下来就应将斜边上的中线添上，得到这条斜边上的中线等于斜边的一半，和相应的角之间的等量关系和倍半关系，问题就转化成要证明问题中出现的倍半关系中的半线段与这条斜边上的中线相等.

当几何问题中出现了两个角之间的倍半关系，且其中的半角是一个直角三角形的锐角时，就可想到要应用直角三角形斜边上的中线的基本图形进行证明. 接下来的问题也是将斜边上的中线添上，然后可应用两个等腰三角形的顶角的外角等于底角的两倍的性质来完成分析.

例 48 如图 3·187，已知：$\triangle ABC$ 中，BD、CE 是高，F、G 分别是 BC、DE 的中点. 求证：$FG \perp ED$.

分析：由条件 BD 是高，故$\triangle BCD$ 是直角三角形，于是条件中出现的 F 是 BC 的中点，就成为是直角三角形斜边的中点，从而就可以应用直角三角形斜边上的中线这个基本图形的性质进行证

图 3・187

图 3・188

明. 由于现在图形中出现了直角三角形而没有斜边上的中线，故应将这条斜边上的中线添上，即连结 DF，得 $DF=\frac{1}{2}BC$. 另一方面 CE 也是高，用同样的方法连结 EF 后，又可得 $EF=\frac{1}{2}BC$（如图 3・188），则 $EF=DF$. 但这是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，而已知 G 是 DE 的中点，所以应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质就可以证明 $FG\perp ED$.

本题的分析也可以直接从 $\angle BDC=\angle BEC=90°$ 开始，这样应用圆周角的基本图形的性质可得 B、C、D、E 四点共圆，且 BC 就是这个圆的直径，BC 的中点 F 就是这个圆的圆心. 由于 E、D 都在这个圆上，所以 DE 就是这个圆的一条弦，而已知 G 是 DE 的中点，出现了圆中弦的中点，所以可直接应用垂径定理证明 $FG\perp ED$.

例 49　如图 3・189，已知：梯形 $ABCD$ 中，$\angle A+\angle B=90°$，E、F 分别是上、下底 DC、AB 的中点. 求证：$EF=\frac{1}{2}(AB-CD)$.

分析：本题的条件中出现了梯形，所以可将梯形的问题转化到三角形中的问题来进行讨论. 由于结论中出现的 $AB-CD$ 是梯形两条底的差，所以转化的方法可以是作腰的平行线.

若考虑过顶点 D 作腰的平行线，则过 D 作 $DG/\!/CB$ 交 AB 于 G（如图 3・190）. 于是由 $DC/\!/AB$，就可得四边形 $DGBC$ 是平

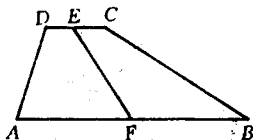


图 3・189

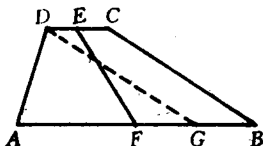


图 3・190

行四边形，$DC=GB$，所以 AG 就等于 $AB-GB=AB-CD$，这样问题就成为要证 $EF=\frac{1}{2}AG$. 同时，由 $DG \parallel CB$，又可得 $\angle B=\angle DGA$，那么条件中的 $\angle A+\angle B=90^\circ$，就成为 $\angle A+\angle DGA=90^\circ$，也就推得 $\angle ADG=90^\circ$. 而现在要证明的 $EF=\frac{1}{2}AG$ 是线段之间的倍半关系，且其中的倍线段 AG 现在是直角 $\triangle AGD$ 的斜边，从而就可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明. 由于现在图形中是有直角三角形而没有斜边上的中线，所以应将斜边上的中线添上，也就是取 AG 的中点 H，连结 DH（如图 3・191），这样即可得 $DH=\frac{1}{2}AG$，问题也就成为应证 $EF=DH$. 由于 H、F 分别是 AG、AB 的中点，所以 $HF=AF-AH=\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}AG=\frac{1}{2}(AB-AG)=\frac{1}{2}GB=\frac{1}{2}CD=DE$，且 $HF \parallel DE$，就可得四边形 $DHFE$ 也是平行四边形，$EF=DH$ 也就可以证明.

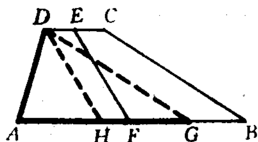


图 3・191

若考虑过 E 点作腰的平行线，则过 E 分别作 CB、DA 的平行线交 AB 于 H、G（如图 3・192），即可得 $\angle A=\angle EGH$，$\angle B=\angle EHG$，所以 $\angle A+\angle B=\angle EGH+\angle EHG=90^\circ$，也就可得 $\angle GEH=90^\circ$. 而由 $DC \parallel AB$，又可得四边形 $AGED$ 和 $BHEC$ 都

是平行四边形，$AG=DE$、$BH=EC$. 由于条件中还给出 F、E 分别是 AB、DC 的中点，所以 $GF=AF-AG=BF-DE=BF-EC=BF-BH=FH$，这样又出现了 F 是直角$\triangle GHE$ 的斜边的中点，所以可应用直角三角形斜边上的中线这个基本图形的性质进行证明，也就可得 $EF=\frac{1}{2}GH$，而 $GH=AB-(AG+BH)=AB-(DE+EC)=AB-CD$，所以分析可以完成.

图 3・192

本题的平行线还可考虑过其它的顶点或中点 F 作，对这些可能情况，请读者自行讨论.

由于本题条件中给出$\angle A+\angle B=90°$，因此以这两个角为内角的三角形是直角三角形. 由于这个直角三角形尚不完整，所以应先将直角三角形添全，即延长 AD、BC 相交于 G(如图 3・193)，得$\angle AGB=90°$. 于是条件中出现的 F、E 分别是 AB、DC 的中点，也就分别成为直角$\triangle GAB$ 和直角$\triangle GDC$ 的斜边的中点，从而就可以应用直角三角形斜边上的中线这个基本图形的性质进行证明. 由于已知图形中现在是有直角三角形而没有斜边上的中线，所以就应将斜边上的中线添上，也就是分别连结 GE、GF(如图，3・193)，即可得 $GE=ED=\frac{1}{2}DC$，$GF=FA=\frac{1}{2}AB$，从而就有 $GF-GE=\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}CD$. 将这一关系和结论进行比较可知问题应证 $EF=GF-GE$，也就是要证 G、E、F 在一直线上. 由于应用直角三角形斜边上中线的基本图形的性质还可得$\angle EDG=$

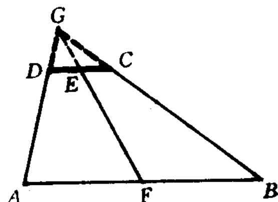


图 3・193

$\angle EGD$，$\angle FAG=\angle FGA$. 而条件中有 $DC /\!/ AB$，这两条平行线可以看作是被 AG 所截，所以 $\angle EDG=\angle FAG$，即得 $\angle EGD=\angle FGA$，GE 和 GF 重合，也就是 G、E、F 共线，分析完成.

例 50 如图 3·194，已知：$\odot O$ 和 $\odot O'$ 外切于 C，外公切线 AB 与 $\odot O$、$\odot O'$ 分别相切于 A、B，AB 的延长线与 OO' 的延长线相交于 S，过 S 作 $DE \perp AB$ 交 CB 和 AC 的延长线于 D、E. 求证：$SD=SE$.

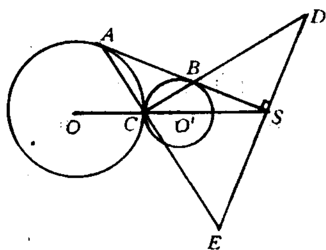


图 3·194

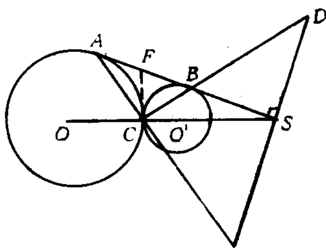


图 3·195

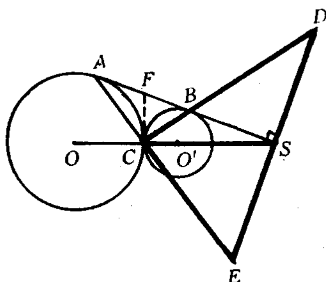


图 3·196

分析：本题条件中给出 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 外切于 C，OO' 是连心线，所以 OO' 必定经过 C 点. 又因为这是一个两圆外切也就是圆的组合图形问题，所以可转化到一个圆中的问题来进行讨论，转化的方法是添过切点的公切线，于是过 C 作两圆的内公切线交 AB 于 F（如图 3·195）. 这样对每一个圆来说都是切线的问题，从而可应

用弦切角的基本图形的性质进行证明，于是可分别证得 $FA=FC=FB$，$\angle FAC=\angle FCA$，$\angle FBC=\angle FCB$，进一步就可得$\angle ACB=90^\circ$，而 A、C、E 成一直线，所以又有$\angle BCE=90^\circ$，而要证的结论是 $SD=SE$，这样就出现了 S 是直角三角形 CDE 斜边 DE 的中点，从而就可以应用直角三角形的斜边上的中线这个基本图形的性质进行证明(如图 3·196)，也就是要证 $SD=SE$，就应证 SD 和 SE 都和 SC 相等.

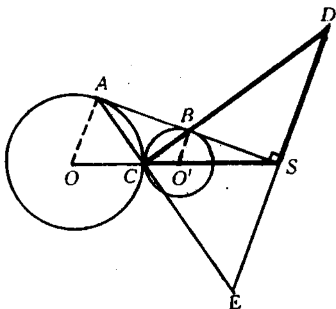


图 3·197

如果先考虑证 $SD=SC$. 由于已知 AB 与$\odot O'$相切于 B，所以就可应用切线的性质进行证明，于是连结 $O'B$(如图 3·197)后，可得$\angle SBO'$(弦切角)$=90^\circ$，$O'B\perp AB$，而条件中又给出 $SD\perp AB$，所以就得到 $O'B\parallel SD$，这样就出现了 $O'B$ 是三角形内一条边 SD 的平行线，所以就可应用平行线型相似三角形的性质进行证明，也就是可得$\triangle O'BC\backsim\triangle SDC$，而 $O'B$ 和 $O'C$ 是同一个圆，亦即$\odot O'$的半径，当然相等，$\triangle O'BC$ 是等腰三角形，所以$\triangle SDC$ 必定也是等腰三角形，也就是可证明 $SD=SC$. 根据同样的道理，连结 OA(如图 3·197)后可得$\triangle OAC\backsim\triangle SEC$，从而也可以进一步证得 $SE=SC$. 所以结论就得到证明.

例 51 如图 3·198，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=2\angle C$，AD 是高，延长 AB 到 E 使 $BE=BD$，ED 的延长线交 AC 于 F. 求证：(1)$AF=CF$；(2)$AB=DC-DB$.

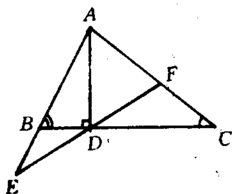


图 3·198

分析:(1)本题要证明 $AF=CF$,而已知$\angle ADC=90°$,就出现了 F 是直角$\triangle ACD$ 的斜边的中点,从而就要应用直角三角形斜边上的中线这个基本图形的性质进行证明(如图 3·199).这样要证明 $AF=CF$,就应证明 AF、CF 都与 DF 相等,也就是要证明 $AF=CF$ 的等价性质$\angle FDC=\angle C$ 成立.因$\angle FDC=\angle BDE$,所以问题就成为要证明$\angle BDE=\angle C$,而已知$\angle ABC=2\angle C$,则又应证$\angle ABC=2\angle BDE$.由条件 $BE=BD$,这是两条具有公共端点 B 的相等线段,它们可以组成一个等腰三角形,且因为 E、B、A 成一直线,出现了这个等腰三角形的顶角的外角,所以应用等腰三角形的基本图形的性质就可证明$\angle ABC=2\angle BDE$.

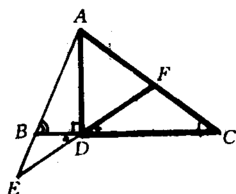


图 3·199

(2)现在要证的结论是 AB 等于 DC 和 DB 的差,所以可根据线段差的定义将 $DC-DB$ 作出来,再证明所得的线段与 AB 相等,于是在 DC 上截取 $DG=DB$,问题就成为应证 $GC=AB$.而由所作的 $DG=DB$ 和条件 $AD\perp BG$,就出现了一边上的中线和高重合,即 AD 是 BG 的中垂线,从而就可以应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质进行证明.这时应用添加的方法是将等腰三角形的腰添上,也就是连结 AG(如图 3·200),即可得 $AB=AG$,这样问题就转化成为要证 $AG=CG$.这是两条具有公共端点 G 的相等线段,它们就可以组成一个等腰三角形,问题也就成为一个等腰三角形的判定问题,又因为 B、G、C 成一直线,出现了这个

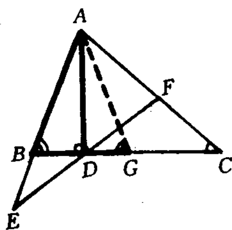


图 3·200

要证明的等腰三角形的顶角的外角，所以问题又可转化为证明 $AG=CG$ 的等价性质 $\angle AGB=2\angle C$. 但已知 $\angle ABC=2\angle C$，所以又应证 $\angle AGB=\angle ABC$，而这两个角是等腰 $\triangle ABG$ 的两个底角，当然相等，所以分析可以完成.

若在根据线段差的定义来进行分析时，考虑将线段差的关系转化为线段和的关系来进行讨论，那就可以先将结论变形为 $DC=AB+DB$，然后就可将 AB 和 DB 这两条线段接起来.

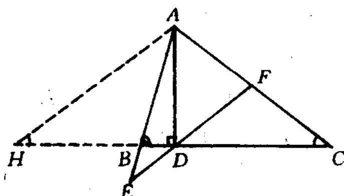


图 3・201

如果首先考虑将 AB 接到 DB 上，也就是延长 DB 到 H，使得 $BH=BA$（如图 3・201），那就要证明 $DH=DC$. 但由于 BH 和 BA 是两条具有公共端点 B 的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形的基本图形. 但这个等腰三角形目前只有两条腰而没有底边，所以应先将底边添上，也就是连接 AH（如图 3・201），又因为 H、B、D 成一直线，出现了这个等腰三角形顶角的外角，于是就可得 $\angle ABC=2\angle H$. 又因为已知 $\angle ABC=2\angle C$，所以就得 $\angle H=\angle C$，从而又可得 $\triangle AHC$ 也是等腰三角形，而 AD 是这个等腰三角形的底边上的高，所以 $DH=DC$ 就可以证明.

如果考虑将 DB 接到 AB 上，那么由已知 $BE=BD$，可得 DB 接到 AB 上所得到的线段就是 AE，问题就成为要证 $AE=DC$. 但这两条线段在图形中的位置不易建立它们之间的等量关系，所以应考虑将这两条线段改变位置，由于问题目前尚未直接出现与圆有关的关系，所以首先考虑将线段平移.

若将 DC 平行移动到与 AE 有公共的端点 A，则所得的线段 AG 与 DC 应平行且相等，所以可构成一个平行四边形也就是可

添加中心对称型全等三角形进行证明. 于是在作图时可过 A 作 DC 的平行线交 DF 的延长线于 G(如图 3・202),这样就可得 $\triangle CDF \cong \triangle AGF$, $DC = AG$. 问题就转化成证 $AE = AG$,而这是两条具有公共端点的相等线段,它们可以组成等腰三角形,问题也就成为一个等腰三角形的判定问题,所以可转而证明 $AE = AG$ 的等价性质 $\angle E = \angle G$,但我们已经可证 $\angle E = \angle FDC$,而由 $AG \parallel DC$,又可得 $\angle G = \angle FDC$,所以可完成证明.

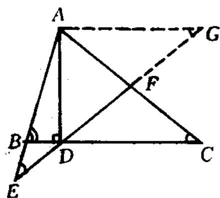


图 3・202

若将 DC 平行移动到与 AE 有公共的端点 E,也就是过 E 作 $EG \parallel DC$,且使 $EG = DC$(如图 3・203),那么四边形 $EGCD$ 应是平行四边形,但这个平行四边形尚缺少一条边 GC(如图 3・203),所以应先连结 GC,就可得 $GC \parallel ED$, $GC = ED$. 又因为在作出了 $EG = DC$ 后,问题就转化为应证 $EA = EG$,而这是两条具有公共端点的相等线段,所以它们可组成一个等腰三角形,但这个等腰三角形只有两腰而没有底边,所以应将底边添上,也就是连接 AG 并设交 EF 于 H(如图 3・203). 那么这个$\triangle EAG$ 就应是等腰三角形. 在这个三角形中,我们已证明$\angle AEF = \angle FDC$,而由 $EG \parallel DC$,且可以看作被 EF 所截又可得$\angle FDC = \angle FEG$,所以$\angle AEF = \angle GEF$, EH 是$\triangle EAG$ 的一条角平分线. 另一方面,我们已证 F 是 AC 的中点, $FH \parallel CG$,应用三角形中位线的基本图形的性质可得 H 是 AG 的中点, EH 是$\triangle EAG$ 的一条中线,所以应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质,也就是由$\dfrac{EG}{EA} = \dfrac{GH}{AH}$和 $GH = AH$,就可以证

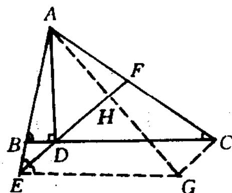


图 3・203

明 $EA=EG$.

若考虑将 EA 平行移动到与 DC 有公共的端点 D,则过 D 作 $DG /\!/ EA$,且使 $DG=EA$(如图 3・204),那么四边形 $AEDG$ 就是平行四边形,于是也应连接 AG,应用平行四边形的性质就可得 $\angle E=\angle AGD$, $\angle E=\angle GDF$. 而我们已证 $\angle E=\angle C$,所以 $\angle AGD=\angle C$,就可得 A、D、C、G 四点共圆. 又因为已知 $\angle ADC=90°$,且 F 是 AC 的中点,所以这个圆就是 $\triangle ACD$ 的外接圆,也就是以 AC 为直径的圆,而 F 就是这个圆的圆心,所以 FG 也是这个圆的半径,那么连接 FG 后,有 $FG=FD=FC$,这样就出现了 $\triangle FGD$ 和 $\triangle FCD$ 是两个腰和底角都相等的等腰三角形,所以它们一定全等,从而也就可以证明 $DG=DC$,分析就可以完成.

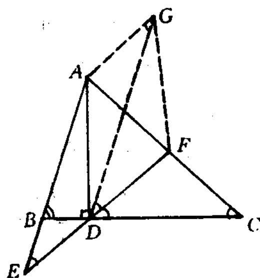


图 3・204

在将 EA 平行移动到 DG,也就是过 D 作 $DG /\!/ EA$,且使 $DG=EA$ 后,问题就成为应证 $DG=DC$. 由于这是两条具有公共端点的相等线段,所以它们应组成一个等腰三角形,而现在这个等腰三角形只有两条腰而没有底边,所以应将底边添上,也就是连结 GC(如图 3・205). 又因为 $DG /\!/ EA$,且可以看作是被 EF 所截,所以 $\angle GDF=\angle E$,我们已证 $\angle E=\angle FDC$,就可得 $\angle GDF=\angle CDF$, FD 就应是这个等腰三角形的顶角的角平分线,从而就可应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质进行证明,但现在这条角平分线 DF 尚未与 CG 相交,所以应将它们延长到相交,于是

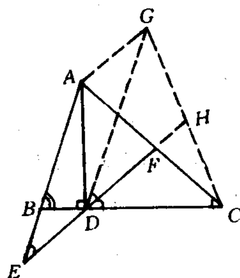


图 3・205

延长 DF 交 CG 于 H(如图 3·205),由于 $DC=DG$ 是要证明的结论,不能用,所以只能转而证明 $GH=CH$ 和 $DH\perp CG$ 中的一个性质.由于我们已经证明 $AF=CF$,而连接 AG 后,由四边形 $AEDG$ 是平行四边形可得 $AG/\!/ED$,即 $AG/\!/FH$,所以 $GH=CH$ 可以证明,从而就又可进一步证明 $DG=DC$.

如果考虑$\angle AGD=\angle E=\angle C$,可得 A、D、C、G 四点共圆,那么再由$\angle ADC=90°$,可得$\angle AGC$ 也等于 90°,而 $AG/\!/DH$,所以 $DH\perp CG$ 可以证明,从而也可进一步证明 $DG=DC$.

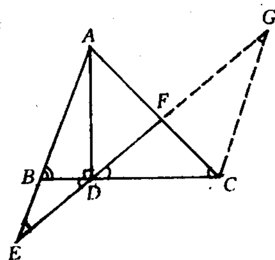


图 3·206

若考虑将 EA 平行移动到与 DC 有公共的端点 C,则应过 C 作 $CG/\!/EA$,且使 $CG=EA$(如图 3·206),这样又可以应用中心对称型全等三角形进行证明,具体作图也可直接过 C 作 $CG/\!/EA$ 交 EF 的延长线于 G,也就可得$\triangle AEF\cong\triangle CGF$,$AE=CG$,那么问题就成为要证 $CD=CG$.现在这是两条具有公共端点的相等线段,它们可组成一个等腰三角形,问题也就成为一个等腰三角形的判定问题,从而问题就转化成应证 $CD=CG$ 的等价性质$\angle G=\angle GDC$.由于我们已经证明$\angle E=\angle GDC$,而由$\triangle AEF\cong\triangle CGF$,又可得$\angle E=\angle G$,所以上述性质可以证明,分析也就可以完成.

例 52 如图 3·207,已知:E、F 是正方形 $ABCD$ 的边 AD 的延长线上的两点,且 $DE=DC$,$DF=DB$,BF 分别交 CD、CE 于 G、H.

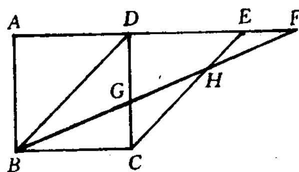


图 3·207

求证：$GH=FH$.

分析：本题要证的结论是$GH=FH$，而条件中又给出$\angle ADC=90^\circ$，A、D、F成一直线，所以$\angle FDC$也等于90°，这样就出现了H是直角$\triangle FGD$的斜边GF的中点，从而就可应用直角三角形斜边上中线的基本图形的性质进行证明. 现在图形中是有直角三角形而没有斜边上的中线，所以应将斜边上的中线添上，也就是连结DH（如图3·208），这样要证明$GH=FH$，就应证明GH和FH都和DH相等，也就是要证$GH=DH$、$FH=DH$，进一步也就是要证$\angle HDG=\angle HGD$和$\angle F=\angle HDF$.

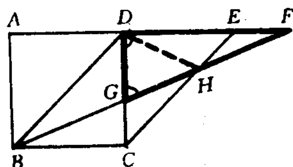


图3·208

若先考虑证$\angle HDG=\angle HGD$. 由条件$DF=DB$，这是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，即$\triangle DBF$（如图3·209）. 又因为已知四边形$ABCD$是正方形，所以$DF\parallel BC$，这样就出现了等腰三角形和平行线的组合关系，所以必定可以得到一条角平分线，也就是由$DB=DF$，得$\angle DBF=\angle F$，再由$DF\parallel BC$，且可以看作是被BF所截，得$\angle F=\angle FBC$，从而推得$\angle DBF=\angle FBC$. 而由正方形的性质可得$\angle CBD=45^\circ$，所以就有$\angle DBF=\angle FBC=\frac{45^\circ}{2}$.

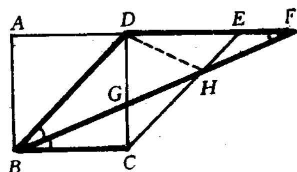


图3·209

在得到了BF是$\angle CBD$的角平分线以后，由于$DE\parallel BC$，且$DE=DC=BC$，所以四边形$DBCE$也是一个平行四边形，那就有$CE\parallel BD$，这样又出现了一次角平分线和平行线的组合关系，从而

一定可得到一个等腰三角形的基本图形，由于 CE 是角的一边 BD 的平行线，所以它一定和角的另一边 BC 以及角平分线 BF 相交构成等腰三角形，由此就可以找到这个三角形应是$\triangle CBH$（如图 3·210），也就是由 $CE \parallel BD$，得 $\angle CHB=\angle HBD$ 和 $\angle HBD=\angle CBH$，得 $\angle CHB=\angle CBH=\frac{45^\circ}{2}$，$CH=CB$.

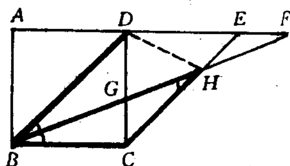


图 3·210

由条件四边形 $ABCD$ 是正方形，$CD=CB$，所以 $CH=CD$，这又是两条具有公共端点 C 的相等线段，它们又可以组成一个等腰三角形，而它的顶角$\angle HCD$ 是等腰直角$\triangle DCE$ 的一个底角应是 45°，所以就有$\angle HDC=\angle DHC=\frac{1}{2}(180^\circ-45^\circ)=\frac{135^\circ}{2}$. 而已证 $\angle CHB=\frac{45^\circ}{2}$，所以$\angle DHG=\angle DHC-\angle BHC=\frac{135^\circ}{2}-\frac{45^\circ}{2}=45^\circ$，那么在$\triangle HDG$ 中应用三角形内角和定理就可得$\angle HGD=\frac{135^\circ}{2}$. 所以$\angle HDG=\angle HGD$，$GH=DH$. 再进一步由$\angle FDG=90^\circ$，应用等角的余角相等的定理就可得$\angle F=\angle HDF$，$FH=DH$，分析就可以完成.

例 54 如图 3·211，已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，$BE\perp AD$，垂足是 E，$EF\parallel CA$ 交 AB 于 F. 求证：$AF=BF$.

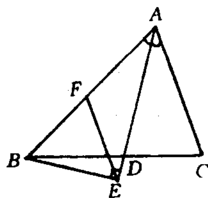


图 3·211

分析：本题要证明的结论是 $AF=BF$，而已知$\angle AEB=90^\circ$，这样就出现了 F 是直角$\triangle ABE$ 的斜边 AB 的中点，所以就可以应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明（如图 3·212）. 于是要证明 AF

$=BF$，就应证明 AF、BF 都与 EF 相等. 由条件 AD 是角平分线，且 $EF /\!/ CA$，所以就出现了角平分线和平行线的组合关系，也就必定构成一个等腰三角形的基本图形. 由于 EF 是角的一边 CA 的平行线，所以它应和角的另一边 AB 以及角平分线 AD 相交组成等腰三角形，即可找到这个三角形是 $\triangle FAE$（如图 3・212），于是由 $EF /\!/ CA$，且被 EA 所截，可得 $\angle FEA=\angle CAD$，又因为已知 $\angle BAD=\angle CAD$，所以有 $\angle FAE=\angle FEA$，$AF=EF$. 再由 $\angle AEB=90°$，应用等角的余角相等就可证明 $\angle FBE=\angle FEB$，$BF=EF$，分析就可以完成.

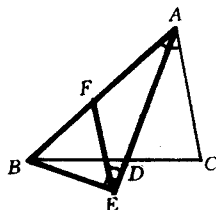


图 3・212

如果考虑条件中出现的 AD 是角平分线和 $BE \perp AD$，就出现了角平分线和向角平分线作的垂线之间的组合关系，从而也可构成一个等腰三角形的基本图形. 由于角平分线 AE 的垂线 BE 尚未与角的边 AC 相交，所以延长 BE 交 AC 的延长线于 G 后（如图 3・213），就可得 $\triangle ABE \cong \triangle AGE$，$BE=GE$，那么再由 $EF /\!/ GA$，也就可证明 $AF=BF$.

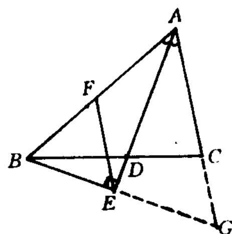


图 3・213

例 54 如图 3・214，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，D 是 AB 的中点，E 是 AC 上的一点，且 $CE=BD$，ED 的延长线交 CB 的延长线于 F. 求证：$\angle F=\frac{1}{2}\angle A$.

分析：本题的条件中出现了 $\angle C=90°$和 D 是斜边 AB 的中点，所以可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形进行证明. 由于图形中只有直角三角形而没有斜边上的中线，所以应将斜边上

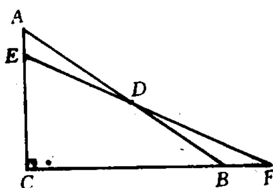


图 3・214

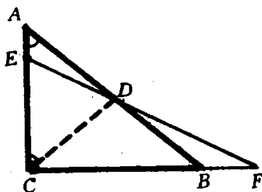


图 3・215

的中线添上，也就是连结 CD(如图 3・215)，即可得 $CD=AD=BD$，$\angle A=\angle DCA$，这样问题就成为应证$\angle F=\frac{1}{2}\angle DCA$.

由条件 $CE=BD$，又可得 $CE=CD$，这是两条具有公共端点 C 的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，而要证明的性质中的倍角，即$\angle DCA$ 就是这个等腰三角形的顶角.

现在我们要证明的性质是两个角之间的倍半关系，所以可根据角的倍半关系的定义，将大的角两等分，也就是作$\angle DCA$ 的角平分线并交 DE 于 G 后(如图 3・216)，证明它的一半，亦即$\angle ECG$ 和$\angle F$ 相等. 由于我们作的是等腰三角形顶角的角平分线，所以可应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质得 $CG\perp DE$，而已知$\angle ECF=90°$，这样 CG 就成为直角$\triangle EFC$ 的斜边上的高，于是应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质就能推得$\angle ECG=\angle F$.

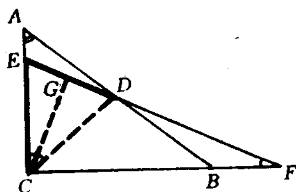


图 3・216

在证明两个角的倍关系时，也可以根据角的倍半关系的定义，作出小的角的两倍，再证明所作出的角与大的角相等. 于是以 FC 为边，F 为顶点作$\angle CFG=\angle CFE$，且交 AC 的延长线于 G(如图 3

· 217)，问题就成为要证$\angle EFG=\angle DCE$. 由于作出FG后CF就是$\angle EFG$的角平分线，且$EG\perp FC$，出现了角平分线和向角平分线所作垂线之间的组合关系，从而可得到$\triangle FEG$是等腰三角形，亦即$FE=FG$，而我们已证$\triangle CDE$也是等腰三角形，$CE=CD$，且这两个等腰三角形有一个公共的底角，即$\angle DEC$，所以它们的顶角必定相等，分析也就可以完成.

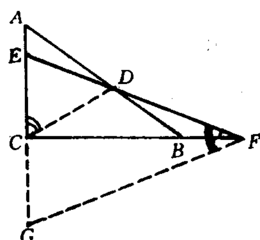


图 3 · 217

例 55 如图 3 · 218，已知：D是半圆O的直径AB上的一点，AC是弦，过D作AB的垂线交AC于E，交BC的延长线于F，过C作半圆的切线交EF于G. 求证：$EG=FG$.

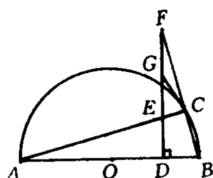


图 3 · 218

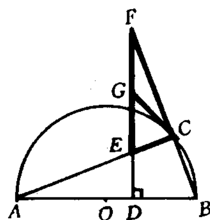


图 3 · 219

分析：本题条件中出现AB是半圆的直径，C是半圆上的一点，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明，于是可得$\angle ACB=90°$，又因为B、C、F成一直线，所以$\angle ECF$也等于$90°$.

本题要证的结论是$EG=FG$，这样就出现了G应是直角$\triangle FEC$的斜边的中点，从而就可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明（如图 3 · 219），也就是要证明$EG=$

FG，就应证明 EG 和 FG 都和 CG 相等，进一步也就是转化为要证明 $EG=FG$ 的等价性质 $\angle GCE=\angle GEC$.

由条件 GC 与半圆相切于 C，CA 是过切点的弦，所以可应用弦切角的基本图形的性质进行证明，也就可得 $\angle GCA=\angle B$，这样问题就成为要证 $\angle GEC$ 也等于 $\angle B$. 从图形上我们可以看出 $\angle GEC$ 是四边形 $EDBC$ 的一个外角，因此要证 $\angle GEC=\angle B$，就应证 E、D、B、C 四点共圆，而已知 $\angle EDB=90°$，已证明 $\angle ECB=90°$，所以 E、D、B、C 四点共圆可以证明.

在得到了 $\angle GCE=\angle GEC$ 后，即可推得 $EG=CG$，而由 $\angle ECF=90°$，又可推得 $\angle GCF=\angle F$，又可得 $FG=CG$，分析就可以完成.

例 56 如图 3·220，已知：$\triangle ABC$ 中，M 是 BC 的中点，AX 是过 A 的一直线，$BE\perp AX$，$CF\perp AX$，垂足分别是 E、F. 求证：$ME=MF$.

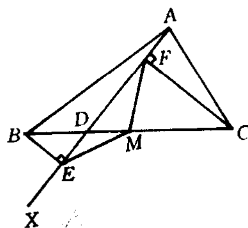


图 3·220

分析：本题条件中出现 $BM=CM$，且 $BE\perp AX$，$CF\perp AX$，所以 $BE/\!/FC$，这是过 BC 的两个端点所作的平行线，所以可添加中心对称型全等三角形进行证明. 添加的方法是将过端点的平行线与过中点的直线相交，于是延长 EM 交 CF 于 G(如图 3·221)，即可证明 $\triangle BME\cong\triangle CMG$，$EM=GM$. 又因为已知 $\angle EFG=90°$，这样就出现了 M 是直角 $\triangle EGF$ 的斜边 EG 的中点，从而就可以直接应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质证明 $ME=MF$(如图 3·222).

在将过端点的平行线与过中点的直线相交时，也可以延长 FM 交 BE 的延长线于 G(如图 3·223)，那就可证明 $\triangle BGM\cong$

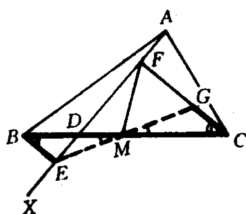


图 3・221

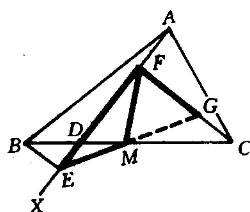


图 3・222

$\triangle CFM$，$GM=FM$，而$\angle FEG=90°$，所以也可以直接应用直角三角形斜边上中线的性质证得 $ME=MF$.

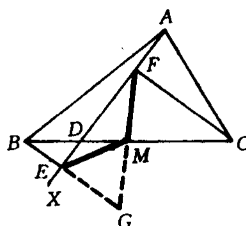


图 3・223

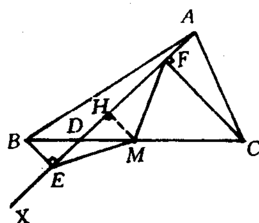


图 3・224

本题要证明 $ME=MF$，这是两条具有公共端点 M 的相等线段，所以它们可以组成一个等腰三角形. 而要证明这个等腰三角形，也可以应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质进行证明. 于是首先应将等腰三角形中的这条重要线段添上，也就是作 $MH\perp EF$，垂足设为 H（如图 3・224），则证明 $ME=MF$ 就可以转化为要证 $EH=FH$. 而由 $MH\perp EF$，又可以得 $MH/\!/CF/\!/EB$，这样就出现了 MH 是$\triangle DCF$（可设 AX 交 BC 于 D）内一条边 CF 的平行线段，所以可应用平行线型相似三角形进行证明，于是由 $MH/\!/CF$，可得$\triangle DMH\backsim\triangle DCF$，$\frac{DH}{FH}=\frac{DM}{CM}$. 而由 $MH/\!/$

EB，可得这也是两条平行线段，且它们四个端点两两的连线在 D 点相交，所以又可应用平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明. 于是由 $MH /\!/ EB$，可得$\triangle MHD \backsim \triangle BED$，$\frac{DH}{EH}=\frac{DM}{BM}$，但已知 $BM=CM$，所以有$\frac{DH}{FH}=\frac{DH}{EH}$，从而就可证明 $EH=FH$，分析也就可以完成.

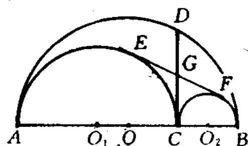


图 3・225

例 57 如图 3・225，已知：C 是半圆 O 的直径 AB 上的一点，$CD \perp AB$ 交半圆于 D，以 AC、BC 为直径分别作半圆 O_1、半圆 O_2，EF 是两半圆的外公切线，且与 CD 相交于 G. 求证：CD、EF 互相平分.

分析：由条件 AB、AC、BC 分别是半圆 O、半圆 O_1 和半圆 O_2 的直径，所以半圆 O_1 和半圆 O_2 在 C 点外切，而已知 $CD \perp AB$，可得 CD 是半圆 O_1 和半圆 O_2 的内公切线，从而就可以在每一个半圆中，应用弦切角的基本图形的性质得 $\angle GEC=\angle GCE$，$\angle GFC=\angle GCF$，$GE=GC$ 和 $GF=GC$，这样就出现了一个直角三角形斜边上的中线的基本图形，也就是可得$\angle ECF=90°$（如图 3・226）.

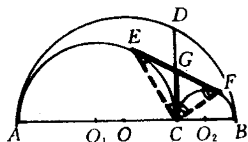


图 3・226

由结论 CD、EF 互相平分，可得四边形 $ECFD$ 应是一个平行四边形，而由$\angle ECF=90°$，可得这个四边形应是一个矩形，从而$\angle EDF$ 也应等于 $90°$. 但由于$\angle EDF$ 是一个圆周角，而这个圆周角现在是直角，所以应用半圆上的圆周角的基本图形的性质可得 DE、DF 的延长线应分别经过直径的端点 A 和 B，因此问题实质上就是要证明 A、E、D 共线和 B、F、D 共线（如图 3・227）.

而要证明这两组三点共线，我们可以直接连接 AD、BD 且设

分别与半圆 O_1 和半圆 O_2 相交于 E' 和 F'，然后证明 E' 和 F' 就是 E 点和 F 点。由条件 AB 是半圆 O 的直径，D 是半圆上的一点，所以 $\angle ADB=90°$，根据同样的道理，连结 $E'C$、$F'C$ 后，有 $\angle AE'C=90°$，$\angle BF'C=90°$，从而可得 $\angle DE'C=\angle DF'C=\angle E'DF'=90°$，四边形 $DE'CF'$ 是矩形，所以 $\angle F'DC=\angle F'E'C$。又因为已知 $DC\perp AB$，就出现了 DC 是直角 $\triangle ABD$ 的斜边 AB 上的高，从而就可以应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质得 $\angle A=\angle BDC$，这样就进一步推得 $\angle F'E'C=\angle A$，于是就可应用弦切角的基本图形的性质得到 $F'E'$ 与 $\triangle CE'A$ 的外接圆，也即与半圆 O_1 相切于 E'。同样的道理也可以证明 $E'F'$ 与半圆 O_2 相切于 F'，也就是 $E'F'$ 与半圆 O_1 和半圆 O_2 的外公切线，切点分别是 E'、F'，所以 E' 和 F' 分别与 E、F 重合。而 CD 和 $E'F'$ 是互相平分的，所以 EF 和 CD 互相平分也就可以证明。

图 3・227

例 58 如图 3・228，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，D 是 BC 上的一点，以 BD 为直径的半圆交 AB 于 E，且 $CE=\frac{1}{2}BD$。

求证：$\angle CDA=3\angle CBA$。

图 3・228

分析：由 BD 是半圆的直径，就可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明。现在图形中是有直径，有半圆上的点 E，而没有圆周角，故应先将圆周角添出，即连结 DE（如图 3・229），就可得 $\angle DEB=90°$。于是条件中出现的线段之间的倍半关系 $CE=\frac{1}{2}BD$ 中的倍线段 BD 就成为直角 $\triangle BDE$ 的斜边，从而就可以应用直角

三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明. 但图形中这条斜边上的中线尚未出现，所以连结 OE，得 $OE=\frac{1}{2}BD$（如图 3·229），这样又可进一步推得 $CE=OE$，这是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，应用等腰三角形的基本图形的性质就可得 $\angle ECO=\angle EOC$. 而根据直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质，又可得 $\angle EOC=2\angle B$，所以就有 $\angle ECO=2\angle B$. 又因为条件中给出 B、D、C 成一直线，所以结论中出现的 $\angle CDA$ 就成为 $\triangle ABD$ 的一个外角，那么应用三角形外角定理就可得 $\angle CDA=\angle DAB+\angle B$，而要证的结论是 $\angle CDA=3\angle B$. 将两式进行比较，可得问题转化成为要证 $\angle DAB=2\angle B$，也就是要证 $\angle DAB=\angle ECD$，这样问题就成为要证 A、E、D、C 四点共圆. 而由条件 B、E、A 成一直线，$\angle BED=\angle ACB=90°$，就可以证明这个性质，分析也就完成.

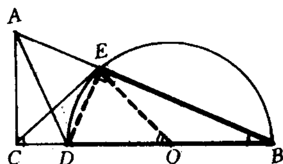


图 3·229

例 59 如图 3·230，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，AD 是高，E 是 BC 的中点. 求证：$DE=\frac{1}{2}AB$.

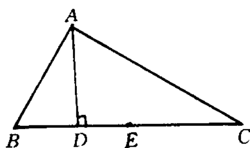


图 3·230

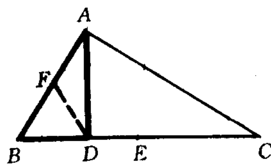


图 3·231

分析：本题的结论 $DE=\frac{1}{2}AB$ 是两条线段之间的倍半关系，且其中的 AB 是直角 $\triangle ABD$ 的斜边，所以就可应用直角三角形斜边上的中线这个基本图形的性质进行证明. 于是要添斜边上的中

线，即取 AB 的中点 F，连结 DF，得 $DF=\frac{1}{2}AB$（如图 3・231），从而问题就转化成为应证 $DF=DE$.

而由所作的 F 是 AB 的中点和条件 E 是 BC 的中点，出现了两个中点，是多个中点问题，从而可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 由于中点 E、F 所在的线段 BC、BA 有公共端点 B，可以组成三角形. 所以 E、F 这两个中点的连线就是三角形的中位线. 但现在是有三角形而没有中位线，从而需将中位线添上，即连结 EF，可得 $EF\parallel CA$（如图 3・232）.

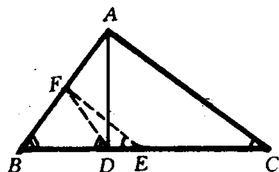


图 3・232

现在我们要证的性质是 $DF=DE$，而它们是两条具有公共端点的相等线段，就可以组成一个等腰三角形，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题，又因为 E、D、B 成一直线，图形中出现了这个要证明的等腰三角形的顶角的外角，所以要证明 $DF=DE$，就可以转化成要证它的等价性质 $\angle FDB=2\angle FEB$. 又因为由直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质，可得 $FD=FB$，$\angle FDB=\angle B$，而由条件 $\angle B=2\angle C$，所以问题就成为要证 $\angle C=\angle FEB$，或者进一步就是要证 $EF\parallel CA$，而这个性质我们已经证明，从而可完成分析.

由于本题要证的结论 $DE=\frac{1}{2}AB$ 是两条线段之间的倍半关系，且条件中出现了 E 是 BC 的中点，上述关系式中的半线段 DE 的一个端点 E 是中点，所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明.

若考虑将倍线段 AB 取作三角形的边，那么由 E 是 BC 的中点，所以 AB 应看作是 $\triangle ABC$ 的一条边，现在图形中就是有三角形而没有中位线，所以应将三角形的中位线添上，也就是取 AC 的

中点 F，并连结 EF(如图 3・233)，就可得 $EF /\!/ BA, EF=\frac{1}{2}BA, \angle B=\angle FEC$. 而已知 $\angle B=2\angle C$，所以有 $\angle FEC=2\angle C$.

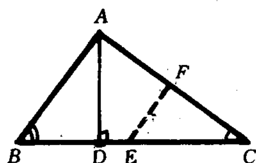


图 3・233

而在作了 AC 的中点 F 后，由条件 $\angle ADC=90°$，所以 F 就成为直角 $\triangle ACD$ 的斜边的中点，这样又可以应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明. 由于现在图形中是有直角三角形，而没有斜边上的中线，所以应将斜边上的中线添上，于是连结 FD(如图 3・234)，就可得 $FD=FC=\frac{1}{2}AC, \angle C=\angle FDC$，这样又可进一步推得 $\angle FEC=2\angle FDC$. 而已知 D、E、C 成一直线，$\angle FEC$ 是 $\triangle EFD$ 的一个外角，从而可证明 $ED=EF$，而 $EF=\frac{1}{2}AB$，所以 $DE=\frac{1}{2}AB$ 可以证明.

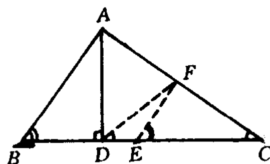


图 3・234

若考虑将半线段 DE 取作三角形的中位线，则首先应使 DE 的两个端点 D 和 E 都成为线段的中点. 首先考虑 D 点，则延长 AD 到 F，使 $DF=AD$. 接下来就应考虑 E 点，尽管条件中已给出 E 是 BC 的中点，但由于 E 所在的线段 BC 和 D 所在的线段 AF 没有公共的端点，不能组成三角形，所以这个中点的条件还不能用. 由于 E 所在的线段必须要与 D 所在的线段 AF 有公共的端点，所以这个公共端点只能是取 A 或者取 F 点.

若考虑取公共端点为 A，则连结 AE，并延长 AE 到 G 使 $GE=AE$，这样 DE 这两个中点的连线就成为三角形的中位线，而现在图形中就出现了有中位线而三角形不完整，所以应将三角形的

边添上，也就是连结 FG（如图 3·235），就可得 $DE /\!/ FG$，且 $DE=\frac{1}{2}FG$，这样问题就转化为要证 $AB=FG$.

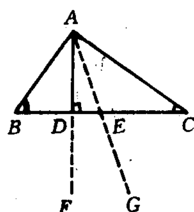


图 3·235

又因为作了 $AE=GE$ 后，由于条件中还给出了 $BE=CE$，且 BC、AG 在 E 点相交，这样就出现了这两组相等线段都位于一组对顶角，即 $\angle AEB$ 和 $\angle GEC$ 的两边而且成一直线，所以可添加一对中心对称型全等三角形进行证明，由于现在出现的是两组相等线段，所以添加的方法是将这四个端点两两连结起来，于是连结 GC（如图 3·236），即可得 $\triangle AEB \cong \triangle GEC$，$AB=GC$，且可得 $\angle B=\angle GCB$，$\angle GCB=2\angle ACB$. 而问题则转化成要证 $FG=CG$. 但这是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，但这个等腰三角形目前只有两条腰而没有底边，所以应将底边添上，也就是连结 FC（如图 3·236），问题也就成为一个等腰三角形的判定问题，即要证明 $FG=CG$，就可以转化成证它的等价性质 $\angle GCF=\angle GFC$. 而我们已经证明 $DC /\!/ FG$，这样就出现了一次等腰三角形和平行线的组合关系，所以一定得到一条角平分线，也就是由 DC、FG 这一组平行线被 FC 所截，可得 $\angle GFC=\angle BCF$. 问题就成为要证 $\angle BCF=\angle GCF$，FC 是 $\angle GCB$ 的角平分线，进一步也就是要证 $\angle GCB=2\angle BCF$. 但我们已证得 $\angle GCB=2\angle ACB$，所以问题又成为要证 $\angle BCF=\angle BCA$. 由条件 $AD\perp BC$ 和所作的 $AD=FD$，可得 CB 是 AF 的垂直平分线，所以应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质就可以证明 $CA=CF$ 和 $\angle BCF=\angle BCA$，分析就可以完成.

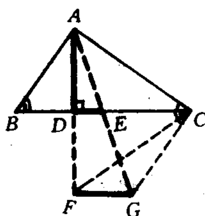


图 3·236

若考虑取公共端点为 F，则连结 FE，并延长 FE 到 G，使 $GE=FE$，那么 DE 就应是 $\triangle FGA$ 的中位线，所以连结 AG 后（如图 3・237），可得 $DE /\!/ AG$，$DE=\frac{1}{2}AG$. 这样问题就转化成为要证 $AB=AG$，而这是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成等腰三角形，所以连结 BG 后，应证 $\angle ABG=\angle AGB$. 而由 $AG /\!/ BC$，且可以看作是被 BG 所截，所以 $\angle AGB=\angle CBG$，从而又应证 $\angle ABG=\angle GBC$，BG 是 $\angle ABC$ 的角平分线，$\angle ABC=2\angle GBC$. 由条件 $\angle ABC=2\angle ACB$，从而问题又转化为要证 $\angle GBC=\angle ACB$.

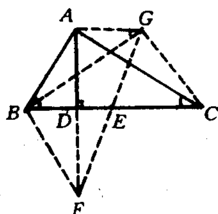


图 3・237

又因为 $BE=CE$，$FE=GE$，这两组相等线段也是位于一组对顶角，即 $\angle BEF$ 和 $\angle CEG$ 的两边，且成一直线，所以也可添加一对中心对称型全等三角形进行证明，添加的方法是将四个端点两两连结起来，也就是连结 BF、GC（如图 3・237），就可推得 $\triangle BEF \cong \triangle CEG$，$BF=CG$. 又因为 BC 是 AF 的垂直平分线，应用线段垂直平分线的性质又可得 $BA=BF$，所以 $AB=GC$，四边形 $ABCG$ 就是一个等腰梯形，而在等腰梯形内，应用图形的轴对称性质，或者通过一对轴对称型的全等三角形，即 $\triangle ACB \cong \triangle GBC$，就可以证明上述性质，从而完成分析.

第四章 与圆有关的角

第一节 圆周角

【分析方法导引】

在有关圆的问题中，如果不考虑有关线段之间的数量关系时，就应想到要应用与圆有关的角的基本图形进行证明.

当几何问题中出现了同一个圆上的四点时，就可以想到应用圆周角的基本图形进行证明. 接下来就应分析问题中出现的所要研究和讨论的角是出现在圆内接四边形的内角或外角上，还是出现在同弧所对的圆周角上. 若出现在圆内接四边形的内角或外角上，则添圆内接四边形的边而不必连对角线，然后应用对角的互补关系或外角与内对角的等量关系来完成证明. 若出现在同弧所对的圆周角上，则添加两条对角线而不必添一组对边，然后应用同弧所对圆周角的等量关系完成分析.

当几何问题中出现了圆的直径和半圆上的一点或者出现了 90°的圆周角时，就可想到要应用半圆上的圆周角的基本图形进行分析. 如有直径和半圆上的点而没有圆周角时，应将半圆上的点与直径的两端点分别连接；如有 90°的圆周角而没有直径时，应连结圆周角的两边与圆的交点，而这条连线必定

过圆心，也就必定是圆的直径．接下来就可以应用直角三角形的性质完成分析．

当几何问题中出现了相交圆的问题时，就应想到要将问题转化到一个圆中的问题来进行分析和讨论，转化的方法是添加公共弦．接下来就可以分别在每一个圆中应用圆周角的基本图形的性质来完成分析．

例 1 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是 AC 的中点，DE 是 $\angle ADB$ 的角平分线，$\triangle AED$ 的外接圆交 BD 于 F．求证：$BF=2AE$.

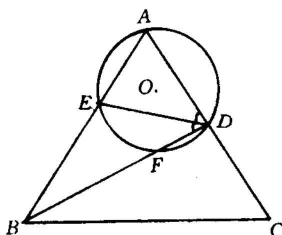


图 4・1

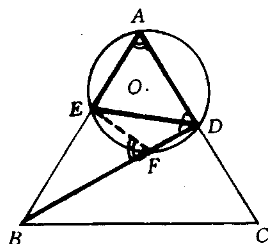


图 4・2

分析：本题的条件中出现了 A、E、F、D 四点共圆，所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明．由于图形中的圆内接四边形尚不完整，所以首先考虑连结 EF．由于条件中给出 $\angle ADE=\angle BDE$，而这两个角都是圆周角，所以应用圆周角的性质就可得 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{FE}$，$AE=FE$．这样问题就成为要证 $BF=2FE$.

又因为 A、E、F、D 四点共圆，且 D、F、B 成一直线，所以应用圆周角的基本图形或者也就是圆内接四边形的性质，又可得 $\angle BFE=\angle A$，这样就出现了 EF 是$\triangle BAD$ 内一条边 DA 的逆平行线段，从而就可以应用逆平行线型相似三角形进行证明．于是由

$\angle BFE=\angle A$ 和 $\angle FBE=\angle ABD$ 可得 $\triangle BEF\backsim\triangle BDA$，$\frac{BF}{EF}=\frac{AB}{AD}$. 但已知 $AB=AC$，且 D 是 AC 的中点，$\frac{AC}{AD}=2$，所以 $\frac{AB}{AD}=2$，从而也可证明 $\frac{BF}{EF}=2$，分析完成.

例 2 已知：$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$\angle A$ 的外角平分线交 $\odot O$ 于 D. 求证：$DB=DC$.

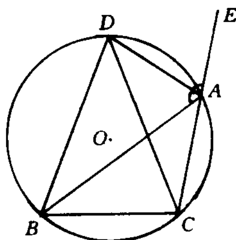


图 4·3

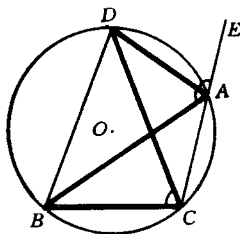


图 4·4

分析：由条件 A、D、B、C 四点共圆，所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 由于图中 $\angle DAB$ 是一个圆周角，所以根据同弧所对的圆周角相等的性质可得 $\angle DAB=\angle DCB$. 又因为由 A、D、B、C 四点共圆和 C、A、E 成一直线，又可得 $\angle EAD=\angle CBD$. 而由条件可知 $\angle BAD=\angle EAD$，就可得 $\angle DBC=\angle DCB$，那末 $DB=DC$ 也就可以证明.

例 3 已知：$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，角平分线 AD、CE 相交于 I，AD 的延长线交 $\odot O$ 于 P. 求证：$PB=PC=PI$.

分析：本题条件中出现了 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，P 是 $\odot O$ 上的点，也就是出现了 A、B、P、C 四点共圆，所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明.

由条件 $\angle BAP=\angle CAP$，且这两个角都是圆周角，所以可得 $\overset{\frown}{PB}=\overset{\frown}{PC}$，并可进一步推得 $PB=PC$.

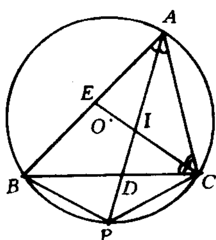


图 4・5

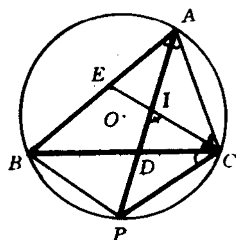


图 4・6

接下来的问题就是要证明 $PI=PC$，这是两条具有公共端点 P 的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题. 于是要证 $PI=PC$，就可转化为证明它的等价性质 $\angle PIC=\angle PCI$. 从图形中我们可以看出 $\angle PCI=\angle PCD+\angle DCI$，而由 A、I、P 成一直线，可得 $\angle PIC$ 是 $\triangle ACI$ 的外角，$\angle PIC=\angle IAC+\angle ACI$，由条件 $\angle DCI=\angle ACI$，所以问题又成为要证 $\angle PCD=\angle IAC$，那末由 A、B、P、C 四点共圆，可得 $\angle PCB=\angle PAB$，而已知 $\angle PAB=\angle PAC$，所以分析可以完成.

例 4 已知：$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，I、K 分别是 $\triangle ABC$ 的内心和旁心，IK 交 $\odot O$ 于 E. 求证：$EI=EK$.

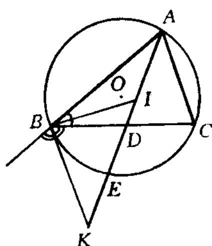


图 4・7

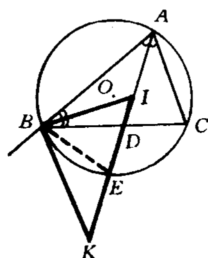


图 4・8

分析：由条件 I、K 分别是$\triangle ABC$ 的内心和旁心，可得 IA、KA 都是$\angle A$ 的平分线，A、I、E、K 成一直线，且 IB、KB 分别是$\angle B$ 和$\angle B$ 的外角平分线，于是 $IB\perp KB$. 而本题要证明的结论是 $EI=EK$，这样就出现了 E 是直角$\triangle IKB$ 的斜边的中点，从而可应用直角三角形斜边上中线的基本图形的性质进行证明. 现在图形中这条斜边上的中线尚未出现，所以应先将它添出，也就是连结 EB，于是要证 $EI=EK$，就应证明 EI 和 EK 都和 EB 相等，再进一步就应证 $EI=EK$ 的等价性质$\angle EIB=\angle EBI$ 成立. 又因为 $\angle EIB=\angle BAI+\angle ABI=\frac{1}{2}\angle CAB+\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle EBI=\angle EBC+\angle IBC=\angle EBC+\frac{1}{2}\angle ABC$，所以只要证明$\angle EBC=\frac{1}{2}\angle CAB=\angle EAC$. 而由条件 A、B、E、C 四点共圆性质得证.

例 5 已知：I 是$\triangle ABC$ 的内心，过 I、B、C 三点作$\odot O$. 求证：A、B、O、C 四点共圆.

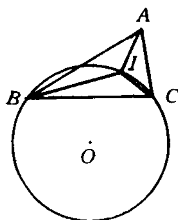


图 4·9

分析：A、B、O、C 四点共圆的证明，是一个圆内接四边形的判定问题，所以可应用圆周角的基本图形或者也就是圆内接四边形的性质进行证明. 但已知图形中这个圆内接四边形尚不完整，所以应先将它添全，于是应连结 OB、OC 和 OA. 但在连结 OA 时，可以发现现在有一个 A、I、O 三点共线的问题，所以可先连结 OI，然后证明 A、I、O 成一直线，也就是要证明$\angle OIB+\angle AIB=180°$，进一步也就是要证$\angle OIB=\angle ABI+\angle BAI=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BAC$. 但已知 $OI=OB$，

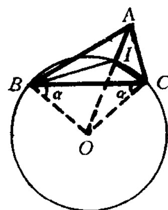


图 4·10

这是两条具有公共端点 A 的相等线段，它们可组成一个等腰三角形，所以$\angle OIB=\angle OBI=\angle IBC+\angle OBC=\frac{1}{2}\angle B+\angle\alpha$，从而只要证$\angle\alpha=\frac{1}{2}\angle BAC$. 由条件 $OI=OB=OC$，$\triangle OIB$、$\triangle OIC$ 都是等腰三角形，于是$\angle BOI+2(\angle\alpha+\frac{1}{2}\angle ABC)=180°$，$\angle COI+2(\angle\alpha+\frac{1}{2}\angle ACB)=180°$，从而 $4\angle\alpha+\angle ABC+\angle ACB+\angle BOI+\angle COI=360°$. 但在$\triangle OBC$ 中，有$\angle BOI+\angle COI+2\angle\alpha=180°$，所以$\angle ABC+\angle ACB+2\angle\alpha=180°$，于是 $2\angle\alpha=\angle BAC$，即$\angle\alpha=\frac{1}{2}\angle BAC$，于是 A、I、O 共线，这样再进一步也就证明了 A、B、O、C 四点共圆.

例 6 已知：四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，过 A 作 BD 的垂线，垂足是 E 且交 DC 的延长线于 G，过 D 作 AC 的垂线，垂足是 F 且交 AB 的延长线于 H. 求证：$HG/\!/BC$.

分析：本题要证的结论 $HG/\!/BC$ 是两条平行线的判定问题，由于这两条要证明的平行线可以看作是被 GD 所截，所以问题就是要证$\angle DCB=\angle DGH$.

由条件中出现四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，所以就可应用圆内接四边形或者也就是圆周角的基本图形的性质进行证明，于是就有$\angle DCB+\angle DAB=180°$，从而问题就转化成要证$\angle DGH+\angle DAH=180°$，也就进一步成为要证 A、H、G、D 四点共圆.

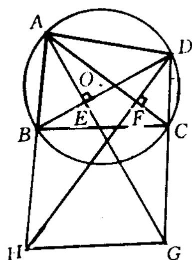


图 4・11

现在要证明 A、H、G、D 四点共圆，这又是一个圆内接四边形的判定问题，所以问题又可转化为证

$\angle HAG=\angle HDG$. 又因为条件中还给出 $AE\perp BD$, $DF\perp AC$，所以 $\angle HAG$ 和 $\angle HDG$ 又分别是 $\angle ABD$ 和 $\angle ACD$ 的余角，于是要证明 $\angle HAG=\angle HDG$，又可转化或证 $\angle ABD=\angle ACD$，但这两个角也是同一条弧，即 $\overset{\frown}{AD}$ 所对的圆周角，所以由条件 A、B、C、D 四点共圆就可以证明这一性质.

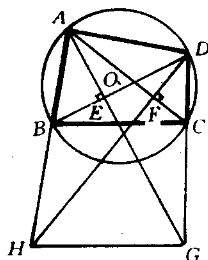


图 4・12

如果在证明 A、H、G、D 四点共圆时，考虑转化为证 $\angle AHD=\angle AGD$，那末这时由于 $\angle AHD$ 和 $\angle AGD$ 分别是 $\angle BAC$ 和 $\angle BDC$ 的余角，所以问题就是要证 $\angle BAC=\angle BDC$，这样由 A、B、C、D 四点共圆，应用圆周角的基本图形性质也可完成分析.

例 7 已知：P 是等边$\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，$PE/\!/BA$ 交 AC 于 E，$PF/\!/CA$ 交 AB 于 F，过 P、F、E 三点作$\odot O$ 交 AB、AC 于 G、H. 求证：$\triangle PGH$ 是等边三角形.

分析：本题要证明$\triangle PGH$ 是等边三角形，所以可证明这个三角形有两个内角是等于 60°.

由条件 P、H、G 都在$\odot O$ 上，或者也就是$\odot O$ 是$\triangle PGH$ 的外接圆，所以这个三角形的三个内角都是$\odot O$ 的圆周角，所以要应用圆周角或圆内接四边形的基本图形的性质进行证明.

由条件 G、P、H、E 四点共圆，可得 $\angle PGH=\angle PEH$，于是要证明 $\angle PGH=60°$，就是要证 $\angle PEH=60°$，而由条件 $PE/\!/BA$，$\angle PEH=\angle A$ 和已知 $\angle A=60°$，这个性质就可以证明.

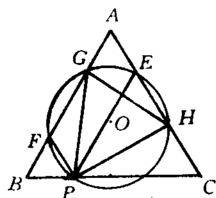


图 4・13

又因为 P、H、G、F 四点共圆，且 A、F、

B 成一直线，所以$\angle BFP=\angle GHP$，这样要证$\angle GHP=60°$，就成为要证$\angle BFP=60°$，而由条件$PF /\!/ CA$，$\angle BFP=\angle A=60°$，这个性质也可以证明，分析也就可以完成.

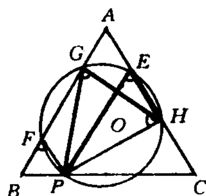


图 4 · 14

例 8 已知：⊙O 中，A 是$\overset{\frown}{BC}$的中点，弦 AD、AE 交 BC 于 F、G，EF、DG 的延长线交⊙O 于 K、H. 求证：$KH /\!/ BC$.

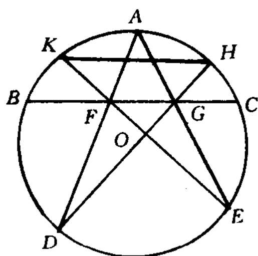


图 4 · 15

分析：本题要证的结论 $KH /\!/ BC$ 是两条平行线的判定问题，若将 KH 和 BC 看作是被 AE 所截，那就可以证明$\angle AMK=\angle AGB$.

由于$\angle AGB$ 是⊙O 的一个圆内角，所以应用圆内角的性质可得$\angle AGB$ 的度数等于$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CE}$的度数的一半，而已知$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，所以$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{AE}$，于是$\angle AGB$ 就应等于$\overset{\frown}{AE}$所对的圆周角，而这个圆周角图形中尚未出现，所以应将它添出，于是连结 ED，可得$\angle AGB=\angle ADE$.

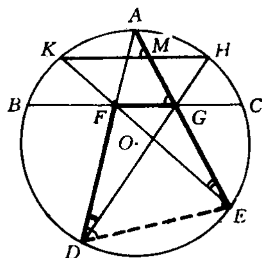


图 4 · 16

又因为 A、G、E 成一直线，出现了$\angle AGF$ 是四边形 $GFDE$ 的一个外角，所以由$\angle AGB=\angle ADE$，就可得四边形 $GFDE$ 是圆内接四边形或者也就是 G、F、D、E 四点共圆.

另一方面，我们要证明相等的另一个角，即$\angle AMK$ 也是⊙O 的一个圆内角，所以也有$\angle AMK$ 的度数应等于$\overset{\frown}{AK}+\overset{\frown}{EH}$的度数的一半，也应等于$\overset{\frown}{AE}$的度数的一半，所

以问题就成为要证$\overset{\frown}{AK}=\overset{\frown}{AH}$. 进一步也就是要证它们所对的圆周角相等，即应证$\angle AEK=\angle ADH$，而由我们已经证明的性质$G$、$F$、$D$、$E$四点共圆，这个性质是可以证明的.

由于本题的条件中出现了A是$\overset{\frown}{BC}$的中点，所以也可以直接

图 4·17

图 4·18

应用垂径定理的性质来进行分析. 而现在图形中尚未出现过弧的中点的直径，所以应先将它添上，也就是连结OA，即可得$OA\perp BC$. 而我们要证明的是$KH\parallel BC$，从而也就应证$OA\perp KH$，这样又可转化为要证$\overset{\frown}{AK}=\overset{\frown}{AH}$，根据前面的讨论，这个性质可以证明，所以分析可以完成.

由于本题的条件中出现了A是$\overset{\frown}{BC}$的中点，所以也可应用过弧的中点作切线，也就是弦的平行线的方法进行证明，于是过A作$\odot O$的切线MN，并连结AC，则由$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$就可得圆周角$\angle BCA$和弦切角$\angle NAC$相等，所以$MN\parallel BC$. 这样要证$KH\parallel BC$也就转化为证$KH\parallel MN$，所以也是要证$\overset{\frown}{AK}=\overset{\frown}{AH}$，由于这个性质可以证明，所以也可以完成分析.

例 9 已知：$\odot I$是$\triangle ABC$的内切圆，且与三边分别相切于D、E、F，AI的延长线交DF于H. 求证：$CH\perp AH$.

分析：本题条件中出现$\odot I$是三角形的内切圆，所以有BC是

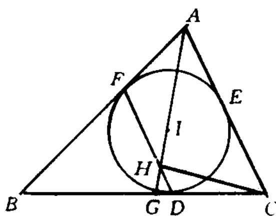


图 4・19

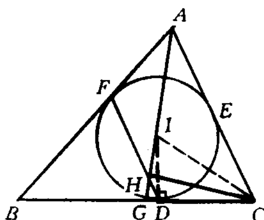


图 4・20

⊙I 的切线，切点是 D，这样就可以应用切线的性质或者也就是弦切角的基本图形的性质进行证明，于是连结 DI，可得$\angle CDI=90°$.

现在的问题是要证 $CH\perp AH$，$\angle CHI=90°$，于是就要证$\angle CHI=\angle CDI=90°$，从而就可以应用圆周角或圆内接四边形的基本图形的性质进行证明，所以问题就是要证 C、I、H、D 四点共圆。由条件 B、D、C 成一直线，出现了$\angle BDF$ 是这个要证明的圆内接四边形的外角，所以就可应用与外角有关的性质进行证明，由于这个四边形尚不完整，所以先连结 CI，那末证明 C、I、H、D 四点共圆就转化为证$\angle BDF=\angle HIC$.

由条件 A、I、H 成一直线，$\angle HIC$ 是$\triangle ACI$ 的一个外角，从而有$\angle HIC=\angle IAC+\angle ICA$，但已知 I 是$\triangle ABC$ 的内心，IA、IC 是$\triangle ABC$ 的两条角平分线，所以$\angle HIC=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C$，这样问题就成为要证$\angle BDF$ 也等于$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C$.

但$\angle BDF$ 是$\triangle BDF$ 的一个内角，而由条件 BD、BF 分别与⊙I 相切于 D、F，所以可应用切线长定理得 $BD=BF$，那末$\angle BDF$ 就等于$\angle BFD$，也就有$\angle BDF=\frac{1}{2}(180°-\angle B)$，根据三角形内角和定理又有$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，所以分析可以完成.

例 10 已知：⊙O、⊙O' 相交于 A、B，P 是⊙O 上的一点，

PA、PB 的延长线交⊙O' 于 C、D，$PE \perp CD$ 垂足是 E. 求证：PE 经过点 O.

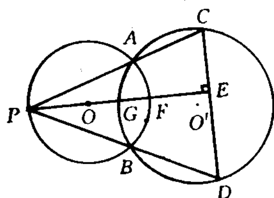


图 4·21

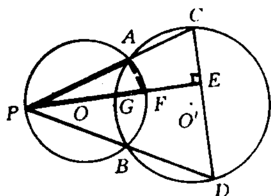


图 4·22

分析：本题要证明 PE 经过 O 点，所以设 PE 交⊙O 于 F 后，就是要证 PF 经过点 O，PF 是⊙O 的直径，这样就可应用直径所对的圆周角或半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明. 现在图形中是有直径，有半圆上的点 A，而没有圆周角，所以应将圆周角添上，也就是连结 AF，问题就成为应证 $\angle PAF = 90°$.

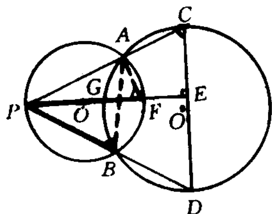


图 4·23

又因为条件中给出 P、A、C 成一直线，所以要证明的这个角$\angle PAF$ 就成为四边形 $AFEC$ 的一个外角，而已知$\angle PEC = 90°$，所以问题就是要证$\angle PAF = \angle FEC = 90°$，也就是要证 A、F、E、C 四点共圆，四边形 $AFEC$ 是圆内接四边形. 但已知 P、F、E 也成一直线，又出现了$\angle PFA$ 也是这个四边形的一个外角，所以问题又可以转化为证$\angle PFA = \angle C$.

由于$\angle C$ 是⊙O' 的圆周角，所以仍然可应用圆周角或圆内接四边形的基本图形的性质进行证明. 由条件 A、B、D、C 四点共圆，但这个圆内接四边形还不完整，所以应先连结 AB，那末由 P、B、D 成一直线，就可得$\angle PBA = \angle C$，问题就成为要证$\angle PFA =$

$\angle PBA$. 由于这两个角是$\odot O$中同一条$\overset{\frown}{PC}$所对的圆周角，当然相等，所以分析可以完成.

例 11 已知：四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，AC、BD 相交于 E，F、G 分别是 AE、DE 的中点，过 F、G 分别作 AE、DE 的垂线相交于 H. 求证：$HE \perp BC$.

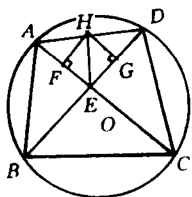


图 4・24

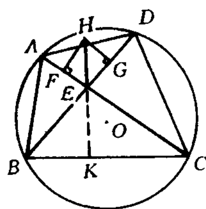


图 4・25

分析：本题要证明 $HE \perp BC$，根据垂线的定义，它们应相交成 90°角，所以应首先将它们延长到相交，也即延长 HE 交 BC 于 K，然后应证$\angle HKC = 90°$.

由条件 $HF \perp AC$，$\angle HFC = 90°$，问题就成为应证$\angle HKC = \angle HFC = 90°$，从而就可应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 这样问题就成为应证 H、F、K、C 四点共圆，进一步也就是要证$\angle FHK = \angle FCK$. 由于$\angle FCK$ 是$\odot O$ 的一个圆周角，而已知 A、

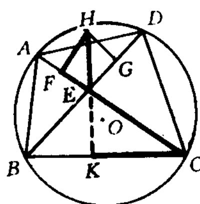


图 4・26

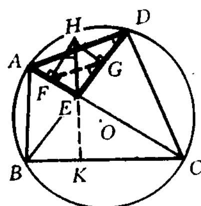


图 4・27

B、C、D 四点共圆，所以有$\angle ACB=\angle ADB$，于是问题又转化成要证$\angle FHK=\angle ADB$.

再由条件 F、G 分别是 AE、DE 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 F、G 所在的线段 EA、ED 有公共端点 E，可以组成三角形，所以 FG 这两个中点的连线就是三角形的中位线，而现在图形中是有三角形而没有中位线，所以应将中位线添上，于是连结 FG，即可得 $FG /\!/ AD$，那末又有$\angle ADB=\angle FGE$，问题也就成为要证$\angle FHK=\angle FGE$，这样也就要证 H、F、E、G 四点共圆，而由条件$\angle HFE=\angle HGE=90°$，这个性质就可以证明.

例 12 已知：AB、CD 是$\odot O$ 的直径，且 $AB\perp CD$，E、F 分别是 OD、OA 上的两点，$OE=OF$，BE、DF 的延长线交$\odot O$ 于 H、G，BH、DG 相交于 K. 求证：$OK\perp DH$.

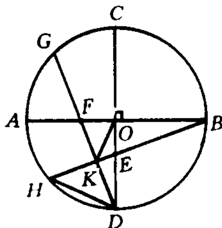


图 4・28

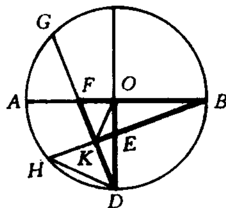


图 4・29

分析：由条件 $OE=OF$ 和 $OE\perp OF$，可知 OE、OF 可组成一个等腰直角三角形或半个正方形. 又因为 $OB=OD$、$OB\perp OD$，所以 OB、OD 也组成半个正方形. 从而就出现了两个具有公共顶点 O 的正方形，于是就可应用旋转型的全等三角形的性质进行证明. 根据由公共顶点 O 发出的四条线段找全等三角形的方法可找到这对全等三角形应是$\triangle DFO$ 和$\triangle BEO$，于是就有$\angle ODF=\angle OBE$. 由这两个角相等就可得 B、D、K、O 四点共圆，于是就可以应用圆

周角的基本图形的性质进行证明.这样就可以先将圆内接四边形

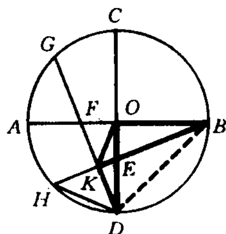


图 4・30

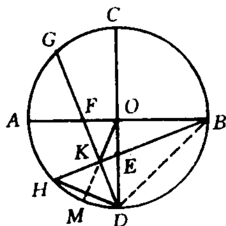


图 4・31

添全,也就是连结 BD,可得$\angle KBD=\angle KOD$.但$\angle KBD$ 是圆周角,而$\angle KOD$ 是圆心角,这两个角之间的等量关系就可以转化为它们所对的弧之间的倍半关系.由于$\angle KBD$ 所对的弧是$\overset{\frown}{HD}$,而$\angle KOD$ 所对的弧在图形中尚未出现,这是因为$\angle KOD$ 的一边 OK 尚未与圆相交,所以可根据圆心角的定义延长 OK 交$\odot O$ 于 M,得$\angle KOD$ 所对的弧是$\overset{\frown}{MD}$,从而可得$\overset{\frown}{MD}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{HD}$,也就是 M 是$\overset{\frown}{DH}$的中点.由于在这里出现了弧的中点的性质,所以再应用垂径定理,就可以证明 $OK\perp DH$.

例 13 已知:$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$,DE 是$\odot O$ 的弦,且 $DE\perp BC$ 垂足为 H.分别以 BD、BE 为直径作半圆交 AB 于 F、G.求证:$GH:EB=GF:ED$.

分析:由条件 BD 是半圆的直径,所以就可以应用直径的性质或者也就是半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明.由于$\angle DHB=90°$,所以以 BD 为直径所作的半圆必经过点 H.又因为 F 也是以 BD 为直径的半圆上的点,所以 B、H、F、D 四点共圆,于是就可应用圆周角的基本图形或者也就是圆内接四边形的性质进行证明,从而连结 FH 后,可得$\angle BDH=\angle BFH$.根据同样的方

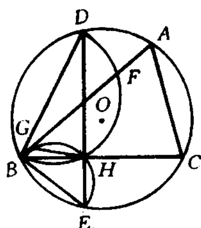


图 4・32

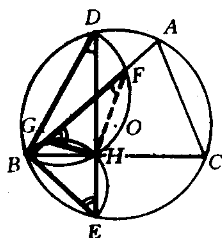


图 4・33

法还可以证明 B、E、H、G 四点共圆，又因为 B、G、A 成一直线，出现了$\angle FGH$ 是这个圆内接四边形的一个外角，所以又可得$\angle BEH=\angle FGH$.

现在我们要证明的结论是 $GH:EB=GF:ED$. 对这个比例关系进行描图后，可以发现它们两两组成$\triangle HFG$ 和$\triangle BDE$，所以要证明上述比例关系，就转化成应证这两个三角形相似. 而由前面的分析可以发现在这两个三角形中已经证明了两个角对应相等，即$\angle HFG=\angle BDE$ 和$\angle FGH=\angle DEB$，所以这两个三角形相似就可以证明.

例 14 已知：$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，在 AB 的延长线上取一点 D，使 $AD=AC$，在 AC 上取一点 E，使 $AE=AB$，过 D、E 的直线交$\odot O$ 于 F、G. 求证：$AF\cdot AG=AB\cdot AC$.

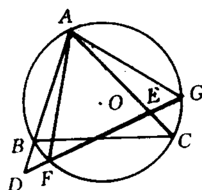


图 4・34

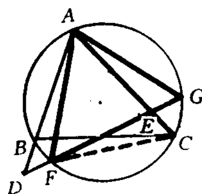


图 4・35

分析：本题要证 $AF \cdot AG = AB \cdot AC$，由条件 A、F、C、G 四点共圆，可应用圆周角的基本图形的性质进行证明，所以先连结 CF，就可得 $\angle AGF = \angle ACF$. 而 $\angle ACF$ 又等于 $\angle ACB + \angle BCF$. 由 A、B、F、C 四点共圆，又可得其中的 $\angle BCF = \angle FAD$.

再由条件中还给出 $AB = AE$、、$AC = AD$，且 $\angle BAC$ 和 $\angle EAD$ 可以看作是公共角，所以就可证明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 是一对轴对称型全等三角形，从而就可以证明 $\angle ACB = \angle D$.

而由条件 D、F、G 成一直线，所以 $\angle AFG$ 就是 $\triangle ADF$ 的一个外角，应用三角形外角定理，就有 $\angle AFG = \angle D + \angle FAD$，从而可得 $\angle ACF = \angle ACB + \angle BCF = \angle D + \angle FAD = \angle AFG$. 这两个角相等一出现就可得到 $\triangle AFE$ 和 $\triangle ACF$ 是一对逆平行线型相似三角形，从而可得 $\angle ACF = \angle AFE$ 的等价性质 $AF^2 = AE \cdot AC$ 成立. 而 $AE = AB$，所以 $AF^2 = AB \cdot AC$，将这个性质与结论比较可知问题应证 $AF = AG$，它们就是两条具有公共端点 A 的相等线段，所以可组成一个等腰三角形，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题，于是要证 $AF = AG$，就可证明它的等价性质 $\angle AFG = \angle AGF$ 成立. 由于我们已证明这两个角都与 $\angle ACF$ 相等，所以分析可以完成.

例 15 已知：BA、BC 是 $\odot O$ 的两条弦，P 是 $\overset{\frown}{BC}$ 上的任一点，$PD \perp BC$，$PE \perp AB$ 垂足分别为 D、E，PD 的延长线交 $\odot O$ 于 F.

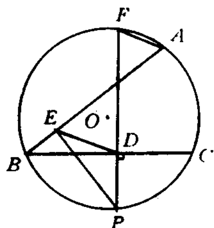


图 4・36

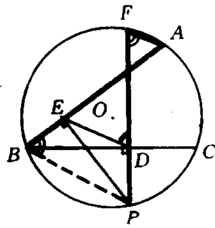


图 4・37

求证：$AF /\!/ DE$.

分析：本题要证明 $AF /\!/ DE$，是两条平行线的判定问题，由于它们可以看作是被 FD 所截，所以问题就是要证$\angle F=\angle EDF$.

由于$\angle F$ 是$\odot O$ 的一个圆周角，所以就要应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 由条件 A、F、B、P 四点共圆，$\angle F$ 所对的弧. 即$\overset{\frown}{AP}$所对的另一个圆周角尚未出现，所以应先将这个圆周角添上，于是连结 BP，即可得$\angle F=\angle ABP$. 问题又成为要证$\angle EDF=\angle ABP$. 但由 P、D、F 成一直线，可得$\angle EDF$ 是四边形 $BPDE$ 的一个外角，所以问题就是要证 B、P、D、E 四点共圆，那末由条件$\angle BDP=\angle BEP=90°$，可知这个性质是可以证明的.

例 16 已知：$\odot O$、$\odot O'$ 相交于 A、B，$\odot O'$ 的弦 BC 交$\odot O$ 于 D，CA 的延长线交$\odot O$ 于 E，过 D、E 的直线交$\odot O'$ 于 F、G. 求证：$CF=CG$.

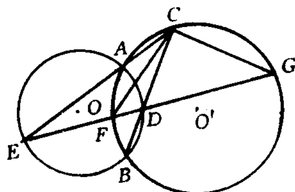


图 4・38

分析：本题要证明 $CF=CG$，这是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，问题就成为一个等腰三角形的判定问题，于是问题就可以转而证明 $CF=CG$ 的等价性质$\angle CFG=\angle CGF$.

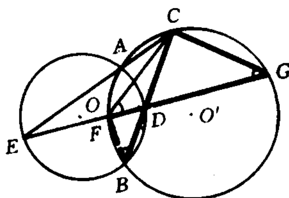


图 4・39

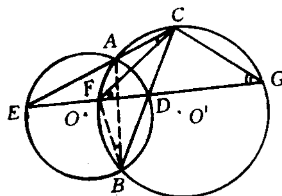


图 4・40

由于$\angle CGF$ 是$\odot O'$ 的一个圆周角，所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 于是由条件 C、F、B、G 四点共圆可发现

$\angle CGF$ 所对的$\overset{\frown}{CF}$所对的另一个圆周角尚未出现，所以应先连结 BF，就可得$\angle CGF=\angle CBF$，问题就成为要证$\angle CFG=\angle CBF$.

由条件 E、F、G 成一直线，所以要证明的上述等量关系中出现的$\angle CFG$ 就可看作是$\triangle CEF$ 的一个外角，从而就有$\angle CFG=\angle E+\angle ECF$，但$\angle E$ 是$\odot O$ 的一个圆周角，所以又可以应用圆周角的基本图形的性质进行证明，由条件中出现的 A、E、B、D 四点共圆，$\angle E$ 所对的是$\overset{\frown}{AD}$，所以连结 AB，得$\angle E=\angle ABD$. 另一方面$\angle ECF$ 也是$\odot O'$ 的一个圆周角，所以根据 C、A、F、B 四点共圆又可得$\angle ACF=\angle ABF$，而$\angle ABD+\angle ABF$ 就是要证明的结论中的$\angle CBF$，分析完成.

例 17 已知：四边形 $ABCD$ 中，AB、DC 的延长线相交于 F，AD、BC 的延长线相交于 E，$ED\cdot EA=EC\cdot EB$，$\angle E$、$\angle F$ 的角平分线相交于 H. 求证：$EH\perp FH$.

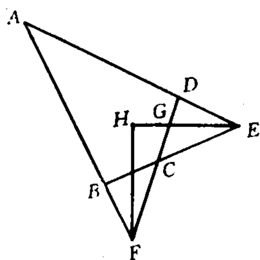


图 4・41

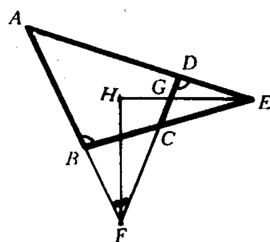


图 4・42

分析：由本题条件中出现的 $ED\cdot EA=EC\cdot EB$ 是线段之间的比例关系，所以首先进行描图，而经过描图可以发现，两组相乘线段分别重叠在一直线上，且有一个公共端点 E，从而可应用由三角形内一条边的逆平行线段所得到的逆平行线型相似三角形的性质进行证明. 根据端点和端点、内分点和内分点的连线就是逆平行

线即可找到这一对相似三角形是$\triangle ECD$和$\triangle EAB$，从而可得$\angle EDC=\angle EBA$，所以四边形$ABCD$是一个圆内接四边形，或者也就是A、B、C、D四点共圆.

另一方面，我们要证的结论是$EH\perp FH$，$\angle H=90°$，而$\angle H$可以看作是$\triangle FGH$的一个内角，所以可转而证明$\angle HGF+\angle GFH=90°$. 根据条件$FH$是$\angle BFC$的角平分线，所以$\angle GFH=\frac{1}{2}\angle BFC$. 而由$E$、$G$、$H$成一直线，又可得$\angle HGF$是$\triangle EGC$的一个外角，所以有$\angle HGF=\angle GCE+\angle GEC$. 而由$\triangle ECD\backsim\triangle EAB$，还可得$\angle DCE=\angle A$，同时由条件$EH$是$\angle AEB$的角平分线，又有$\angle GEC=\frac{1}{2}\angle DEC$，这样问题就成为要证$\angle A+\frac{1}{2}\angle DEC+\frac{1}{2}\angle BFC=90°$，也就是$2\angle A+\angle DEC+\angle BFC=180°$. 但在$\triangle ABE$中，有$\angle A+\angle ABE+\angle AEB=180°$，在$\triangle ADF$中，有$\angle A+\angle ADF+\angle AFD=180°$，两式相加就有$2\angle A+\angle ABE+\angle AEB+\angle ADF+\angle AFD=360°$. 但由于$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆，$\angle ABE+\angle ADF=180°$，所以$2\angle A+\angle AEB+\angle AFD=180°$就可以证明.

由于本题要证的结论是$EH\perp FH$，而条件中出现了EH是$\angle AEB$的角平分线，所以就出现了角平分线和向角平分线所作的垂线的组合关系，从而就可应用等腰三角形的基本图形的性质来开始进行分析. 由于这个等腰三角形是角平分线的垂线和角的两边相交得到的，所以延长FH交EA于N，这样要证$EH\perp FH$，就可以转化成证$EM=EN$，

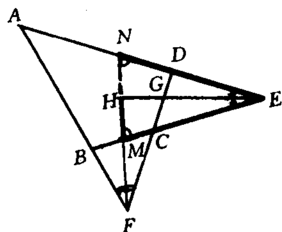


图 4・43

再进一步就是应证$EM=EN$的等价性质$\angle EMN=\angle ENM$成

立. 而由条件 F、M、N 成一直线，出现了要证明相等的这个角即 $\angle EMN$ 是 $\triangle FCM$ 的一个外角，所以有 $\angle EMN=\angle MFC+\angle MCF$，根据同样的道理又有 $\angle ENM=\angle NFA+\angle A$，而条件给出 $\angle MFC=\angle NFA$，这样问题又转化成为要证 $\angle MCF=\angle A$，而这个性质通过 $\triangle ECD\backsim\triangle EAB$ 是可以证明的，所以分析可以完成.

例 18 已知：P 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上的任一点，$PD\perp AB$、$PE\perp BC$、$PF\perp AC$，垂足分别为 D、E、F. 求证：D、E、F 共线.

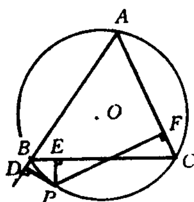


图 4・44

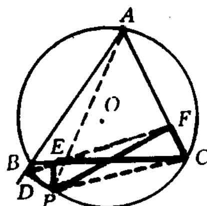


图 4・45

分析：由条件 $PE\perp BC$，$PF\perp AC$，可得 $\angle PEC=\angle PFC=90°$，从而就可应用圆周角的基本图形的性质进行证明，也就可得 P、C、F、E 四点共圆，但这个圆内接四边形的基本图形尚不完整，所以连结 EF、PC，可得 $\angle EFP=\angle ECP$.

再由条件 $PD\perp AB$，$PF\perp AC$，又可得 $\angle PDA=\angle PFA=90°$，这样又可得 A、D、P、F 四点共圆，所以连结 DF、PA 后，又可得 $\angle PAD=\angle PFD$. 而由条件 A、B、P、C 四点共圆，又可以应用圆内接四边形的基本图形性质得 $\angle PAB=\angle PCB$，所以 $\angle PFE=\angle PFD$，从而就可证明 DF 和 EF 重合，分析也就可以完成.

例 19 已知：P 是四边形 $ABCD$ 的外接圆上的任一点，$PE\perp AB$，$PF\perp BC$，$PG\perp CD$，$PH\perp AD$，垂足分别为 E、F、G、H. 求证：$PE\cdot PG=PF\cdot PH$.

分析：本题要证明的结论 $PE\cdot PG=PF\cdot PH$，是线段之间

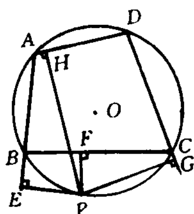


图 4・46

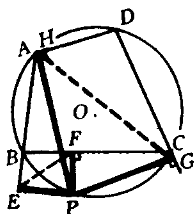


图 4・47

的比例关系，所以应首先描图，搞清楚它们之间的位置关系，经过描图可以发现这是由一点发出的四条成比例线段，从而可通过添加旋转型相似三角形进行证明. 添加的方法是将这四条线段两两组成相似三角形.

若考虑将 PE、PF 和 PH、PG 分别组成三角形，则连结 EF、GH，然后应考虑证明$\triangle PEF\backsim\triangle PHG$. 由条件$\angle PEB=\angle PFB=90°$，所以就可应用圆周角或圆内接四边形的基本图形的性质进行证明，也就是可得 P、F、B、E 四点共圆，而$\triangle PFE$ 的一个内角$\angle PFE$ 就成为一个圆周角，从而连结 PB 后，可得$\angle PFE=\angle PBE$. 根据同样的道理，连结 PD 后也可得$\angle PGH=\angle PDH$. 这样要证明这一对三角形相似，首先就可以证$\angle PFE=\angle PGH$，也就是要证$\angle PBE=\angle PDA$. 但因 D、A、B、P 四点共圆，且 A、B、E 成一直线，$\angle PBE$ 是圆内接四边形 $ABPD$ 的外角，所以$\angle PBE=\angle PDA$. 同样由$\angle PEF=\angle PBF$、$\angle PHG=\angle PDG$ 和 P、B、D、C 四点共圆，$\angle PBC=\angle PDC$就可得$\angle PEF=\angle PHG$. 所以$\triangle PEF\backsim\triangle PHG$ 就可以证明.

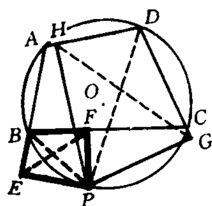


图 4・48

若考虑将 PE、PH 和 PF、PG 分别组成三角形，则连结 EH、

FG,然后应考虑证$\triangle PEH \backsim \triangle PFG$. 那末由$\angle PEA = \angle PHA = 90^\circ$,可得$P$、$E$、$A$、$H$四点共圆,$\angle PHE = \angle PAE$. 而由$\angle PFC = \angle PGC = 90^\circ$,又可得$P$、$F$、$C$、$G$四点共圆,$\angle PGF = \angle PCF$. 再由条件$A$、$B$、$P$、$C$四点共圆,又可证明$\angle PAB = \angle PCB$,所以$\angle PHE = \angle PGF$. 根据类似的道理还可进一步证明$\angle PEH = \angle PFG$,从而也可证明$\triangle PEH \backsim \triangle PFG$,分析也可以完成.

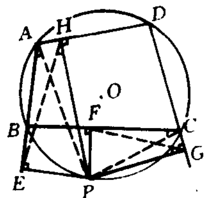


图 4・49

例 20 已知:$\triangle ABC$中,$AB = AC$,AD是高,E、F是AD上的两点,$\angle DBE = \angle EBF = \angle FBA$,$CE$的延长线交$AB$于$G$. 求证:$GF /\!/ BE$.

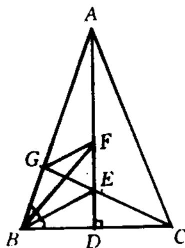


图 4・50

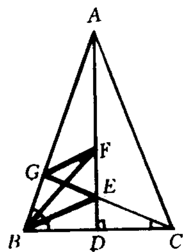


图 4・51

分析:本题要证明$GF /\!/ BE$,是一个平行线的判定问题,所以可应用平行线的基本图形的性质进行证明. 由于GF、BE可以看作是被BF所截,所以要证$GF /\!/ BE$,就可以转化为证明$\angle GFB = \angle EBF$. 而已知$\angle EBF = \angle EBC$. 所以问题又应证$\angle GFB = \angle EBC$.

又因为条件中给出$AB = AC$,AD是高,所以可应用等腰三角形中的重要线段的基本图形的性质进行证明,于是就可得AD是

BC 的垂直平分线，$EB=EC$ 和 $\angle EBC=\angle ECB$. 这样问题又进一步转化为要证 $\angle GFB=\angle GCB$. 而这两个角相等一出现，就能发现可应用圆内接四边形或者也就是圆周角的基本图形的性质进行证明. 因此要证明 $\angle GFB=\angle GCB$，就可以转而证明 B、C、F、G 四点共圆，因而考虑将圆内接四边形添完整，也就是连结 CF，然后就选取与条件中出现的角有关系的角来进行证明，所以可选择证 $\angle GBF=\angle GCF$. 但已知 $\angle GBF=\angle FBE$，所以问题又成为要证 $\angle FBE=\angle FCE$. 但我们马上可发现这两个要证明相等的角现在是位于这个等腰三角形的轴对称部分，所以又可应用轴对称型全等三角形的性质进行证明，那末由 $EC=EB$，$FC=FB$ 和 $FE=FE$，就可证明 $\triangle FCE\cong\triangle FBE$，$\angle FCE=\angle FBE$，从而就可以完成分析.

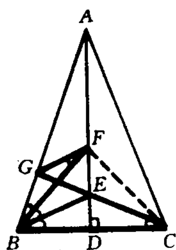


图 4·52

例 21 已知：P 是 $\square ABCD$ 的对角线 BD 上的一点，以 BP 和 DP 为直径作圆分别交 AB、BC 和 CD、DA（或它们的延长线）于 E、H 和 F、G. 求证：$EH /\!/ GF$.

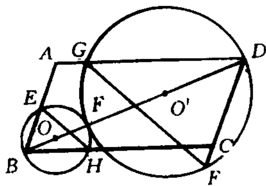


图 4·53

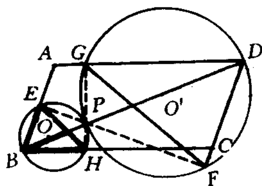


图 4·54

分析：由条件 BP、DP 分别为两圆的直径，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明. 现在对两个圆来说都是有直径，有半圆上的点而没有圆周角，所以应将圆周角添上，也就是连结 PE、PH、PF 和 PG 后，可得 $PE\perp AB$、$PF\perp CD$，而我们已

知 $AB /\!/ DC$，所以 E、P、F 共线. 根据同样的道理还可得 $PH \perp BC$、$PG \perp AD$，G、P、H 共线.

现在我们要证明的结论是 $EH /\!/ GF$，这是两条平行线的判定问题，而现在 EH 和 GF 这两条要证明平行的线段可以看作被 GH 所截，所以问题就只要证$\angle PHE = \angle PGF$. 而$\angle PHE$ 是$\odot O$ 的圆周角，应用圆周角的基本图形的性质，由 B、H、P、E 四点共圆，可得$\angle PHE = \angle PBE$. 根据同样的道理，又可得$\angle PGF = \angle PDF$，这样问题又转化为要证$\angle PBE = \angle PDF$. 由于这两个角是 AB 和 DC 这一组平行线被 BD 所截得到的一组内错角，所以这个性质就可以证明.

例 22 已知：CD 是直角$\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高，角平分线 AE 交 CD 于 F，过 C、E、D 三点作$\odot O$ 交 AE 于 G. 求证：$AG = FG$.

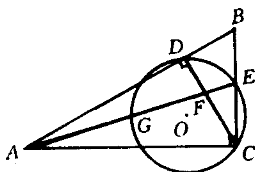


图 4・55

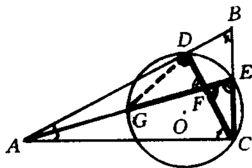


图 4・56

分析：本题要证的结论是 $AG = FG$，而条件中给出了 $CD \perp AB$，这样就出现了 G 为直角$\triangle AFD$ 的斜边 AF 的中点，从而就可以应用直角三角形斜边上中线的基本图形的性质进行证明. 由于图形中尚未出现斜边上的中线，所以连结 DG，这样要证明 $AG = FG$，就应证 AG、FG 都和 DG 相等，也就是应转而证 $AG = FG$ 的等价性质$\angle GDF = \angle GFD$.

由于$\angle GDF$ 是$\odot O$ 的一个圆周角，所以就可应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 于是由 C、E、D、G 四点共圆，可得$\angle GDF$

$=\angle GEC$，所以问题成为应证$\angle AFD=\angle AEC$. 而由条件 A、F、E 和 B、E、C 都成一直线，$\angle AFD$ 和$\angle AEC$ 可以分别看作是$\triangle AFC$ 和$\triangle AEB$ 的外角，所以有$\angle AFD=\angle FCA+\angle CAE$，$\angle AEC=\angle B+\angle BAE$，而条件中又给出$\angle BAE=\angle CAE$，所以问题又转化成要证$\angle B=\angle FCA$. 但已知 CD 是直角$\triangle ABC$ 的斜边上的高，所以应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质就可以证明上述性质，分析也就可以完成.

例 23 已知：I 是$\triangle ABC$ 的内心，$\odot I$ 与三边相切于 D、E、K，$BF\perp AI$，$AG\perp BI$，垂足分别是 F、G. 求证：F、D、E、G 四点共线.

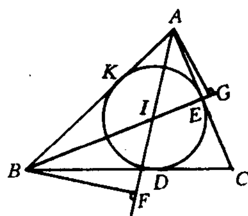


图 4・57

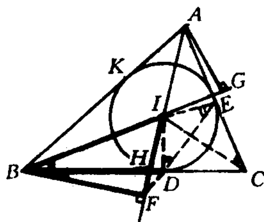


图 4・58

分析：要证明 F、D、E、G 四点共线，只须分别证明两次三点共线即可. 若首先考虑证 F、D、E 共线，则将这三点分两次连结，也就是连结 FD、ED，问题就是要证明$\angle BDF=\angle CDE$.

由条件 BC 与$\odot I$ 相切于 D，所以可应用切线的性质或者也就是弦切角的基本图形的性质进行证明，于是连结 ID，就可得$\angle BDI=90^\circ$，又因为条件中给出$\angle BFI=90^\circ$，所以$\angle BDI=\angle BFI$，而这两个角相等一出现，就可以应用圆周角的基本图形的性质进行证明，于是就可得 B、F、D、I 四点共圆，$\angle BDF=\angle BIF$，这样问题就成为要证$\angle BIF=\angle CDE$.

由条件 A、I、F 成一直线，就出现了$\angle BIF$ 是$\triangle ABI$ 的一个外角，所以有$\angle BIF=\angle IAB+\angle IBA$. 又因为已知 I 是$\triangle ABC$ 的

内心，IA、IB 分别是$\angle A$ 和$\angle B$ 的角平分线，所以$\angle BIF=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B$. 又因为 CD、CE 与$\odot I$ 分别相切于 D、E，$\angle CDE$ 是弦切角，所以应用切线长定理得到 $CD=CE$ 后，就有$\angle CDE=(180°-\angle C)\div 2$，即$\angle CDE=90°-\frac{1}{2}\angle C$，那末问题又成为要证$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B=90°-\frac{1}{2}\angle C$，显然这个性质只要应用三角形内角和定理就可以证明. 根据同样的道理，也可以证明 G、E、D 共线，所以分析可以完成.

本题在应用切线的性质，连结 ID 并得 $ID\perp BC$ 后，证明 F、D、E 共线的问题也可成为要证$\angle IDE+\angle IDF=180°$. 而在得到$\angle IDB=\angle IFB=90°$，$B$、$F$、$D$、$I$ 四点共圆后，又可得$\angle IBF+\angle IDF=180°$，从而问题又成要证明$\angle IDE=\angle IBF$. 但因已知$\odot I$ 与 AC 相切于 E，所以应用切线的性质，连结 IE，又可得$\angle IEC=90°$，所以又有 I、D、C、E 四点共圆，于是再应用圆内接四边形或者也就是圆周角的基本图形的性质，可得$\angle IDE=\angle ICE=\frac{1}{2}\angle C$，这样问题又转化为要证明$\angle IBF=\frac{1}{2}\angle C$. 而$\angle IBF=\angle DBI+\angle DBF=\frac{1}{2}\angle B+(90°-\angle FHB)$，再由条件 A、H、F 成一直线，$\angle FHB$ 是$\triangle ABH$ 的一个外角，就有$\angle FHB=\angle ABH+\angle BAH=\angle B+\frac{1}{2}\angle A$. 所以$\angle IBF=\frac{1}{2}\angle B+(90°-\angle B-\frac{1}{2}\angle A)=90°-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle C$，这样也可以完成分析.

例 24 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，D 是 BC 的中点，过 D、C 作$\odot O$ 交 AC 于 E，BE 交$\odot O$ 于 F. 求证：$AF\perp BE$.

分析：本题条件中出现 $AB=AC$ 和 $BD=CD$，所以可应用等腰三角形中的重要线段的基本图形的性质进行证明，由于图形中

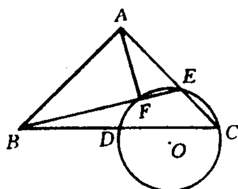


图 4 · 59

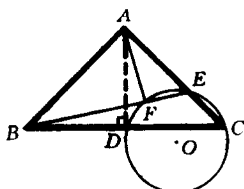


图 4 · 60

这条重要线段尚未出现，所以应先连结 AD，即可得 $AD\perp BC$，且因条件给出 $\angle BAC=90°$，所以 $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=45°$.

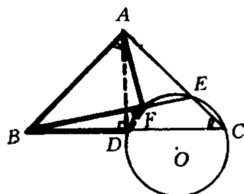


图 4 · 61

现在要证的结论是 $AF\perp BE$，即 $\angle AFB=90°$. 而前面已证 $\angle ADB=90°$，这样问题就成为要证 $\angle AFB=\angle ADB$，而这两个角相等一出现，就可以应用圆周角的基本图形的性质进行证明，也就是应转而证 A、B、D、F 四点共圆，四边形 $ABDF$ 是圆内接四边形，但我们已证 $\angle BAD=45°$，所以应连结 DF 后证明 $\angle BAD=\angle BFD$，进一步就是要证 $\angle BFD=45°$，而由条件 D、C、E、F 四点共圆和 E、F、B 成一直线，所以再应用圆周角的基本图形的性质又可得 $\angle BFD=\angle C$，由条件 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle C=45°$，由此即可证明上述性质，分析也就可以完成.

例 25 已知：$\triangle ABC$ 中，过 A、C 两点的 $\odot O$ 交 AB、BC 于 K、N，$\triangle ABC$、$\triangle BKN$ 的外接圆相交于 B、M. 求证：$\angle BMO=90°$.

分析：本题的条件中出现了 $\odot O$ 上的四点，即 A、K、N、C，所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 于是首先应将这个圆内接四边形添全，也就是连结 KN. 由于条件中还出现 C、N、B

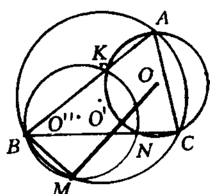


图 4·62

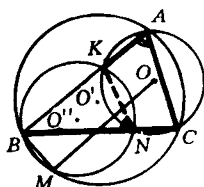


图 4·63

成一直线，所以可得$\angle BNK=\angle A$.

又因为在$\odot O''$中，现在也出现了圆上的四点，即K、B、M、N四点共圆，且上述性质中出现的$\angle BNK$是这个圆内的一个圆周角，而这个角所对的弧，即$\overset{\frown}{BK}$所对的另一个圆周角尚未出现，所以首先应连结KM，然后就可得$\angle BNK=\angle BMK$. 这样就可进一步推得$\angle BMK=\angle A$.

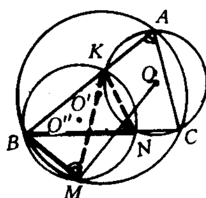


图 4·64

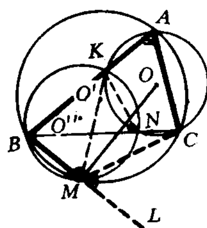


图 4·65

再来看$\odot O'$中，现在也出现了A、B、M、C四点共圆，且$\angle A$这个圆周角成了这个圆内接四边形的一个内角，于是连结MC，并延长BM至L，就可得$\angle LMC=\angle A$，所以就有$\angle BMK=\angle LMC$. 现在我们要证明的性质是$\angle BMO=90^\circ$，也就是要证$\angle BMO=\angle LMO$，所以就可转化为证$\angle KMO=\angle CMO$.

另一方面由B、M、L成一直线，可得$\angle KMC+\angle BMK+$

$\angle LMC=180^\circ$，$\angle KMC+2\angle BMK=180^\circ$，$\angle KMC+2\angle A=180^\circ$. 在这个关系式中出现了$\angle A$的倍角，而$\angle A$是$\odot O$的一个圆周角，则它的倍角应等于它所对的弧所对的圆心角，但这个圆心角图中尚未出现，因而连结OK、OC，即可得$\angle KOC=2\angle A$，于是就有$\angle KMC+\angle KOC=180^\circ$，而这个关系式一出现就可推得$K$、$M$、$C$、$O$四点共圆，而要证明相等的这两个角就是这个圆的圆周角，所以应用圆周角的基本图形的性质，连结KC后，有$\angle KMO=\angle KCO$，$\angle CMO=\angle CKO$，而由$OK=OC$，可得$\angle KCO=\angle CKO$，所以$\angle KMO=\angle CMO$就可证明.

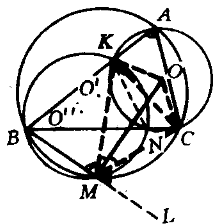


图 4・66

例 26 已知：MA、MB、MC是$\odot O$的三条弦，以MA、MB、MC为直径作$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$，它们两两相交于D、E、F. 求证：D、E、F共线.

分析：要证明D、E、F共线，只要将D、E、F分两次连结，也就是连结DE、FE和ME后，应证明$\angle DEM+\angle FEM=180^\circ$.

由条件MA、MB分别是$\odot O_1$、$\odot O_2$的直径，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明. 现在有$\odot O_1$、$\odot O_2$上的点D，而没有圆周角，所以应将圆周角添上，于是分别连结MD、AD和BD，可得$\angle MDA=\angle MDB=90^\circ$，从而$D$、$A$、$B$共线. 根据同样的方法，连结$BF$、$CF$、$MF$后，也可证得$B$、$F$、$C$共线.

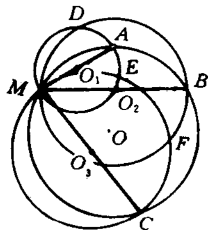


图 4・67

现在要证明的性质中的$\angle DEM$是$\odot O_1$的一个圆周角，从而就可以应用圆周角的基本图形的性质进行证明，也就是由M、D、A、E四点共圆，可得$\angle MED=\angle MAD$. 又因为

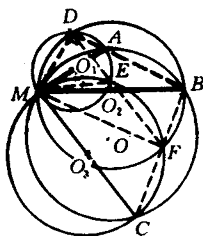


图 4·68

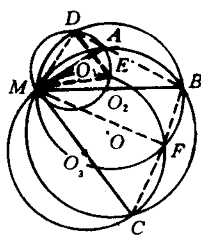


图 4·69

在⊙O中，现在也出现了圆上的四点，即 A、M、C、B，所以四边形 $AMCB$ 也是圆内接四边形，且 D、A、B 成一直线，这样又可得 $\angle MAD=\angle C$，$\angle MED=\angle C$. 于是问题就转化为应证 $\angle C+\angle FEM=180°$，而由条件 E、M、C、F 四点共圆，这个性质可以证明，所以分析可以完成.

例 27 已知：C、D 是以 AB 为直径的半圆上的两点，$CE\perp AB$，$DF\perp AB$，垂足分别为 E、F，$DG\perp OC$ 垂足是 G. 求证：$CE=GF$.

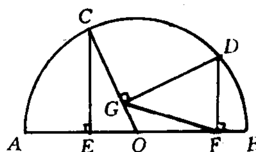


图 4·70

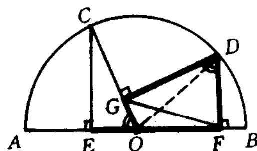


图 4·71

分析：本题条件中出现了 $DF\perp AB$，$DG\perp OC$，也就是 $\angle DFO=\angle DGO=90°$，于是就可以应用圆周角的基本图形或者圆内接四边形的性质进行证明，也即可得 G、O、F、D 四点共圆，又因为 F、O、E 成一直线，所以 $\angle COE=\angle GDF$. 另一方面，由于 $\angle DFO$ 和 $\angle DGO$ 都是圆周角，且它们都等于 90°，所以又可应用半圆上的圆

周角的基本图形的性质进行证明，于是连结 OD，就可得 OD 是四边形 $GOFD$ 的外接圆的直径. 再由条件 $\angle CEO=90°$，所以 E 也在以 OC 为直径的圆上，这个圆也就是 $\triangle CEO$ 的外接圆. 而 OC 和 OD 是以 AB 为直径的半圆的两条半径，当然相等，所以四边形 $GOFD$ 和 $\triangle CEO$ 的外接圆就是两个等圆，而我们已经证明相等的这两个角，即 $\angle COE$ 和 $\angle GDF$ 是这两个等圆的圆周角，从而就可推得它们所对的弧和所对的弦都相等，也就可以证明 $CE=GF$.

由于本题的条件中出现了 AB 是半圆的直径和 $DF\perp AB$，所以也可应用垂径定理的性质来进行分析. 但现在 DF 仅是半弦，所以应将另一半先作出，也就是延长 DF 交以 AB 为直径的 $\odot O$ 于 H，那末 F 就是 DH 的中点. 又因为 OC 是 $\odot O$ 的半径且 $OC\perp DG$，所以也可以应用垂径定理，也就同样是延长 DG 交 $\odot O$ 于 K，得 G 是 DK 的中点，这样就出现了两个中点，成为多个中点问题，从而可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 F、G 所在的线段有公共端点 D，可以组成三角形，所以 FG 这两个中点的连线就是三角形的中位线，而现在图形中是有中位线，但三角形不完整，从而就应将三角形的边添上，也就是连结 KH，就可得 $KH=2GF$. 再由条件 AB 是 $\odot O$ 的直径，$CE\perp AB$，就又可以应用垂径定理，于是延长 CE 交 $\odot O$ 于 M，又可得 E 是 CM 的中点，$CM=2CE$. 这样要证明 $CE=GF$，就可以转化为证 $CM=KH$，或者也就是要证 $\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{KH}$. 由 $CM\perp AB$，$DH\perp AB$，可得 $CM/\!/DH$，所以 $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{MH}$. 而由 $OC\perp DK$ 又可得 $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{CK}$，于是 $\overset{\frown}{CK}=\overset{\frown}{MH}$，所以 $\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{KH}$ 就可以证明.

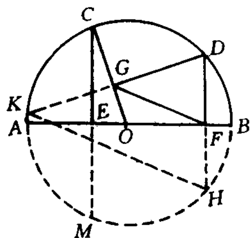


图 4・72

例 28 已知：$\odot O$、$\odot O'$ 相交于 A、B，过 B 的直线交 $\odot O$、

⊙O'于C、D. 两圆的弦CE、DF的延长线相交于G. 求证：A、F、G、E四点共圆.

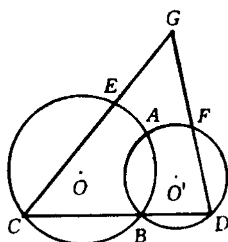


图 4・73

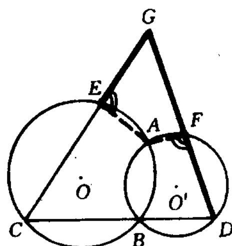


图 4・74

分析：本题要证明的结论A、F、G、E四点共圆，是一个四点共圆的判定问题，所以可应用圆周角的基本图形或圆内接四边形的性质来进行分析. 由于图形中这个圆内接四边形尚未出现，所以连结AE、AF，由于G、F、D成一直线，那末问题就成为要证$\angle DFA=\angle GEA$. 又因为在⊙O中，也出现了A、E、C、B四点共圆，所以用同样的方法，连结AB后，可得$\angle GEA=\angle CBA$，这样问题又成要证$\angle DFA=\angle CBA$. 由于在⊙O'中，也出现了A、B、D、F四点共圆，且D、B、C成一直线，所以这个性质是可以证明的.

例 29 已知：⊙O、⊙O'相交于A、B，过B的直线交⊙O、⊙O'于C、D，两圆的弦EC、FD的延长线相交于G. 求证：A、E、G、F四点共圆.

分析：本题要证A、E、G、F四点共圆，是一个圆内接四边形的判定问题，所以连结AE、AF后，应证明$\angle G+\angle EAF=180°$.

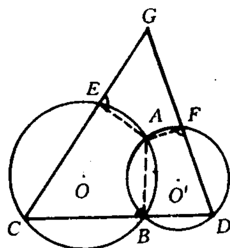


图 4・75

又因为条件中给出A、E、C、B四点共圆，且E、C、G成一直线，所以连结AB后，

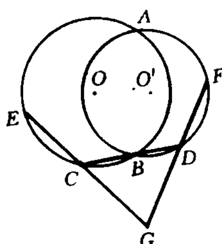


图 4・76

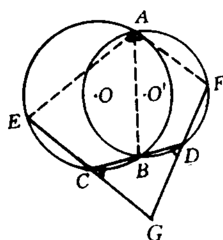


图 4・77

有$\angle GCD=\angle EAB$. 同样地,由 A、B、D、F 四点共圆和 F、D、G 成一直线,又可得$\angle GDC=\angle FAB$. 而在$\triangle GCD$ 中,$\angle G+\angle GCD+\angle GDC=180°$,所以上述性质可以证明.

此题也有如图 4・78 所示的情况,此时要证 A、E、G、F 四点共圆,所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 于是连结 AE、AF 后,应证$\angle G+\angle EAF=180°$. 又因为在$\odot O$ 中出现了 A、C、E、B 四点共圆,所以连结 AB 后可得$\angle C=\angle EAB$. 而在$\odot O'$ 中也出现了 A、B、D、F 四点共圆,且 G、D、F 成一直线,从而又可得$\angle GDC=\angle FAB$,而在$\triangle GCD$ 中,有$\angle G+\angle GDC+\angle C=180°$,所以$\angle G+\angle EAF=180°$就可以证明.

类似地,如图 4・79 所示的情况,此时要证 A、E、G、F 四点共圆,可以连结 AE、AF,且由于 G、E、C 成一直线,所以应证$\angle CEA=\angle F$.

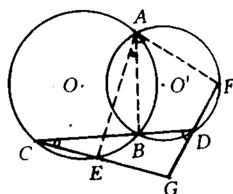


图 4・78

又因为在$\odot O$ 中,出现了 A、C、B、E 四点共圆,所以连结 AB 后可得$\angle CEA=\angle CBA$,而在$\odot O'$ 中也出现了 A、B、D、F 四点共圆,且 D、B、C 成一直线,所以又有$\angle CBA=\angle F$,这样分析即可完成.

如图 4・80 的情况,此时要证 A、E、

图 4・79

图 4・80

F、G 四点共圆，可以连结 AE、AF 后，应证$\angle G=\angle EAF$.

由条件 A、C、B、E 四点共圆，所以连结 AB 后，可得$\angle EAB=\angle C$，而在$\odot O'$ 中又出现 A、B、D、F 四点共圆，可得$\angle D+\angle BAF=180^\circ$，即$\angle D+\angle EAF+\angle EAB=180^\circ$，$\angle D+\angle EAF+\angle C=180^\circ$，而在$\triangle DCG$ 中，我们有$\angle D+\angle G+\angle C=180^\circ$，所以$\angle G=\angle EAF$ 可以证明.

如图 4・81 的情况，此时要证 A、E、G、F 四点共圆，可以连结 AE、AF 后，应证$\angle G+\angle EAF=180^\circ$.

图 4・81

又因为在$\odot O$ 中出现了 A、C、E、B 四点共圆，所以连结 AB 后，可得$\angle C=\angle EAB$. 根据同样的道理由 A、B、F、D 四点共圆，又可得$\angle D=\angle FAB$. 而在$\triangle GCD$ 中，有$\angle G+\angle C+\angle D=180^\circ$，所以通过$\angle G+\angle EAB+\angle FAB=180^\circ$ 就可以证明结论.

如图 4・82 的情况，此时要证 A、G、F、E 四点共圆，就可以连结 AE、AF 后，证明$\angle AEG=\angle AFG$.

由于$\angle AEG$ 是$\odot O$ 的一个圆周角，所以由 A、C、B、E 四点共圆就可连结 AB 后，得$\angle AEC=\angle ABC$，那末问题就成为要证明$\angle ABC=\angle AFG$.

另一方面，在$\odot O'$ 中也出现了 A、B、F、D 四点共圆，所以$\angle ABD=\angle AFD$. 而要证明相等的这两个角现在分别是$\angle ABD$

和$\angle AFD$的补角，所以它们的相等就可以证明.

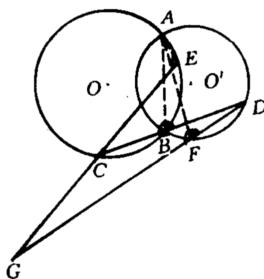


图 4・82

如图4・83的情况，此时要证A、G、F、E四点共圆，所以可连结AE、AF后，证明$\angle EAF=\angle EGF$.

由条件在$\odot O$中，A、C、B、E四点共圆，所以连结AB后，有$\angle EAB=\angle C$. 而由A、F、B、D四点共圆，又可得$\angle FAB=\angle D$. 而$\angle EAF=\angle EAB+\angle FAB=\angle C+\angle D$，从而要证明$\angle EGF=\angle C+\angle D$. 由条件$C$、$G$、$E$成一直线，$\angle EGF$是$\triangle GCD$的外角，所以上述性质就可以证明.

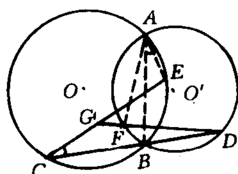


图 4・83

如图4・84的情况，此时要证A、F、G、E四点共圆，所以可连结AE、AF后，证明$\angle EAF+\angle EGF=180°$.

由条件A、C、B、E四点共圆，所以连结AB后有$\angle EAB=\angle C$，而由A、F、B、D四点共圆，又可得$\angle FAB=\angle D$，所以有$\angle EAF=\angle EAB+\angle FAB=\angle C+\angle D$，问题就应证$\angle C+\angle D+\angle EGF=180°$. 而在$\triangle GCD$中，$\angle CGD+\angle C+\angle D=180°$，$\angle CGD$和$\angle EGF$是对顶角，当然相等，所以分析完成.

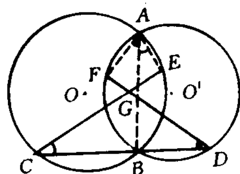


图 4・84

例30 已知：$\odot O$、$\odot O'$相交于A、B，过A、B分别作两割线交两圆于C、E、F、D. 求证：$CE\parallel DF$.

分析：这是一个两圆相交的问题，也就是两个圆的组合图形问题，所以可以转化为一个圆中的问题来进行分析.

由条件在⊙O中出现了A、C、E、B四点共圆，所以可应用圆周角的基本图形或者也就是圆内接四边形的性质进行证明．于是连结AB，又因为E、B、F成一直线，所以$\angle ABF=\angle C$．而在⊙O'中又出现了A、B、F、D四点共圆，所以又有$\angle ABF+\angle D=180°$，这样进一步就可推得$\angle C+\angle D=180°$．而这两个角可以看作是

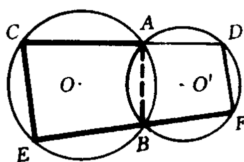


图 4・85

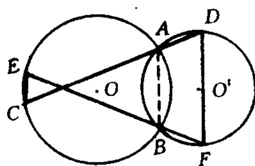


图 4・86

CE、DF被CD所截得到的一组同旁内角，所以结论就可以证明．

此题的割线位置如果是图 4・86 的情况，此时要证明$EC /\!/ DF$，是一个平行线的判定问题，而EC、DF可以看作是被EF所截，所以问题就是要证$\angle E=\angle F$．而在⊙O中，$\angle E$是一个圆周角，从而可应用圆周角的基本图形的性质进行证明．于是由E、C、B、A四点共圆和找$\angle E$所对的弧、即$\overset{\frown}{CB}$所对的另一个圆周角，可得连结AB，$\angle E=\angle CAB$．又因为在⊙O'中，现在也出现了A、B、F、D四点共圆，且D、A、C成一直线，所以又有$\angle CAB=\angle F$，这样结论就可以证明．

第二节　弦切角

【分析方法导引】

当几何问题中出现了圆的切线或圆的半径的垂线时，就应想到要应用弦切角的基本图形进行证明．

如出现了圆的切线，但未出现弦切角时，首先应添加过切点的弦或过切点的直径（半径），然后在必要时还应添加这个弦切角所夹的弧所对的圆周角，从而就可以应用弦切角的基本图形的性质完成分析. 如出现的是圆的半径的垂线，则应添加过半径外端的圆的切线，然后再应用弦切角的基本图形和平行线的基本图形的性质完成分析.

当几何问题中出现了相切圆的问题时，就应想到要将问题转化到一个圆中的问题来进行分析和讨论，转化的方法是添加过切点的两圆的公切线. 接下来就可以分别在每一个圆中应用弦切角的基本图形的性质来完成分析.

例 31 已知：PA 与⊙O 相切于 A，割线 PBC 交⊙O 于 B、C，$\angle APC$ 的角平分线交 AB、AC 于 E、D. 求证：$AD=AE$.

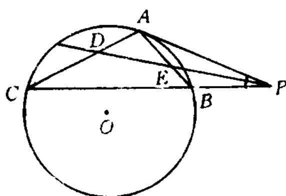


图 4・87

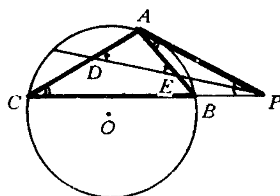


图 4・88

分析：本题条件中出现了 PA 是⊙O 的切线，所以可应用弦切角的基本图形的性质进行证明. 由于 AB 是过切点的弦，所以有 $\angle PAB=\angle C$.

又因为本题要证 $AD=AE$，这是两条具有公共端点的相等线段，它们可组成一个等腰三角形，问题就成为一个等腰三角形的判定问题，于是就可以转而证 $AD=AE$ 的等价性质 $\angle ADE=\angle AED$.

由于条件中还给出 C、D、A 成一直线，所以 $\angle ADE$ 就成为 $\triangle PCD$ 的外角，于是可得 $\angle ADE=\angle C+\angle CPD$. 根据同样的道理又可得 $\angle AED=\angle PAE+\angle EPA$，而由条件又有 $\angle CPD=\angle EPA$，所以只须证 $\angle C=\angle PAE$，而这一性质我们已经证明，所以分析可以完成.

例 32 已知：$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，过 A、C 作 $\odot O$ 的切线相交于 D，BC 的垂直平分线交 AB 于 E. 求证：$ED /\!/ BC$.

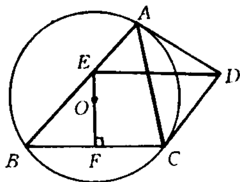


图 4・89

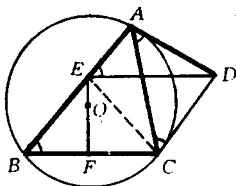


图 4・90

分析：本题要证 $ED /\!/ BC$，这是一个平行线的判定问题，由于 ED、BC 可以看作是被 AB 所截，所以问题可成为要证明 $\angle AED=\angle ABC$.

又因为 DA、DC 是 $\odot O$ 的切线，所以可应用弦切角的基本图形的性质进行证明. 而现在 AC 是过切点的弦，所以有 $\angle DAC=\angle DCA=\angle ABC$，这样问题就转化成为要证 $\angle AED=\angle ACD$，而这两个角相等一出现，就可以应用圆周角的基本图形或圆内接四边形的性质进行证明，于是问题就成为要证 A、E、C、D 四点共圆.

由条件 EF 是 BC 的垂直平分线，所以可应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质进行证明，由于图形中这个等腰三角形还缺少一条腰，所以应先将这条腰添上，也就是连结 CE，即可得 $EB=EC$. 又因为 $DA=DC$ 和 $\angle DAC=\angle DCA=\angle ABC$，所以这两个等腰三角形的底角都相等，所以它们的顶角也一定相等，也就是 $\angle BEC=\angle ADC$，而已知 B、E、A 成一直线，$\angle BEC$ 是四边

形 $AECD$ 的外角，所以 A、E、C、D 四点共圆就可以证明.

例 33 已知：⊙O 中 AB、AC 是两条弦，且 $AB=AC$，过 C 作⊙O 的切线交 BA 的延长线于 D，$DE\perp AC$ 垂足是 E. 求证：$BD=2CE$.

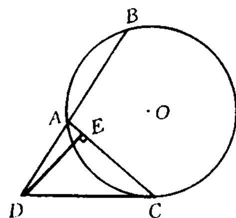


图 4・91

分析：本题条件中出现了 DC 是⊙O 的切线，所以就可以应用弦切角的基本图形的性质进行证明. 由于 CA 是过切点 C 的弦，所以 $\angle DCA$ 就是弦切角，但图形中这个弦切角所夹的弧、即 $\overset{\frown}{AC}$ 所对的圆周角尚未出现，所以应将这个圆周

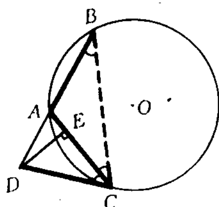


图 4・92

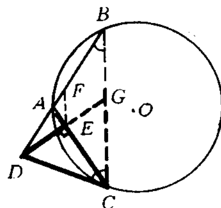


图 4・93

角添上，也就是连结 CB，可得 $\angle DCA=\angle B$. 又因为 $AB=AC$，它们可组成一个等腰三角形，所以 $\angle B=\angle ACB$，于是又得 $\angle DCA=\angle ACB$，这样 CA 就成为 $\angle DCB$ 的平分线. 又因为条件中给出 $DE\perp AC$，所以 DE 是向角平分线 AC 所作的垂线，这样又可构成一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的，而现在 DE 与角的另一边 CB 尚未相交，所以延长 DE 交 BC 于 G，即可得 $CD=CG$ 和 $DE=GE$，这样 E 就成为 DG 的中点.

本题要证明的结论是 $BD=2CE$. 这是两条线段之间的倍半关系，所以可根据线段倍半关系的定义，将 BD 两等分，也就是取

BD 的中点 F，然后证明 BD 的一半即 BF 与 CE 相等. 在取了 BD 的中点 F 以后，就出现了 F、E 分别是 DB、DG 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 F、E 这两个中点所在的线段有公共端点 D，可以组成三角形，所以 FE 这两个中点的连线就是三角形的中位线，而现在的问题是有三角形而没有中位线，所以应先将中位线添上，于是连结 FE，可得 $FE\parallel BG$. 这样 FE 就成为 $\triangle ABC$ 中的一条边 BC 的平行线段，所以可应用平行线型相似三角形进行证明，也就是由 $FE\parallel BC$，可得 $\triangle AFE\backsim\triangle ABC$，$\frac{CE}{CA}=\frac{BF}{BA}$，而 $AB=AC$，于是就可证明 $BF=CE$.

当连结 BC，得 $\angle DCA=\angle B$ 后，再考虑本题要证的结论是 $BD=2CE$，这是两条线段之间的倍半关系，所以可根据线段倍半关系的定义，将半线段 CE 延长一倍，也就是延长 CE 到 F，使 $EF=CE$ 后，证明 $FC=BD$. 但在作出了 $FE=CE$ 后，由条件 $DE\perp CF$，出现了 DE 是 CF 的垂直平分线，从而就可以应用等腰三角形中的重要线段的基本图形的性质进行证明. 由于这时的等腰三角形还缺少一条腰，所以连结 DF，即可得 $DF=DC$，$\angle DCF=\angle F$，这样又可进一步推得 $\angle F=\angle B$，而这两个角相等一出现，也就出现了 B、C、D、F 四点共圆，或四边形 $BCDF$ 是圆内接四边形. 另一方面，由条件 $AB=AC$，又可得 $\angle B=\angle ACB$，所以有 $\angle F=\angle ACB$，从而可得 $FD\parallel BC$，那末 FD 和 BC 就成为这个圆中的两条平行弦，所以 $BD=CF$ 就可以证明.

图 4・94

例 34 已知：四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，且 $\odot O'$ 与四边形 $ABCD$ 的四边相切于 E、F、G、H，EG 与 FH 相交于 M. 求证：EG

$\perp FH$.

图 4·95

图 4·96

分析:本题要证明 $EG\perp FH$,根据垂线的定义,可证明它们相交所得的四个角中有一个角是直角,于是就可选择证明$\angle GMH=90^\circ$.

由于 AB 与$\odot O'$ 相切于 E,所以可应用弦切角的基本图形的性质进行证明. 根据 EH 可以取作过切点 E 的弦,所以连结 HE、HG,可得$\angle 3=\angle 4$. 根据同样的道理,连结 GF 后,又可得$\angle 1=\angle 2$. 这样要证明$\angle GMH=90^\circ$,就只要证明$\angle 2+\angle 4=90^\circ$,也就是只要证$\angle 1+\angle 3=90^\circ$.

由条件 AH、AE 与$\odot O'$ 分别相切于 H、E,那末应用切线长定理可得 $AH=AE$,所以$\angle 3$ 就是等腰$\triangle AEH$ 的底角,于是$\angle 3=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)$. 根据同样的道理,由 CF、CG 与$\odot O'$ 分别相切于 F、G,也可推得$\angle 1=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C)$. 这样就有$\angle 1+\angle 3=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)+\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C)=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$. 于是要证明$\angle 1+\angle 3=90^\circ$,就可以转化成为要证$\angle A+\angle C=180^\circ$. 而$\angle A$ 和$\angle C$ 都是$\odot O$ 的圆周角,那末由条件中给出的四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$,所以可应用圆周角的基本图形或者也就是圆内接四边形的性质得$\angle A+\angle C=180^\circ$,分析就可以完成.

例 35 已知:AB 是$\odot O$ 的直径,$DC\perp AB$,垂足是 C,DE 与

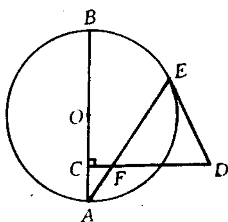


图 4・97

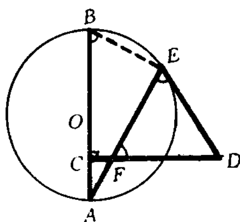


图 4・98

$\odot O$ 相切于 E，AE 交 CD 于 F. 求证：$DF=DE$.

分析：本题要证明 $DF=DE$，这就是两条具有公共端点的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题，所以问题就是应证$\angle DEF=\angle DFE$.

由条件 DE 与$\odot O$ 相切于 E，所以就可应用弦切角的基本图形的性质进行证明. 由于 EA 是过切点的弦，而弦切角即$\angle DEA$所夹的$\overset{\frown}{AE}$所对的圆周角尚未出现，所以应先将这个圆周角添出，于是连结 BE，就可得$\angle DEA=\angle B$，问题也就成为要证$\angle DFE=\angle B$.

由条件 C、F、D 成一直线，$\angle DFE$ 就成为四边形 $CFEB$ 的一个外角，所以$\angle DFE=\angle B$ 这个性质一出现，就使这个四边形必定成为一个圆内接四边形，这样问题就成为应证 C、F、E、B 四点共圆. 由条件 $CD\perp AB$，即有$\angle FCA=90°$，而条件中还给出 AB 是$\odot O$ 的直径，所以又可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明，于是由 E 是半圆上的一点，即可得$\angle AEB=90°$，所以 C、F、E、B 四点共圆就可以证明.

本题在分析证$\angle DEF=\angle DFE$ 时，由于$\angle DEF$ 是弦切角，所以也可以直接应用弦切角的性质得$\angle DEF$ 的度数等于$\overset{\frown}{AE}$的度数的一半，这样问题就成为要证$\angle DFE$ 的度数也等于$\overset{\frown}{AE}$的度数的

一半. 而现在$\angle DFE$是一个圆内角，所以就要应用圆内角的性质，于是应先将$\angle DFE$的对顶角的边延长到与$\odot O$相交，也就是延长DC交$\odot O$于H，就可得$\angle DFE$的度数应等于$\overset{\frown}{EG}+\overset{\frown}{AH}$的度数的一半，也就得问题应证$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EG}+\overset{\frown}{AH}$，$\overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{AG}$. 由条件$AB$是$\odot O$的直径，且$AB\perp GH$，所以直接应用垂径定理就可证明上述性质.

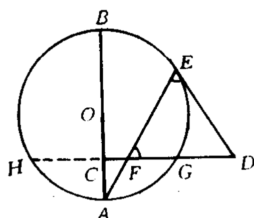


图 4・99

本题在分析证$\angle DEF=\angle DFE$时，由于条件中出现是AB是$\odot O$的直径和$DC\perp AB$是直径的垂线，所以也可添加过直径的端点所作的直径的垂线来进行证明. 于是过A作AB的垂线AG，即可得AG与$\odot O$相切于A，而AE是过切点的弦，所以有$\angle DEF=\angle GAE$. 而在作出了$GA\perp AB$后，由条件$DC\perp AB$，就可得$CD/\!/AG$，而这一组平行线又可以看作是被AE所截，所以又有$\angle GAE=\angle DFE$，从而也可以完成分析.

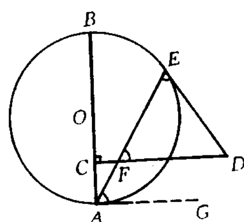


图 4・100

例 36　已知：$\triangle ABC$的内切圆$\odot I$与三边分别相切于D、E、F，$DG\perp EF$，垂足是G. 求证：$FG\cdot CD=EG\cdot BD$.

分析：本题条件中出现了BC与$\odot I$相切于D，所以可应用弦切角的基本图形的性质进行证明. 于是连结DI，可得$\angle IDC=90°$. 又因为条件中给出了$\angle DGF=90°$，这样结论中所出现的FG

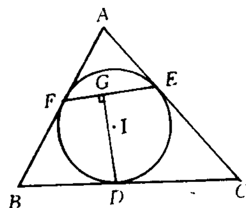


图 4・101

和 CD 就可以分别看作是两个直角三角形的直角边，而从图形中可以发现这时三角形的斜边尚未出现，所以可先将斜边添上，也就是连结 DF、CI，这样就出现了两个直角三角形，即$\triangle DGF$ 和

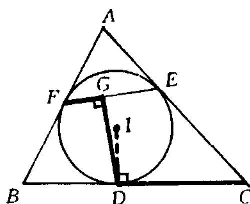


图 4・102

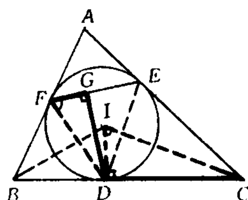


图 4・103

$\triangle CDI$. 由于$\triangle DGF$ 中的$\angle DFG$ 是$\odot I$ 的一个圆周角，而$\triangle CDI$ 中的$\angle CID$ 是$\odot I$ 的一个圆心角，而由 CD、CE 与$\odot I$ 分别相切于 D、E，可知应用切线长定理及其推论可得$\angle CID=\frac{1}{2}\angle EID=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$的度数，这样就有$\angle DFG=\angle CID$，而$\angle DGF=\angle CDI=90°$，从而就可发现和证明$\triangle DGF\backsim\triangle CDI$，$\frac{FG}{ID}=\frac{DG}{CD}$，$FG\cdot CD=ID\cdot DG$，这样问题就转化成要证明 $EG\cdot BD$ 也等于 $ID\cdot DG$，显然，用同样的方法，连结 BI、DE 后，通过证明$\triangle DGE\backsim\triangle BDI$，就可以证明上述性质，分析也就可以完成.

例 37 已知：M 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，弦 MC、MD 与弦 AB 相交于 E、F. 求证：D、F、E、C 四点共圆.

分析：本题要证 D、F、E、C 四点共圆，这就是一个圆内接四边形的判定问题. 但在已知图形中，这个圆内接四边形尚未出现，所以要先连结 CD，又因为 A、F、E 成一直线，出现了这个四边形的外角，即$\angle AFD$，所以证明 D、F、E、C 四点共圆的问题就可以转化成要证$\angle DFA=\angle C$.

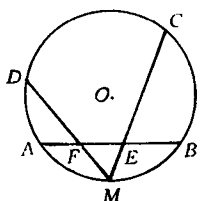


图 4・104

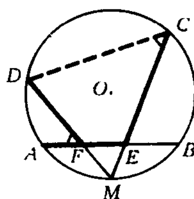


图 4・105

由于条件中出现了 M 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，所以可应用弧的中点的性质，或者也就是可应用垂径定理进行证明，于是连结 OM 交 AB 于 G 后，可得 $OM\perp AB$，这样就出现了 AB 是半径 OM 的垂线，从而可添加过半径的外端所作的半径的垂线，也就是圆的切线后，再应用弦切角的基本图形的性质进行证明，所以过 M 作半径 OM 的垂线 PQ，就可得 $PQ/\!/AB$ 和 PQ 与⊙O 相切于 M，从而又可分别推得 $\angle DFA=\angle PMD$，$\angle PMD=\angle C$，所以 $\angle DFA=\angle C$ 就可以证明.

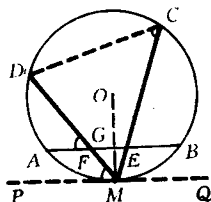


图 4・106

本题在证明 $\angle DFA=\angle C$ 时，由于 $\angle DFA$ 还可以看作是⊙O 的一个圆内角，所以也可以直接应用圆内角的性质进行证明. 从而就有 $\angle DFA$ 的度数等于 $\overset{\frown}{AD}$ 和 $\overset{\frown}{MB}$ 的度数之和的一半，而已知 $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{AM}$，所以 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{DM}$，从而也就可以证明 $\angle DFA=\angle C$.

例 38 已知：$\triangle ABC$ 内接于⊙O，BD、CE 是高. 求证：$OA\perp DE$.

分析：本题要证 $OA\perp DE$，而 OA 是⊙O 的半径，这样就出现了 DE 是半径 OA 的垂线，所以就可添加过半径的外端所作的半径的垂线，也就是圆的切线后，再应用弦切角的基本图形的性质进

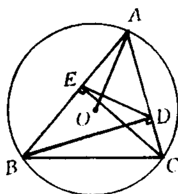


图 4・107

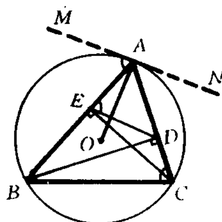


图 4・108

行证明，于是过 A 作 OA 的垂线 MN，就可得 MN 与⊙O 相切于 A. 而在作出了 $MN \perp OA$ 后，要证明 $OA \perp DE$，也就转化成要证 $MN /\!/ DE$，成为一个平行线的判定问题，由于 MN 和 DE 这两条要证明的平行线可以看作是被 AB 所截，所以问题就应证 $\angle MAB = \angle AED$. 而由 MN 与⊙O 相切于 A，AB 是过切点 A 的弦，所以有 $\angle MAB = \angle ACB$，这样问题又转化成为要证 $\angle AED = \angle ACB$. 由于 A、E、B 成一直线，所以 $\angle AED$ 可以看作是四边形 $BCDE$ 的一个外角，这样只要 $\angle AED$ 和 $\angle ACB$ 这两个角相等的关系一出现，就可得四边形 $BCDE$ 应是一个圆内接四边形，也就是问题成为要证明 B、C、D、E 四点共圆. 由于 BD、CE 是 $\triangle ABC$ 的两条高，$\angle BDC = \angle BEC = 90°$，所以上述性质可以证明，分析也就完成.

本题要证 $OA \perp DE$，如设 OA 和 DE 的交点是 G，则应证 $\angle AGD = 90°$，也就是在 $\triangle ADG$ 中，应证 $\angle ADG + \angle DAG = 90°$.

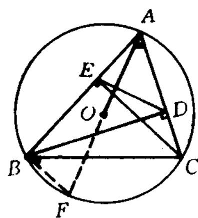


图 4・109

由条件 $\angle BDC = \angle BEC = 90°$，所以 B、C、D、E 四点共圆，且 C、D、A 成一直线，所以又可得 $\angle ADG = \angle ABC$.

接下来再分析 $\angle DAG$，由于 $\angle DAG$ 是⊙O 的一个圆周角，所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明，但现在 $\angle DAG$ 的一条边 AO 尚未与⊙O

相交，所以应先将它们延长到相交，也就是延长 AO 交$\odot O$ 于 F，那末连结 BF 后，就有$\angle DAG=\angle FBC$. 但我们作出的 AF 是$\odot O$ 的直径，应用直径的性质，就可得$\angle ABF=90^\circ$，即$\angle ABC+\angle FBC=90^\circ$，分析完成.

例 39 已知：AB 是$\odot O$ 的弦，C 是$\overparen{AB}$的中点，过 C 任作一弦 CD 交 AB 于 E，在$\overparen{BC}$上取一点 F 使 $CF=CE$，DF 交 AB 于 G.

求证：$\angle EGC=\angle FGC$.

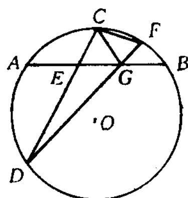


图 4・110

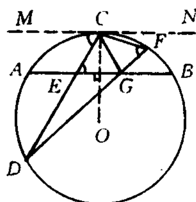


图 4・111

分析：本题的条件中出现了 C 是$\overparen{AB}$的中点，所以可应用弧的中点的性质，或者也就是可应用垂径定理进行证明，于是可得连结 OC 后，有 $OC\perp AB$，这样就出现了 AB 是半径 OC 的垂线，从而就可添加过半径的外端所作的半径的垂线，也就是圆的切线后，再应用弦切角的基本图形的性质进行证明，所以过 C 作半径 OC 的垂线 MN，得 MN 与$\odot O$ 相切于 C，而 CD 是过切点的弦，所以$\angle MCD=\angle F$. 又因为 MN、AB 都与 OC 垂直，所以 $MN/\!/AB$，而这两条平行线又可以看作是被 CD 所截，所以又可推得$\angle MCD=\angle CEG$，$\angle CEG=\angle CFG$.

本题要证明的结论是$\angle EGC=\angle FGC$，那末在$\triangle EGC$ 和$\triangle FGC$ 中就出现了两个角对应相等，且它们还有一条公共边 CG，所以这两个三角形必定全等. 但要证明这两个三角形全等，由于

$\angle EGC=\angle FGC$ 是结论，不能用，所以还需要另外一个条件，而第三个角相等的性质与 $\angle EGC=\angle FGC$ 是等价的，所以第三个条件不能是证 $\angle ECG=\angle FCG$，从而就必须要证边对应相等的条件. 本题的条件中还给出 $CE=CF$，但这是出现两边和其中一边的对角对应相等，尚不能证明这两个三角形全等，所以这时必须还要证明 $GE=GF$. 由于这是两条具有公共端点 G 的相等线段，它们可组成一个等腰三角形，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题，但这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，所以应先将底边添上，也就是连结 EF，这样问题就成为要证 $GE=GF$ 的等价性质 $\angle GEF=\angle GFE$. 而我们已经证明了 $\angle CEG=\angle CFG$，所以问题又进一步转化为要证 $\angle CEF=\angle CFE$. 显然由条件 $CE=CF$，就可以证明这个性质，从而即可推得 $\triangle EGC$ 和 $\triangle FGC$ 全等，分析就可以完成.

图 4・112

图 4・113

例 40 已知：过 $\odot O$ 的圆心 O 向圆外直线 MN 作垂线分别交 MN 和 $\odot O$ 于 A、B，过 B 任作两直线分别交 MN 和 $\odot O$ 于 C、D、E、F. 求证：C、D、E、F 四点共圆.

分析：本题条件中出现了 $MN\perp OA$，而 OB 是 $\odot O$ 的半径，所以 MN 就是半径 OB 的垂线，于是就可添加过半径的外端所作半径的垂线，也就是圆的切线后，再应用弦切角的基本图形的性质进行证明，所以过 B 作 OB 的垂线 BK，就可得 BK 与 $\odot O$ 相切于 B，而 BE 是过切点的弦，所以 $\angle KBE$ 就是弦切角，而图形中这个弦切角所夹的弧，即 $\overset{\frown}{BE}$ 所对的圆周角尚未出现，所以应先连结 EF，然后可应用弦切角的性质得 $\angle KBE=\angle EFD$.

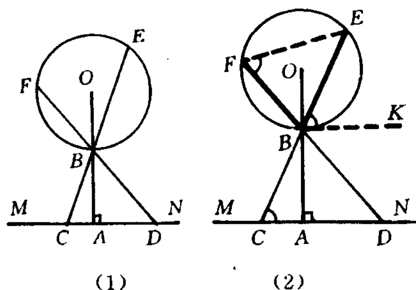


图 4・114

本题要证的结论是 C、D、E、F 四点共圆，所以要应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 由于在上述性质中出现了 $\angle EFD$，所以问题就应转而证 $\angle EFD=\angle ECD$，也就进一步转化成要证 $\angle KBE=\angle ECD$. 由于这两个角是 BK、MN 被 CE 所截而得到的一组同位角，所以问题又成为要证 $BK /\!/ MN$，而 BK 和 MN 都是 OA 的垂线，所以这个性质可以证明，分析也就可以完成.

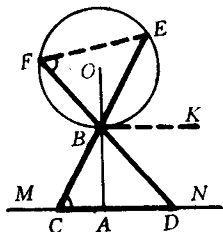


图 4・115

例 41 已知：AB 是半圆的直径，MN 与半圆相切于 C，$CD\perp AB$，$AE\perp MN$，$BF\perp MN$，垂足分别为 D、E、F. 求证：(1)$CE=CD=CF$；(2)$CD^2=AE\cdot BF$.

分析：由条件 AB 是半圆的直径，所以就可以应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明. 现在图形中已经有直径，有半圆上的点 C，而没有圆周角，所以应将圆周角添上，于是连结 AC、BC，就可得 $\angle ACB=90°$.

由本题要证明的结论是 $CD=CF$，且已知 $\angle CDB=\angle CFB=90°$，所以 CD 和 CF 这两条相等的线段就成为点 C 到 $\angle DBF$ 的两边的距离. 而点 C 到 $\angle DBF$ 的两边的距离相等，就说明 C 点在

图 4・116

图 4・117

$\angle DBF$ 的平分线上，或者就是 CD 和 CF 这两条相等的线段是关于$\angle DBF$ 的平分线成轴对称的，因此就可以应用轴对称型的全等三角形的基本图形的性质进行证明，也就是应证$\triangle CBD$ 和$\triangle CBF$ 全等. 由$\angle CDB=\angle CFB=90°$，$CB=CB$(是公共边)，可知还应证明一个性质.

由条件 NC 与半圆相切于 C，所以可应用弦切角的基本图形的性质进行证明，由于 BC 是过切点 C 的弦，所以有$\angle BCF=\angle BAC$. 这样要证明这两个三角形全等就可以证$\angle BCF=\angle BCD$，为此又只须证$\angle BCD=\angle BAC$. 由于条件中给出 $CD\perp AB$，且已经证明$\angle BCA=90°$，这样就出现了 CD 是直角$\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高，从而就可应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质证得$\angle BCD=\angle BAC=\angle BCF$，$\triangle CBD$ 也就和$\triangle CBF$ 全等，也就可以证明 $CD=CF$. 根据同样的方法又可证明 $CD=CE$.

本题在得到了 CD 是直角$\triangle ABC$ 的斜边上的高以后，还可以进一步应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，或者也就是应用射影定理得 $CD^2=AD\cdot BD$，而现在我们要证明的结论是 $CD^2=AE\cdot BF$，比较这两个关系式，可以发现问题就成为要找出 AD、BD 和 AE、BF 之间的关系. 由于 BD 和 BF 可以看作是已经证明的全等三角形，即$\triangle BCD$ 和$\triangle BCF$ 的对应边，所以就有 BD

$=BF$，根据同样的道理还可以有 $AD=AE$，所以结论就可以证明.

本题在证明 $CE=CD=CF$ 时，如直接考虑 CD 和 CF 是两条

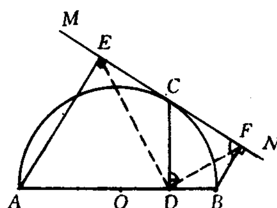


图 4·118

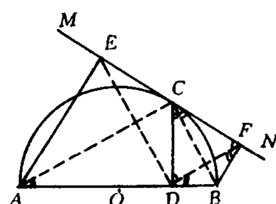


图 4·119

具有公共端点的相等线段，那就可以添加等腰三角形的基本图形进行证明，于是连结 DF 后应证 $\angle CDF=\angle CFD$，但 $\angle BDC=\angle BFC=90°$，所以又应证 $\angle BDF=\angle BFD$. 而 C、D、B、F 四点共圆，应用圆内接四边形的基本图形的性质连结 BC 后，可得 $\angle BDF=\angle BCF$，$\angle BFD=\angle BCD$，这样问题就成为要证明 $\angle BCF=\angle BCD$. 那末在连结 AC 后，由 $\angle BCF=\angle BAC$，$\angle BCD=\angle BAC$，就可以完成分析.

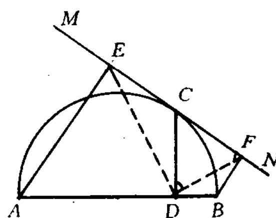


图 4·120

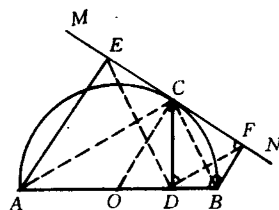


图 4·121

本题在证明 $CE=CD=CF$ 时，由于出现了 $\triangle CDF$ 和 $\triangle CDE$ 是两个顶角互为邻补角的等腰三角形，所以它们可以组合而成为一个直角三角形斜边上的中线的基本图形，所以要证明 $CD=CF$，

也可以转化为证$\angle CDF=\angle CFD$.而由$\angle CDB=\angle CFB=90°$,可得$C$、$D$、$B$、$F$四点共圆,所以连结$BC$后,可得$\angle CDF=\angle CBF$,$\angle CFD=\angle CBD$,这样问题就成要证$\angle CBF=\angle CBD$.由条件$MN$与半圆相切于$C$,所以应用切线的性质,连结$OC$后,有$OC\perp MN$,而已知$BF\perp MN$,所以$OC/\!/BF$,就可得$\angle CBF=\angle BCO$.又因为$OB$和$OC$是同圆的半径,它们可组成等腰三角形,从而又有$\angle CBO=\angle BCO$,这样就可证明$\angle CBF=\angle CBD$.再根据$AB$是半圆的直径,$C$是半圆上的一点,所以连结$AC$后,可得$\angle ACB=90°$,$\angle ACE+\angle BCF=90°$,而我们已证$\angle ACE=\angle ADE$,$\angle BCF=\angle BDF$,所以就有$\angle ADE+\angle BDF=90°$,$\angle EDF=90°$,从而完成分析.

在应用直角三角形斜边上的中线这个基本图形进行证明时,还可以考虑证$\angle FCD=2\angle CED$,由于$\angle FCD$是弦切角,但这个弦切角的一边CD尚未与圆相交,那末延长CD与$\odot O$相交于G(当然这时需先将$\odot O$添出),就可得$\angle FCD$的度数就是$\overset{\frown}{CG}$的度数的一半,而$\angle CED=\angle CAD$,所以$\angle CED$的度数就等于$\overset{\frown}{BC}$的度数的一半,这样问题就成为要证B是$\overset{\frown}{CG}$的中点.由于AB是$\odot O$的直径,CG是弦,而且$AB\perp CG$,所以应用垂径定理就可以证明这个性质.

M E C F N A O D B G

图 4·122

例 42 已知:AB是$\odot O$的直径,弦AC、BD相交于E,PD、PC与$\odot O$相切于D、C.求证:$PE\perp AB$.

分析:本题要证明$PE\perp AB$,这是一个两条垂线的判定问题,所以应根据垂线的定义,即它们应相交成90°角,将它们延长到相交,于是延长PE交AB于F,问题也就是要证$\angle EFA=90°$.

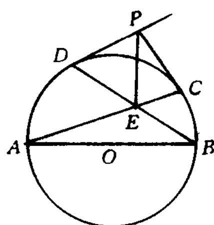


图 4・123

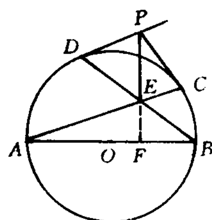


图 4・124

由条件 AB 是⊙O 的直径，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明. 现在图形中是有直径，有半圆上的点 D、C，而没有圆周角，所以应将圆周角添上，于是连结 AD(或 BC)，即可得$\angle ADB=90°$. 这样要证明$\angle EFA=90°$，就成为应证 A、F、E、D 四点共圆，也就是四边形 $AFED$ 应是圆内接四边形. 又因为 P、E、F 成一直线，出现了$\angle PED$ 是这个圆内接四边形的一个外角，所以问题又可转化为应证$\angle PED=\angle DAB$.

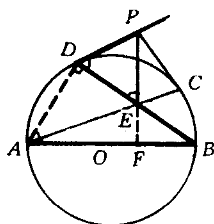


图 4・125

又因为 PD 与⊙O 相切于 D，所以可应用弦切角的基本图形的性质进行证明，由于 BD 是过切点 D 的弦，$\angle PDB$ 是弦切角，所以有$\angle PDE=\angle DAB$，于是问题就转化为要证$\angle PED=\angle PDE$，也就是应证它的等价性质 $PD=PE$ 成立. 又因为 PD、PC 分别与⊙O 相切于 D、C，所以可应用切线长定理得 $PD=PC$. 这样问题实质上就成为要证 $PD=PE=PC$，而这个等式一出现，就是要证 P 是$\triangle CDE$ 的外心. 由于这个$\triangle CDE$ 目前尚未出现，所以应将它先添出来，也就是

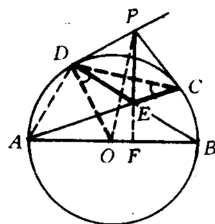


图 4・126

连结 CD.

现在要证 P 是$\triangle CDE$ 的外心，则根据三角形外心的定义，它应在三角形三边的垂直平分线上，而其中的一条中垂线是容易证明的，这是因为这个三角形的一条边 CD 是连结两个切点的弦，所以由 PD、PC 分别与$\odot O$ 相切于 D、C，应用切线长定理及其推论，即有连结 OP 后，得 OP 是 CD 的垂直平分线，于是就可得$\triangle CDE$ 的外心必定在 OP 上.

另一方面，因为 PD 与$\odot O$ 相切于 D，所以又可以应用切线的性质，也就是连结 OD 后，可得$\angle ODP=90°$，但在作出了 OD 以后，由于 OD 和 OB 是同圆的两条半径，所以有 $OD=OB$，它们就可以组成一个等腰三角形，应用等腰三角形的基本图形的性质又可得$\angle ODB=\angle B$. 而现在图形中还出现了圆上的四点，即 A、B、C、D 四点共圆，从而再应用圆周角的基本图形的性质，又可得$\angle B=\angle ACD$，所以$\angle ODB=\angle ACD$. 而这两个角相等的关系一出现，也就出现了一个弦切角的基本图形，从而就可以应用弦切角性质定理的逆定理，得 OD 与$\triangle DEC$ 的外接圆相切于 D. 而我们已经证明 $PD\perp OD$，所以 PD 必定经过$\triangle CDE$ 的外接圆的圆心，也就是$\triangle CDE$ 的外心也必在 PD 上，于是可得$\triangle DEC$ 的外心必定是 OP 和 DP 的交点，也就是 P 点，从而就可证明 $PD=PE=PC$，分析完成.

例 43　已知：PA 与$\odot O$ 相切于 A，割线 PBC 交$\odot O$ 于 B、C，D 是 BC 的中点. 求证：P、O、D、A 四点共圆.

分析：本题条件中给出了 PA 与$\odot O$ 相切于 A，所以可应用弦切角的基本图形的性质进行证明，也就是连结 OA 后，可得$\angle PAO=90°$. 又因为 D 是弦 BC 的中点，所以又可以应用弦的中点的性质，或者也就是直接应用垂径定理，得连结 OD 后，有$\angle PDO=90°$. 于是就得到$\angle PAO=\angle PDO=90°$. 从而就可以证明 P、O、D、A 四点共圆.

图 4・127

图 4・128

例 44 已知：PA、PB 与⊙O 相切于 A、B，割线 PCD 交⊙O 于 C、D，$AE // PD$ 交⊙O 于 E，EB 交 PD 于 F. 求证：$DF=CF$.

图 4・129

分析：本题要证的结论是 $DF=CF$，就出现了 F 是割线 PCD 交圆所得的弦 CD 的中点，且 PB 与⊙O 相切于 B，所以就可以应用圆周角的基本图形或者也就是圆内接四边形的性质进行证明. 也就是由 PB 与⊙O 相切于 B，所以就可应用弦切角的基本图形的性质，于是连结 OB 后，有$\angle PBO=90°$. 又因为要证 F 是弦 CD 的中点，所以可应用弦的中点的性质或者也就是直接应用垂径定理进行证明，于是连结 OF 后，应证$\angle PFO=90°$，这样问题也就成为要证$\angle PFO=\angle PBO=90°$，也就是要证 P、O、F、B 四点共圆.

图 4・130

由条件 $AE // PD$，这一组平行线可以看作是被 BE 所截，所以有$\angle E=\angle PFB$，由于出现的是与$\angle PFB$ 有关的性质，所以要证明 P、O、F、B 四点共圆，就应证明$\angle PFB=\angle POB$，但图形中$\angle POB$ 尚未出现，所以应先连结 PO，这样问题也就进一步转化成

为要证$\angle E=\angle POB$. 但$\angle E$是$\odot O$的一个圆周角，而$\angle POB$是$\odot O$的一个圆心角，所以要证明这两个角相等，就是要证明它们所对的弧之间的倍半关系，也就是设PO与$\odot O$相交于G后，应证明$\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{BG}$，也就是要证$G$是$\overset{\frown}{AB}$的中点. 由条件$PA$、$PB$与$\odot O$分别相切于$A$、$B$，应用切线的性质，连结$OA$后，可得$\angle PAO=\angle PBO=90°$，那末再由$OA=OB$和$OP=OP$是公共边，就可以证明$\triangle POA$和$\triangle POB$是一对轴对称型全等三角形，从而就可以证明$\angle POA=\angle POB$，$G$是$\overset{\frown}{AB}$的中点.

例 45 已知：过同心圆O外一点P，作外圆的切线PA，切点为A，作内圆的切线PB、PC，切点为B、C. 求证：$\angle OAB=\angle OAC$.

分析：由条件中出现PA与外圆相切于A，且OA是过切点的

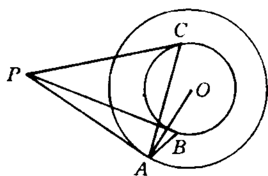


图 4 • 131

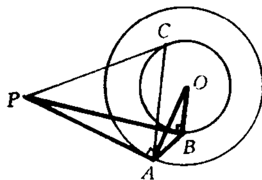


图 4 • 132

半径，所以应用切线的性质就可得$\angle PAO=90°$. 又因为条件中还给出PB与内圆相切于B，所以又可以应用弦切角的基本图形或者也就是切线的性质进行证明，于是连结OB后，又可得$\angle PBO=90°$，这样就有$\angle PAO=\angle PBO=90°$，而这个关系一出现，就出现了$P$、$A$、$B$、$O$四点共圆，那末应用圆周角的基本图形的性质连结$OP$后，有$\angle OAB=\angle OPB$.

再由条件PC也与内圆相切于C，所以应用切线的性质也可以有连结OC，$\angle OCP=90°$，$\angle PAO=\angle PCO=90°$，$P$、$A$、$O$、$C$四点共圆，$\angle OAC=\angle OPC$. 这样要证明$\angle OAB=\angle OAC$，就可以转

化为证$\angle OPB=\angle OPC$，但 PB、PC 是圆外一点向内圆所作的两条切线，所以应用切线长定理就可以证明这一性质.

图 4・133

例 46 已知：$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，E、F 是 AB、AC 上的点，且满足 $DE=DF=DB$，AG 是过 A、E、F 三点所作的$\odot O$ 的直径. 求证：DF、DE 是$\odot O$ 的切线.

图 4・134

图 4・135

分析：本题的条件中出现了 AG 是$\odot O$ 的直径，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明，由于现在图形中是有直径 AG，有半圆上的点 F(或 E)，而没有圆周角，所以应将圆周角添上，也就是连结 GF，可得$\angle GFA=90°$. 而我们现在要证明的结论是 DF 与$\odot O$ 相切，由于 DF 与$\odot O$ 已经有一个公共点 F，所以 F 点就是切点，而 FG 就是过切点的弦，从而就可以应用弦切角的基本图形的性质进行证明，也就是要证 DF 与$\odot O$ 相切，就可以转化为证$\angle DFG=\angle FAG$.

由条件 $DF=DB=DC$，出现了边 BC 上的中线 DF 等于这条边的一半，所以可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明. 于是连结 BF，由 $DF=DB$，可得$\angle DFB=\angle DBF$，由 $DF=DC$，可得$\angle DFC=\angle DCF$，而这四个角的和为 180°，所以就

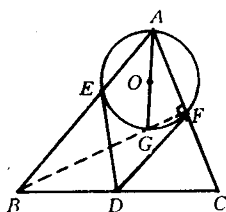


图 4・136

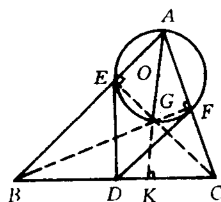


图 4・137

有$\angle BFC=\angle DFB+\angle DFC=90°$. 或者也可由 $DF=DB=DC$，得到 F 必定在以 BC 为直径的圆上，从而也可得$\angle BFC=90°$，$BF\perp AC$. 从而就可得 GF 和 BF 重合，BF 就是$\triangle ABC$ 的一条高. 根据同样的道理，连结 EG、EC 后，也可证明 $GE\perp AB$，$CE\perp AB$，GE 和 CE 重合，CE 是$\triangle ABC$ 的另一条高，那末 BF 和 CE 的交点 G 就是$\triangle ABC$ 的垂心.

由于我们要证的性质是$\angle DFG=\angle FAG$，而我们已经证得$\angle DFG=\angle DBF$，所以问题就成为要证$\angle DBF=\angle FAG$. 但由 $BF\perp AC$，可得$\angle DBF+\angle ACB=90°$，所以问题又进一步转化成要证$\angle FAG+\angle ACB=90°$，也就是要证 $AG\perp BC$. 由于我们已经证明 G 是$\triangle ABC$ 的垂心，所以根据三角形垂心的定义，延长 AG 交 BC 于 K 后，可得 AK 也是$\triangle ABC$ 的一条高，所以上述性质就可以证明.

例 47 已知：$\odot O$、$\odot O'$ 相交于 A、B，CD 是两圆的外公切线，切点是 C、D. 求证：$\angle CAD+\angle CBD=180°$.

分析：本题条件中出现了 CD 是$\odot O$ 和$\odot O'$ 的外公切线，所以对每一个圆来讲，CD 都是这个圆的切线，所以就可应用弦切角的基本图形的性质来进行证明. 由 CD 与$\odot O$ 相切于 C，CA 是过切点的弦，但图形中尚未出现弦切角$\angle DCA$ 所夹的弧，即$\overset{\frown}{AC}$所对的圆周角，所以连结 AB，可得$\angle DCA=\angle ABC$. 而由 CD 与$\odot O'$ 相

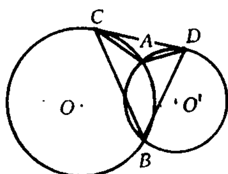


图 4・138

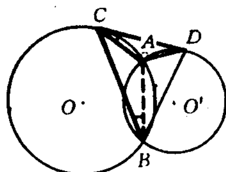


图 4・139

切于 D 和 DA 是过切点的弦，又可得$\angle CDA=\angle ABD$. 而在$\triangle ADC$中，有$\angle CAD+\angle ACD+\angle ADC=180°$，所以由$\angle CAD+\angle CBD=\angle CAD+\angle ABC+\angle ABD=\angle CAD+\angle ACD+\angle ADC=180°$就可以证明结论.

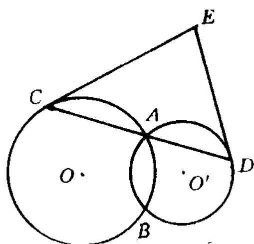


图 4・140

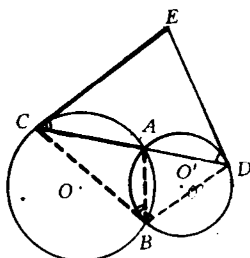


图 4・141

例 48　已知：⊙O、⊙O'相交于 A、B，过 A 的割线交两圆于 C、D，过 C、D 作两圆的切线相交于 E. 求证：B、D、E、C 四点共圆.

分析：本题要证 B、D、E、C 四点共圆，是一个圆内接四边形的判定问题，从而就可应用圆周角的基本图形或者也就是圆内接四边形的性质进行证明. 由于图形中这个圆内接四边形尚未出现，所以应先将它添完整，也就是连结 BC、BD，那末问题就可以成为要证$\angle CBD+\angle CED=180°$.

由条件 EC 是⊙O 的切线，所以可应用弦切角的基本图形的

性质进行证明，由于 AC 是过切点 C 的弦，而图形中弦切角$\angle ECA$所夹的弧$\overset{\frown}{AC}$所对的圆周角尚未出现，所以应先将它添出，也就是连结 AB，就可得$\angle ECD=\angle ABC$，根据同样的道理，由 ED 是$\odot O'$ 的切线和 DA 是过切点的弦，又可得$\angle EDC=\angle ABD$. 而在$\triangle ECD$ 中，有$\angle E+\angle ECD+\angle EDC=180°$，所以就可证明$\angle E+\angle CBD=\angle E+\angle ABC+\angle ABD=\angle E+\angle ECD+\angle EDC=180°$.

例 49 已知：$\odot O$、$\odot O'$ 相交于 A、B，过 B 的割线分别交$\odot O$、$\odot O'$ 于 C、D，过 C 作$\odot O$ 的切线交$\odot O'$ 的弦 ED 的延长线于 F. 求证：A、C、F、E 四点共圆.

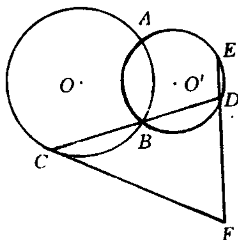


图 4・142

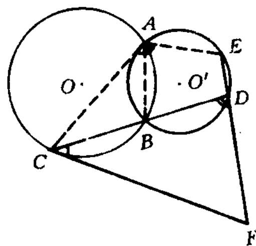


图 4・143

分析：本题要证 A、C、F、E 四点共圆，是一个圆内接四边形的判定问题，所以可应用圆周角的基本图形或者也就是圆内接四边形的性质进行证明. 由于图形中的圆内接四边形尚不完整，所以连结 AC、AE，这样问题就可以转化成要证$\angle F+\angle CAE=180°$.

由条件 FC 是$\odot O$ 的切线，CB 是过切点的弦，所以应用弦切角的基本图形的性质，连结 AB 后，有$\angle FCB=\angle BAC$. 又因为在$\odot O'$ 中，出现了圆上的四点，即 A、B、D、E 四点共圆，且 E、D、F 成一直线，出现了$\angle FDB$ 是这个圆内接四边形的一个外角，所以又可得$\angle FDB=\angle BAE$. 而在$\triangle FCD$ 中，有$\angle F+\angle FCB+$

$\angle FDB=180°$,所以就可以推得$\angle F+\angle CAE=\angle F+\angle BAC+\angle BAE=180°$.

例 50 已知:⊙O、⊙O'相交于A、B,过B的割线分别交⊙O、⊙O'于C、D,过D作⊙O'的切线交⊙O的弦CE的延长线于F. 求证:A、E、F、D四点共圆.

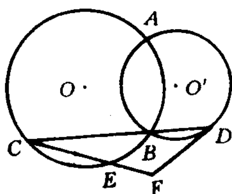


图 4・144

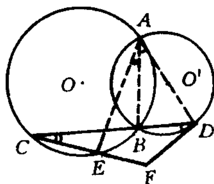


图 4・145

分析:本题要证A、E、F、D四点共圆,是一个圆内接四边形的判定问题,所以连结AE、AD后,应证明$\angle F+\angle EAD=180°$. 由条件FD与⊙O'相切于D,DB是过切点的弦,所以应用弦切角的基本图形的性质,连结AB后,有$\angle FDB=\angle BAD$. 又因为条件中还给出A、C、E、B四点共圆,所以应用圆周角的基本图形的性质又可得$\angle C=\angle BAE$. 而在$\triangle FCD$中,有$\angle F+\angle C+\angle FDB=180°$,所以$\angle F+\angle EAD=180°$就可以证明.

例 51 已知:⊙O、⊙O'相交于A、B,过B的割线分别交⊙O、⊙O'于C、D,过D作⊙O'的切线交⊙O的弦CE的延长线于F. 求证:A、E、D、F四点共圆.

分析:本题要证A、E、D、F四点共圆,所以就要应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 又因为条件中还给出FD与⊙O'相切于D,所以又可以应用弦切角的基本图形的性质进行证明. 这时就可以发现圆周角的基本图形中出现的AD就是弦切角的基本图形中的过切点的弦,所以首先连结AD,这样在圆周角的基本图形中就应再连结AE,问题就成为应证$\angle FDA=\angle FEA$. 而在弦切角的

图 4·146

图 4·147

基本图形中就应再连结 AB，得$\angle FDA=\angle DBA$. 这样问题就成为要证$\angle FEA=\angle DBA$.

由条件在⊙O中又出现了共圆的四点 A、C、B、E，所以再次应用圆周角的基本图形的性质又可得$\angle AEC=\angle ABC$，而现在要证明相等的这两个角，即$\angle FEA$和$\angle DBA$分别是这两个等角的补角，所以这两个角相等是可以证明的.

例 52 已知：⊙O、⊙O'相交于 A、B，过 B 作⊙O 的切线交⊙O'于 C，⊙O 的弦 DB 与⊙O'的弦 CE 的延长线相交于 F. 求证：A、D、F、E 四点共圆.

图 4·148

图 4·149

分析：本题要证 A、D、F、E 四点共圆，所以连结 AD、AE 后，再根据 F、E、C 成一直线，问题就转化为要证$\angle CEA=\angle D$. 由条件在⊙O'中出现了 A、B、E、C 四点共圆，$\angle CEA$ 是一个圆周角，所以连结 AB 后，有$\angle CEA=\angle CBA$. 又因为 BC 与⊙O 相切于 B，BA 是过切点的弦，所以又可得$\angle CBA=\angle D$，所以$\angle CEA=\angle D$就可以证明.

例 53 已知:$\odot O$、$\odot O'$ 相交于 A、B,过 B 作$\odot O$ 的切线交$\odot O'$ 于 C,过 C 作$\odot O'$ 的切线交$\odot O$ 的弦 EB 的延长线于 D. 求证:A、E、D、C 四点共圆.

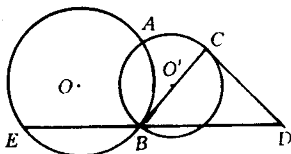


图 4 · 150

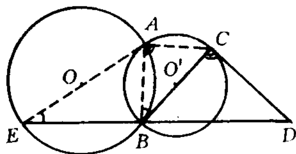


图 4 · 151

分析:本题的条件中出现了 DC 与$\odot O'$ 相切于 C,且 CB 是过切点的弦,所以可应用弦切角的基本图形的性质进行证明,于是连结 AC、AB,可得$\angle BCD=\angle BAC$.

又因为条件中还出现 BC 与$\odot O$ 相切于 B,BA 是过切点的弦,所以连结 EA 后,又可得$\angle CBA=\angle E$.

现在问题是要证明 A、E、D、C 四点共圆,这是一个圆内接四边形的判定问题,由于已经出现的是有关$\angle E$ 和$\angle BCD$ 的性质,所以问题就可以转化成为证$\angle E+\angle ACD=180°$,也就是要证$\angle E+\angle ACB+\angle BCD=180°$,$\angle CBA+\angle ACB+\angle BAC=180°$,但现在这三个角是$\triangle ABC$ 的三个内角,上述性质当然成立,所以分析可以完成.

例 54 已知:$\odot O$、$\odot O'$ 内切于 A,$\odot O$ 的弦 AB 交$\odot O'$ 于 C,$\odot O$ 的弦 BD 和$\odot O'$ 的弦 CE 的延长线相交于 F. 求证:A、F、D、E 四点共圆.

分析:本题要证 A、F、D、E 四点共圆,所以要应用圆周角的基本图形的性质进行证明.

又因为条件中给出了$\odot O$ 和$\odot O'$ 内切于 A,是一个两圆相切的问题,所以可通过添加过切点的公切线,将问题转化到一个圆中的弦切角的问题来进行分析. 于是过 A 作两圆的外公切线 MN,

图 4・152

图 4・153

这样圆周角的基本图形中的 DA 和 EA 就都成了过切点的弦，所以应先连结 DA、EA. 从而由 MA 与⊙O 相切于 A，AD 是过切点的弦，可得$\angle MAD=\angle B$. 由 MA 与⊙O' 相切于 A，AE 是过切点的弦，可得$\angle MAE=\angle ACE$. 又因为 B、C、A 成一直线，$\angle ACE$ 是$\triangle FBC$ 的一个外角，所以有$\angle F=\angle ACE-\angle B$，而由角的差的定义，又可得$\angle DAE=\angle MAE-\angle MAD$，从而就可证得$\angle F=\angle DAE$，也就可以证明结论.

例 55 已知：⊙O、⊙O' 内切于 A，⊙O 的弦 AB 交⊙O' 于 C，⊙O 的弦 BD 交⊙O' 的弦 EC 的延长线于 F. 求证：A、E、F、D 四点共圆.

图 4・154

图 4・155

分析：本题要证 A、E、F、D 四点共圆，所以连结 AD、AE 后，

应证$\angle D+\angle E=180°$.

又因为$\odot O$和$\odot O'$内切于A,所以可通过添加过切点的公切线,将问题转化到每一个圆中的弦切角问题来进行讨论.于是过A作两圆的外公切线MN.这样由MA与$\odot O'$相切于A,AC是过切点的弦,就可得$\angle MAC=\angle E$,同样地由NA与$\odot O$相切于A,AB是过切点的弦,又可得$\angle NAB=\angle D$.而$\angle MAC+\angle NAB=180°$,所以$\angle D+\angle E=180°$也就可以证明.

例 56 已知:$\odot O$、$\odot O'$内切于A,$\odot O$的弦AB交$\odot O'$于C,过B作$\odot O$的切线交$\odot O'$的弦DC的延长线于E.求证:A、D、B、E四点共圆.

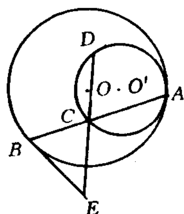


图 4・156

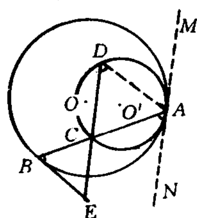


图 4・157

分析:本题应证A、D、B、E四点共圆,所以连结AD后,可证$\angle ADE=\angle ABE$.

又因为条件中给出$\odot O$、$\odot O'$内切于A,所以可添加过切点的公切线,将问题转化到每一个圆中的弦切角的问题来进行讨论,于是过A作两圆的外公切线MN.由NA与$\odot O'$相切于A,AC是过切点的弦,就可得$\angle NAC=\angle ADE$.而由NA与$\odot O$相切于A,EB与$\odot O$相切于B,AB是连结两切点的弦,又可得$\angle NAB=\angle ABE$,所以$\angle ADE=\angle ABE$就可以证明.

例 57 已知:$\odot O$、$\odot O'$内切于A,$\odot O$的弦AB交$\odot O'$于C,过C作$\odot O'$的切线交$\odot O$的弦BD于E.求证:A、C、E、D四点共

圆.

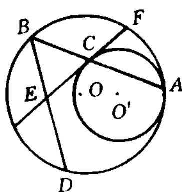


图 4・158

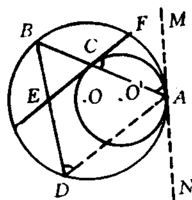


图 4・159

分析:本题要证 A、C、E、D 四点共圆,所以连结 AD 后,再考虑 E、C、F 成一直线,就应证$\angle ACF=\angle ADE$.

又因为条件中给出$\odot O$、$\odot O'$ 内切于 A,所以可添加过切点的公切线,将问题转化到每一个圆中的弦切角的问题来进行讨论,于是过 A 作两圆的外公切线 MN.则由 MA 与$\odot O$ 相切于 A,AB 是过切点的弦,可得$\angle MAB=\angle ADB$.而由 MA、FC 分别与$\odot O'$ 相切于 A、C,AC 是连结两切点的弦,又可得$\angle MAC=\angle ACF$,所以$\angle ADE=\angle ACF$ 就可以证明.

例 58 已知:$\odot O$、$\odot O'$ 相交于 A、B,过 A 的割线分别交$\odot O$、$\odot O'$ 于 C、D,BC 交$\odot O'$ 于 E,过 C 作$\odot O$ 的切线 CF.求证:$CF /\!/ ED$.

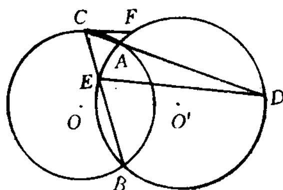


图 4・160

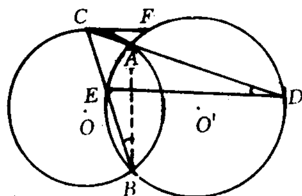


图 4・161

分析:本题要证 $CF /\!/ ED$,是一个平行线的判定问题,由于

CF 和 DE 可以看作是被 CD 所截，所以问题可成为要证 $\angle FCD = \angle D$.

由于 $\angle D$ 是 $\odot O'$ 的一个圆周角，所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 由条件 A、E、B、D 四点共圆，所以连结 AB 后，有 $\angle D = \angle B$. 又因为 FC 与 $\odot O$ 相切于 C，CA 是过切点的弦，所以应用弦切角的基本图形的性质可得 $\angle FCD = \angle B$，从而也就可以推得 $\angle FCD = \angle D$.

例 59 已知：$\odot O$ 与 $\odot O'$ 外切于 P，过 P 任作两割线分别交两圆于 A、C、B、D. 求证：$AC \parallel DB$.

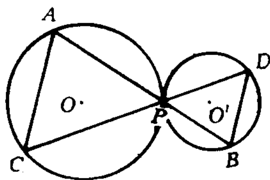


图 4・162

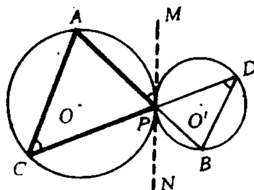


图 4・163

分析：本题要证明 $AC \parallel DB$，是两条平行线的判定问题. 由于 AC 和 DB 可以看作是被 CD 所截，所以问题就成为要证 $\angle C = \angle D$.

由于条件中给出 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 外切于 P，是一个两圆相切的问题，所以可通过添加过切点的公切线将问题转化成每一个圆中的弦切角的基本图形来分析. 于是过 P 作 $\odot O$、$\odot O'$ 的内公切线 MN，由 MP 与 $\odot O$ 相切于 P，PA 是过切点的弦，可得 $\angle MPA = \angle C$，而由 NP 与 $\odot O'$ 相切于 P，PB 是过切点的弦，又可得 $\angle NPB = \angle D$. 再由 MN 与 AB 在 P 点相交，又有 $\angle MPA = \angle NPB$，所以 $\angle C = \angle D$ 就可以证明.

例 60 已知：$\odot O$、$\odot O'$ 内切于 P，$\odot O$ 的弦 AB 交 $\odot O'$ 于 C、D. 求证：$\angle APC = \angle BPD$.

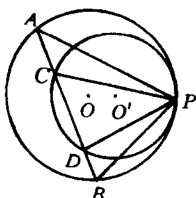


图 4 · 164

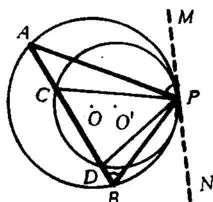


图 4 · 165

分析:本题条件中出现了$\odot O$和$\odot O'$内切于P,是一个两圆相切的问题,所以可以通过添加过切点的公切线将问题转化成每一个圆中的弦切角的基本图形问题来进行分析.从而过P作两圆的外公切线MN.由MN与$\odot O$相切于P,PA是过切点的弦,所以$\angle MPA=\angle PBA$.同样地由MN和$\odot O'$相切于P,PC是过切点的弦,所以又可得$\angle MPC=\angle PDC$.但由C、D、B成一直线,可知$\angle PDC$成了$\triangle PBD$的一个外角,所以就有$\angle BPD=\angle PDC-\angle PBA$.而根据角的差的定义,又有$\angle APC=\angle MPC-\angle MPA$,所以$\angle APC=\angle BPD$就可以证明.

例 61　已知:$\odot O$、$\odot O'$外切于P,割线AD交两圆于A、B、C、D.求证:$\angle APD+\angle BPC=180°$.

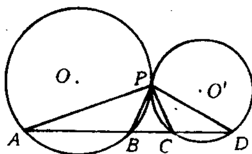


图 4 · 166

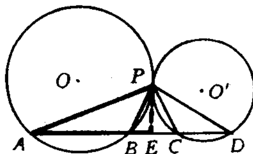


图 4 · 167

分析:由条件$\odot O$、$\odot O'$外切于P,是一个两圆相切的问题,所以可添加过切点的公切线,将问题转化为每一个圆中的弦切角的基本图形问题来讨论,于是过P作两圆的公切线PE交AD于E.

由 EP 与⊙O 相切于 P，PB 是过切点的弦，可得$\angle BPE=\angle A$，而由 EP 与⊙O' 相切于 P，PC 是过切点的弦，又可得$\angle EPC=\angle D$. 这样就有$\angle BPC=\angle BPE+\angle EPC=\angle A+\angle D$，从而问题就转化成为要证明$\angle APD+\angle A+\angle D=180°$. 显然，由这三个角是$\triangle APD$ 的三个内角，就可以证明上述结论.

例 62 已知：⊙O 与⊙O_1、⊙O_2 分别外切于 A、B，O_1O_2 交两圆于 C、D. 求证：A、C、D、B 四点共圆.

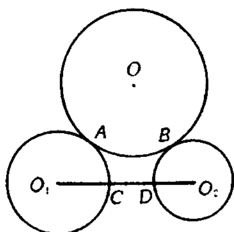


图 4・168

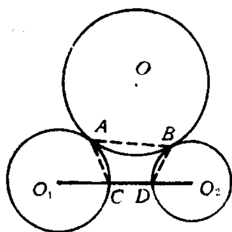


图 4・169

分析：本题要证的结论是 A、C、D、B 四点共圆，这是一个圆内接四边形的判定问题，所以可应用圆周角的基本图形或者也就是圆内接四边形的性质进行证明. 由于图形中的圆内接四边形尚未出现，所以应先连结 AB、AC、BD，由于条件中还出现 O_1、C、D 成一直线，所以问题也就成为要证明$\angle ACO_1=\angle ABD$.

又因为条件中出现了⊙O、⊙O_2 外切于 B，是一个两圆相切的问题，所以可添加过切点的公切线，将问题转化成每一个圆中的弦切角的基本图形问题来分析，于是过 B 作⊙O、⊙O_2 的内公切线 MN，这样就出现了$\angle ABM$ 和$\angle DBM$ 都是弦切角，且要证的性质中出现的$\angle ABD$ 就是这两个角的和.

另一方面由⊙O、⊙O_2 外切于 B，可得 O、B、O_2 共线，从而可根据共线点的定义连结 OO_2 后，有 OO_2 必定过 B. 根据同样的道理，由⊙O、⊙O_1 外切于 A，可得连结 OO_1 后，OO_1 必定过 A. 这样

应用弦切角的性质就可得$\angle ABM=\frac{1}{2}\angle O$，$\angle DBM=\frac{1}{2}\angle O_2$，于是就有$\angle ABD=\angle ABM+\angle DBM=\frac{1}{2}(\angle O+\angle O_2)$，那末问题就成为要证$\angle ACO_1$也等于$\frac{1}{2}(\angle O+\angle O_2)$. 但在$\odot O_1$中，$O_1C$和$O_1A$是同圆的两条半径，它们就可以组成一个等腰三角形，$\angle ACO_1$也就成为这个等腰三角形的一个底角，于是就有$\angle ACO_1=(180°-\angle O_1)\div 2$，问题也就转化为要证$\angle O+\angle O_2=180°-\angle O_1$，亦即$\angle O+\angle O_2+\angle O_1=180°$，显然在$\triangle OO_1O_2$中这个性质是成立的，所以分析就可以完成.

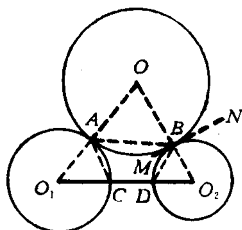


图 4・170

例 63 已知：$\odot O$与$\odot O'$外切于C，OO'的延长线交$\odot O$、$\odot O'$于A、B，过C作$CD\perp AB$交以AB为直径的半圆于D，AD、BD分别交$\odot O$、$\odot O'$于E、F. 求证：EF是$\odot O$、$\odot O'$的外公切线.

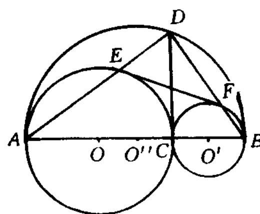


图 4・171

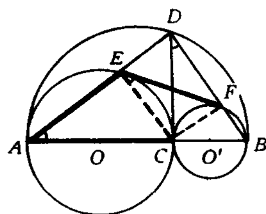


图 4・172

分析：本题要证明EF是$\odot O$、$\odot O'$的外公切线，所以可根据两圆的外公切线的定义，证明EF分别与两个圆相切.

由条件AC、BC分别是$\odot O$、$\odot O'$的直径，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质来进行证明. 现在图形中是有直径，有半圆上的点E、F，而没有圆周角，所以应将圆周角添上，于是连结

CE、CF，可得$\angle AEC=\angle CFB=90°$.

现在的问题是要证 FE 与$\odot O$ 相切于 E，所以就可应用弦切角的基本图形的性质进行证明，由于 EC 应是过切点的弦，所以问题就成为要证明$\angle FEC=\angle A$.

而由我们已得的$\angle CEA=\angle CFB=90°$，以及 A、E、D 和 B、F、D 都成一直线，又可得$\angle CED=\angle CFD=90°$，$D$、$E$、$C$、$F$ 四点共圆，所以$\angle FEC=\angle FDC$，于是问题就转化为要证$\angle FDC=\angle A$.

再由条件 AB 是半圆的直径，D 是半圆上的一点，所以$\angle ADB=90°$，而条件中还给出 $CD\perp AB$，这样 CD 就成为直角$\triangle ABD$ 的斜边上的高，于是应用直角三角形斜边上高的基本图形的性质可得$\angle BDC=\angle A$. 根据同样的道理，也可以证明 FE 与$\odot O'$ 相切于 F，分析即可完成.

本题要证明 FE 与$\odot O$ 相切于 E，所以也可以直接根据切线的判定定理，连结 OE 后，应证$\angle FEO=90°$，而已知 A、E、D 成一直线，从而也就是要证$\angle AEO+\angle DEF=90°$.

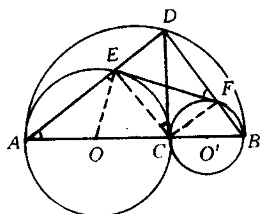


图 4・173

由条件 AB 是半圆的直径，D 是半圆上的一点，所以有$\angle ADB=90°$，那末在$\triangle FED$ 中，就有$\angle DFE+\angle DEF=90°$，问题也就转化成要证$\angle AEO=\angle DFE$.

由条件 OE 和 OA 都是$\odot O$ 的半径，它们可组成等腰三角形，从而就可由 $OA=OE$，推得$\angle AEO=\angle A$.

又因为条件中给出 $CD\perp AB$，且由 AC 是$\odot O$ 的直径，E 是半圆上的一点，所以连结 CE 后，可得$\angle AEC=90°$，从而又出现了 CE 是直角$\triangle ADC$ 的斜边上的高，那末又可以应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，得$\angle A=\angle DCE$.

再由 BC 是$\odot O'$的直径，F 是半圆上的一点，所以连结 CF 后，有$\angle BFC=90°$，那末由 A、E、D 和 B、F、D 都成一直线，可得$\angle CED=\angle CFD=90°$，$C$、$F$、$D$、$E$ 四点共圆，$\angle DCE=\angle DFE$. 所以$\angle AEO=\angle DFE$ 就可以证明.

例 64 已知：$\odot O$、$\odot O'$外切于 P，AD 是$\odot O$、$\odot O'$的外公切线，切点是 A、D，AB 是直径，BC 与$\odot O'$相切于 C. 求证：$BC=BA$.

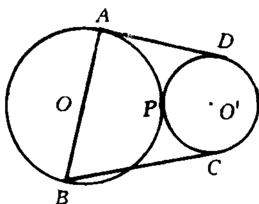


图 4・174

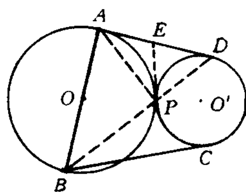


图 4・175

分析：由于$\odot O$、$\odot O'$外切于 P，所以可添加过切点的公切线，把问题转化成为一个圆中的弦切角的基本图形问题来分析. 于是过 P 作$\odot O$、$\odot O'$的内公切线交 AD 于 E. 这样，在$\odot O$中就出现 EA、EP 都与$\odot O$相切，切点分别是 A、P，所以 $EP=EA$，同时它们也是两条具有公共端点的相等线段，就可组成一个等腰三角形，但这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，故连结 PA，可得$\angle EAP$ 和$\angle EPA$ 这两个弦切角相等. 根据同样的道理，在$\odot O'$中连结 PD 后，也可得 $EP=ED$，$\angle EDP=\angle EPD$. 由于这四个角之和等于 180°，所以$\angle APD=\angle APE+\angle DPE=90°$.

由条件 AB 是$\odot O$的直径，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明，现在图形中是有直径，有半圆上的点 P，而没有圆周角，故连结 BP，就可得$\angle APB=90°$，于是$\angle APD+\angle APB=180°$，$B$、$P$、$D$ 成一直线. 又因为 DA 与$\odot O$相切于 A，而 AB 是$\odot O$的直径，所以$\angle DAB=90°$. 这样 AP 就成为直角

$\triangle ABD$ 的斜边上的高，于是就可应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质进行证明. 由于结论中出现的线段是 BA，所以应用射影定理时，可选取 $BA^2 = BP \cdot BD$，从而问题转化为要证明 BC^2 也等于 $BP \cdot BD$. 但现在 BC 与⊙O' 相切于 C，BPD 是割线，所以应用切割线定理就可以证明上述性质.

例 65 已知：⊙O、⊙O' 外切于 A，外公切线 BC 与⊙O、⊙O' 相切于 B、C. 求证：以 BC 为直径的圆与 OO' 相切.

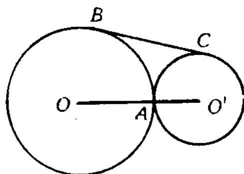


图 4・176

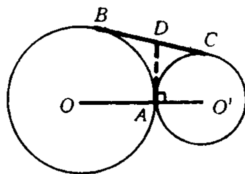


图 4・177

分析：由于⊙O 与⊙O' 外切于 A，是一个两圆相切的问题，所以可通过添加过切点的公切线，将问题转化成每一个圆中的切线问题来解决. 于是过 A 作⊙O、⊙O' 的内公切线交 BC 于 D，那末由 DB、DA 分别与⊙O 相切于 B、A，应用切线长定理即可得 $DB = DA$，根据同样的道理还可得 $DA = DC$. 这样 D 就成为 BC 的中点，所以以 BC 为直径所作的圆必定过点 A. 这样问题就只要证这个圆与 OO' 相切于 A. 但 DA 是这个圆的半径，且 $OO' \perp DA$，所以 OO' 必定与这个以 BC 为直径的圆相切于点 A.

例 66 已知：⊙O、⊙O' 外切于 A，外公切线 BC 与⊙O、⊙O' 相切于 B、C. 求证：以 OO' 为直径的圆与 BC 相切.

分析：以 OO' 为直径的圆也就是以 OO' 的中点为圆心、以 $\frac{1}{2}OO'$ 的长为半径所作的圆. 于是取 OO' 的中点 D，然后应证以 D 为圆心、以 DO 长为半径所作的圆必定和 BC 相切，也就是证 D 到 BC 的距离就等于 DO. 于是过 D 作 $DE \perp BC$，垂足是 E，问题就应

证 $DE=DO=DO'$.

又因为 BC 是两圆的外公切线，所以 BC 也可以看作是每一个圆的切线，于是又可应用弦切角的基本图形的性质进行证明，从而连结 OB 和 $O'C$，就可得 $\angle OBC=\angle O'CB=90°$，$OB /\!/ DE /\!/ O'C$，于是 E 就是 BC 的中点，DE 就是梯形 $OO'CB$ 的一条中位线. 而应用梯形中位线的性质可得 $DE=\dfrac{OB+O'C}{2}=\dfrac{R+r}{2}$，而 $DO=DO'=\dfrac{OO'}{2}=\dfrac{R+r}{2}$，所以就有 $DO=DO'=DE$，从而就可完成分析.

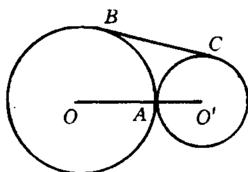


图 4・178

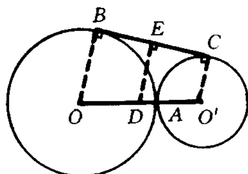


图 4・179

例 67 已知：$\odot O$、$\odot O'$ 外切于 P，外公切线 AB、CD 分别与两圆相切于 A、B、C、D. 求证：四边形 $ACDB$ 可以外切于一个圆.

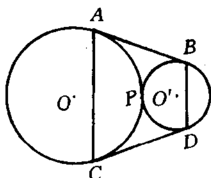


图 4・180

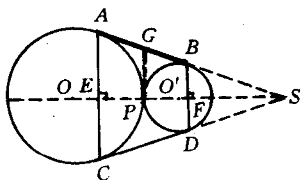


图 4・181

分析：要证明四边形 $ACDB$ 可以外切于一个圆，首先应确定这个内切圆的圆心和半径.

由于 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 外切于 P，AB、CD 是两圆的外公切线，所以这是一个轴对称图形，且连心线就是它的对称轴. 于是这个内切圆的圆心必在连心线 OO' 上，而四边形 $ACDB$ 也应是一个等腰梯形. 从而就应先证明这个四边形是等腰梯形.

由于 AB、CD 对每一个圆来讲都是切线，所以可应用切线的性质，或者也就是可直接应用切线长定理及其推论来进行证明. 于是延长 AB、CD 相交于 S 后，就有 $SB=SD$，$SA=SC$，从而就可得 $AB=CD$. 再进一步，连结 SO 和 SO' 后，又可得 SO、SO' 都是 $\angle ASC$ 也就是 $\angle BSD$ 的角平分线，所以 SO、SO' 必定重合在一直线上. 又因为 $\odot O$、$\odot O'$ 外切于 P，所以 O、P、O'、S 成一直线. 如设 OS 与 AC、BD 分别相交于 E、F，那末应用等腰三角形中重要线段这个基本图形的性质就可得 $BD\perp SO$，$AC\perp SO$，所以 $AC\parallel BD$. 这样四边形 $ACDB$ 就是一个等腰梯形.

又因 $\odot O$、$\odot O'$ 外切于 P，是一个两圆相切的问题，所以可通过添加过切点的公切线，把问题转化成每一个圆中的切线的问题来分析. 于是过 P 作 $\odot O$、$\odot O'$ 的内公切线交 AB 于 G，则有 $GP\perp OO'$. 而由 GA、GP 分别与 $\odot O$ 相切于 A、P，GB、GP 分别与 $\odot O'$ 相切于 B、P，又可得 $GA=GP=GB$，即 G 是 AB 的中点. 而由 $GP\perp OO'$，又可推得 $AE\parallel GP\parallel BF$，从而应用梯形的中位线的性质可得 $EP=FP$，即 P 是 EF 的中点. 这就说明 P 应是这个等腰梯形 $ACDB$ 的内切圆的圆心. 于是问题就成为要证明以 P 为圆心，以 PE 长为半径所作的圆必定和这个等腰梯形的四边相切. 由于 $PE=PF$ 以及 $AC\perp EF$、$BD\perp EF$，所以这个圆必定与 AC、BD 分别在 E 点和 F 点相切，那末问题就成为应证这个圆必定与两条腰相切，也就是要证 P 到 AB、CD 的距离也等于 PE，从而过 P 作 $PH\perp AB$ 交 AB 于 H，问题就成为要证 $PH=PE$. 由于 $\angle PHA=\angle PEA=90°$，所以要证明相等的这两条线段 PH 和 PE 就成为 P 到 $\angle CAB$ 的两边的距离，这样点 P 就应在 $\angle CAB$ 的角平分线上，或者也就是 PH、PE 这两条要证明相等的线段是

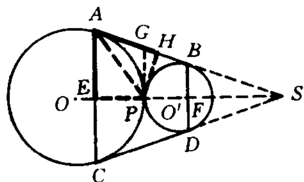


图 4・182

关于$\angle CAB$的角平分线成轴对称的，从而就可以通过添加一对轴对称型的全等三角形的方法进行证明.由于现在图形中没有对称轴，所以应先将对称轴添上，也就是连结PA，问题就成为应证$\triangle PAE\cong\triangle PAH$.因$PA=PA$，$\angle PEA=\angle PHA=90°$，且因由$\angle GAP=\angle GPA$，$\angle GPA=\angle EAP$，可推得$\angle PAE=\angle PAH$，所以这两个三角形全等，于是就可证明这个圆与$AB$相切于$H$，根据同样的道理可以证明这个圆也一定和$CD$相切，从而完成分析.

例 68 已知：$\odot O$、$\odot O'$外切于P，$\odot O$的弦AB的延长线与$\odot O'$相切于C，AP的延长线交$\odot O'$于D.求证：$\angle BPC=\angle CPD$.

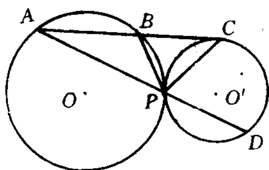


图 4・183

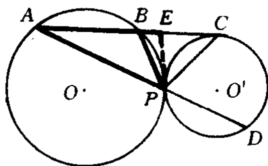


图 4・184

分析：由于$\odot O$、$\odot O'$外切于P，是一个两圆相切的问题，所以可通过添加过切点的公切线，把问题转化成为一个圆中的弦切角的基本图形问题来进行讨论，于是过P作$\odot O$、$\odot O'$的内公切线交BC于E.这样由PE与$\odot O$相切于P，PB是过切点的弦，可得$\angle EPB=\angle PAB$.又因为EP、EC分别和$\odot O'$相切于P、C，所以$\angle EPC=\angle ECP$，而$\angle BPC=\angle BPE+\angle CPE$，从而应证$\angle CPD$也等于$\angle BPE+\angle CPE$.因条件中还给出$A$、$P$、$D$成一直线，$\angle CPD$是$\triangle APC$的一个外角，所以就有$\angle CPD=\angle A+\angle ECP$，故由$\angle A=\angle EPB$和$\angle ECP=\angle CPE$就可以证明结论.

第五章　全等三角形

第一节　轴对称型

【分析方法导引】

在几何问题中，对于线段相等或角相等的问题，如果不是直接与某一基本图形的应用条件相联系时，则应先分析或观察相等的线段或角所具有的位置特征或位置关系.

如两条相等的线段或两个相等的角出现在一个等腰三角形的轴对称部分，或者也可以是出现在等腰梯形等轴对称图形的对称部分时，就可以想到要应用轴对称型全等三角形的基本图形进行分析。接下来就可以根据图形的轴对称部分找到相应的全等三角形，当完成分析的思路尚不完全清晰时，可将图形中出现的各对全等三角形全部列出，再从中筛选出与条件或结论有联系的一对或若干对全等三角形，然后再应用全等三角形的性质来完成分析.

如果几何问题中出现了两条相等的线段或两个相等的角是关于某一直线或线段成轴对称时，具体地说也就是两条相等的线段在某一直线的两侧，且在直线上同一点与直线成等角时，就可以想到要应用轴对称型全等三角形进行证明。接下来就应看图形中的对称轴有否出现，若对称轴尚未出现的，则首

先考虑将对称轴添上；若对称轴已经出现的，则再看对称轴两侧的对称图形是否完整，如某一部分尚不完整的，则应将其添出，也就是应将对称轴一侧的图形，主要是三角形，沿对称轴翻折过去。然后就可以找出图形中出现的所有的全等三角形，并根据与条件、结论的联系，并应用全等三角形的性质来完成分析.

例 1 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，BD、CE 分别是 $\angle B$、$\angle C$ 的角平分线. 求证：$BD=CE$.

分析：本题要证明相等的两条线段 BD、CE 是等腰三角形的两底角平分线，它们位于这个等腰三角形的轴对称部分，所以可应用轴对称型全等三角形进行证明.

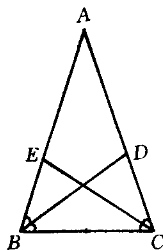


图 5·1

根据由图形的轴对称部分找全等三角形的方法，可以发现图形中出现的轴对称型全等三角形共有三对，而以要证明相等的线段 BD、CE 为边的全等三角形则是其中的两对，所以选用哪一对全等三角形进行证明就出现了两种可能性.

若将 BD、CE 看作是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 的一组对应边，那末在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，已经给出了 $AB=AC$，$\angle A=\angle A$ 是公共角，所以还要证明一个性质。由条件 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，应用等腰三角形的性质可得 $\angle ABC=\angle ACB$，而 BD、CE 是角平分线，所以 $\angle ABD=\angle ACE$，从而就可以证明这两个三角形全等.

若将 BD、CE 看作是 $\triangle BDC$ 和 $\triangle CEB$ 的一组对应边，那末在 $\triangle BDC$ 和 $\triangle CEB$ 中，由 $AB=AC$，可得 $\angle BCD=\angle CBE$，$BC=CB$ 是公共边，再由 BD、CE 是角平分线，又可得 $\angle CBD=\angle BCE$，所以这两个三角形全等也可以证明.

例 2 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D、E 分别是 AC、AB 上的点，且 $AD=AE$，BD、CE 相交于 F. 求证：$FC=FB$.

分析：本题要证明 $FC=FB$，而这两条要证明相等的线段位于等腰三角形的轴对称部分，所以可应用轴对称型全等三角形进行证明.

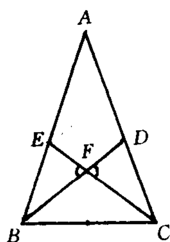


图 5・2

根据由图形的轴对称部分找全等三角形的方法，可以发现图形中出现的轴对称型全等三角形共有三对，而要证明相等的线段 FC 和 FB 可以看作是其中的一对，即$\triangle FCD$ 和$\triangle FBE$ 的对应边，所以问题就成为要证这两个三角形全等.

现在在$\triangle FCD$ 和$\triangle FBE$ 中，已经出现的条件是由 $AB=AC$ 和 $AD=AE$，得 $CD=BE$. 再由 BD、CE 相交于 F，又可得$\angle CFD=\angle BFE$，所以还要证明一个性质. 由于 $FC=FB$ 是要证的结论，不能用，而如果证第三条边相等，即证 $FD=FE$，则将出现两边和其中一边的对角对应相等的条件，也还不能证明这两个三角形全等，所以这一性质也不能用，这样第三个条件就只能是证一组对应角相等，即要证$\angle FCD=\angle FBE$ 或$\angle FDC=\angle FEB$.

若考虑证$\angle FCD=\angle FBE$，则由于这两个角既可以看作是$\triangle FCD$ 和$\triangle FBE$ 的一组对应角，也可以看作是$\triangle ACE$ 和$\triangle ABD$ 的一组对应角，而$\triangle FCD$ 和$\triangle FBE$ 全等是要证的结论，不能用，所以问题就转而应证$\triangle ACE$ 和$\triangle ABD$ 全等. 而在这两个三角形中，条件中已给出 $AC=AB$，$AE=AD$，且$\angle A=\angle A$ 是它们的公共角，所以这两个三角形全等可以证明，也就可得$\angle FCD=\angle FBE$.

若考虑证$\angle FDC=\angle FEB$，则由于 A、D、C 和 A、E、B 都成一直线，所以可转而证明$\angle ADB=\angle AEC$，而这两个角可以看作是$\triangle ABD$ 和$\triangle ACE$ 的一组对应角，所以通过证明这两个三角形全

等，也就可以完成分析.

如果在证$\angle FDC=\angle FEB$时，直接考虑这两个角既可以看作是$\triangle FCD$和$\triangle FBE$的一组对应角，也可以看作是$\triangle BDC$和$\triangle CEB$的一组对应角，所以问题就成为要证$\triangle BDC\cong\triangle CEB$. 而在这两个三角形中，由$AB=AC$，可得$\angle BCD=\angle CBE$，$BC=CB$是公共边，且$CD=BE$，所以这两个三角形全等也就可以证明.

在考虑证明$FC=FB$时，由于它们是两条具有公共端点F的相等线段，所以它们可组成一个等腰三角形，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题，于是问题就转化成要证$FC=FB$的等价性质$\angle FBC=\angle FCB$. 而这两个角也可以看作是$\triangle DBC$和$\triangle ECB$的一组对应角，所以问题可成为要证$\triangle DBC\cong\triangle ECB$. 而由$CD=BE$，$\angle DCB=\angle EBC$，$BC=CB$就可以证明上述结论.

例 3 已知：$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D、E是BC上的两点，$AD=AE$. 求证：$BD=CE$.

分析：在本题要证的结论$BD=CE$中，我们可以发现这两条相等线段是位于等腰三角形的轴对称部分，所以可应用轴对称型全等三角形进行证明. 现在图形中在轴对称的位置上出现的全等三角形有两对，即$\triangle ABD$和$\triangle ACE$，$\triangle ABE$和$\triangle ACD$. 所以应用哪一对全等三角形进行证明就出现了两种可能.

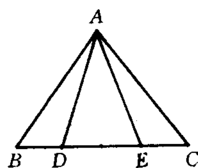


图 5・3

由于要证明相等的线段BD、CE可以看作是$\triangle ABD$和$\triangle ACE$的一组对应边，所以可首先考虑证$\triangle ABD$和$\triangle ACE$全等，由条件$AB=AC$、$AD=AE$，且由于这是出现在等腰三角形中的轴对称型全等三角形，所以可应用等腰三角形的性质进行证明，那末由$AB=AC$，可得$\angle B=\angle C$，但这时出现的是两边和其中一边的对角对应相等，仍然不能证明这两个三角形全等. 所以还要另外证明一个性质，由条件$AD=AE$，应用等腰三角形的性质可得

$\angle ADE=\angle AED$，而由 B、D、E 和 D、E、C 成一直线，就可证明 $\angle ADB=\angle AEC$，这样就可证明$\triangle ABD\cong\triangle ACE$.

如果应用$\triangle ABE$ 和$\triangle ACD$ 这一对全等三角形进行证明，那末可由 $AB=AC$，$AD=AE$，应用等腰三角形的性质可得$\angle B=\angle C$，$\angle AEB=\angle ADC$，从而就可证明$\triangle ABE\cong\triangle ACD$，$BE=CD$，然后在这两条相等线段中，将它们的公共部分 DE 减去，即可证得 $BD=CE$.

由于本题要证明相等的线段 BD 和 CE 是位于一个等腰三角形的轴对称部分，所以可添加轴对称型的全等三角形进行证明. 由于图形中现在没有对称轴，于是可先将对称轴添上，也就是过 A 作 $AF\perp BC$，垂足是 F，那末由 $AD=AE$，$AF=AF$ 和 $\angle AFD=\angle AFE=90°$，就可证明$\triangle ADF\cong\triangle AEF$，$DF=EF$. 根据同样的道理，还可以证明$\triangle ABF\cong\triangle ACF$，$BF=CF$，所以 $BD=CE$ 也就可以证明.

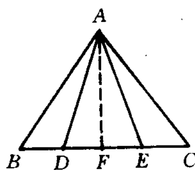


图 5・4

例 4　已知：四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AC=BD$. 求证：$AB=DC$.

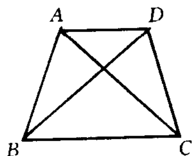


图 5・5

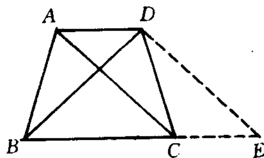


图 5・6

分析：本题要证 $AB=DC$，实质上就是要证四边形 $ABCD$ 是等腰梯形. 这样要证明相等的这两条线段 AB 和 DC 就位于这个等腰梯形的轴对称部分，从而就可应用轴对称型全等三角形进行证明. 根据由图形中的轴对称部分找全等三角形的方法，我们可以

发现以 AB 和 DC 为对应边的全等三角形有两对，即$\triangle ABC$ 和$\triangle DCB$，$\triangle ABD$ 和$\triangle DCA$.

若考虑证明$\triangle ABC$ 和$\triangle DCB$ 全等，则已经有的条件是 $AC=DB$，$BC=CB$，所以还应证明它们的夹角相等，即要证$\angle ACB=\angle DBC$. 由于条件中给出 $AD\parallel BC$，所以 $AC=DB$ 是关于梯形对角线的性质，所以可将对角线平移到具有公共的端点，也就是过 D 作 $DE\parallel AC$ 交 BC 的延长线于 E，即可得四边形 $ACED$ 是平行四边形，从而就有 $AC=DE$，也就可得 $DB=DE$. 而这是两条具有公共端点 D 的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，从而应用等腰三角形的性质，就可得$\angle DBC=\angle E$. 而由 $AC\parallel DE$，这一组平行线可以看作是被 BE 所截，又可得$\angle E=\angle ACB$，所以$\angle ACB=\angle DBC$ 就可以证明.

若考虑证明$\triangle ABD$ 和$\triangle DCA$ 全等，那也可以用类似的方法完成分析。

例 5 已知：$AD=AC$，$\angle ACB=\angle ADB$. 求证：$\angle ABC=\angle ABD$.

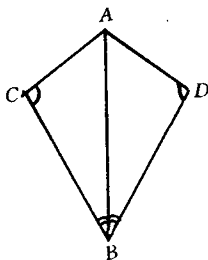


图 5・7

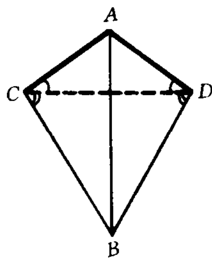


图 5・8

分析：由本题的条件 $AC=AD$ 和$\angle ACB=ADB$ 可知，若结论$\angle ABC=\angle ABD$ 成立，则$\triangle ABC$ 和$\triangle ABD$ 必定是一对轴对称型的全等三角形.

在$\triangle ABC$和$\triangle ABD$中，虽然还出现了$AB=AB$是公共边的条件，但构成的是两边和其中一边的对角对应相等，还不能证明这两个三角形全等，所以必须另证一个条件.

由于AC和AD是两条具有公共端点的相等线段，所以它们可组成一个等腰三角形，而这个等腰三角形现在只有腰而没有底边，所以应将底边添上，也就是连结CD，这样应用等腰三角形的性质就可得$\angle ACD=\angle ADC$，而已知$\angle ACB=\angle ADB$，从而就可推得$\angle BCD=\angle BDC$，$BC=BD$，这样也就可以完成分析.

例6 已知：$\triangle ABC$中$AB=AC$，D是BC的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足是E、F. 求证：$DE=DF$.

分析：本题要证明相等的两条线段DE和DF位于等腰三角形的轴对称部分，所以可应用轴对称型的全等三角形进行证明. 由图形的轴对称部分我们就可以找到$\triangle DBE$和$\triangle DCF$应是一对轴对称型全等三角形. 而在这两个三角形中，已经出现的条件有$DB=DC$，$\angle DEB=\angle DFC=90°$，同时由$AB=AC$，还可得$\angle B=\angle C$，所以这两个三角形全等就可以证明.

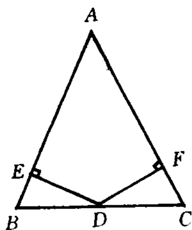


图5·9

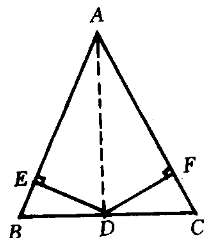


图5·10

本题的分析也可以从$AB=AC$和$BD=CD$开始，由于出现了等腰三角形底边的中点，所以可应用等腰三角形中的重要线段这个基本图形的性质进行证明. 于是连结AD，就可得DA是$\angle BAC$的角平分线，那末再由$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，应用角平分线

的性质就可证明 $DE=DF$. 显然,应用角平分线的性质,实质上也就是证明了一次轴对称型全等三角形,所以通过证 $\triangle ADE \cong \triangle ADF$,也可以完成分析.

例 7 已知:$\triangle ABC$ 中,$AB=2AC$,$\angle A=2\angle B$. 求证:$\angle C=90°$.

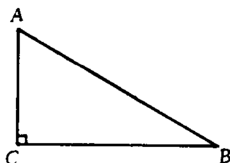


图 5・11

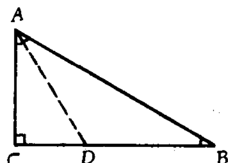


图 5・12

分析:本题的条件中给出了 $\angle A=2\angle B$,这是两个角之间的倍半关系,所以可根据角的倍半关系的定义开始进行分析.

若考虑先作出 $\angle A$ 的一半,则作 $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于 D,那末 $\angle CAD=\angle DAB=\angle B$,由于 $\angle DAB$ 和 $\angle B$ 是 $\triangle DAB$ 的内角,所以由这两个角相等,就可得 $DA=DB$.

再由条件 $AB=2AC$,那末根据线段的倍半关系的定义,取 AB 的中点 E 后,可得 $AE=\frac{1}{2}AB=AC$,但由于这样就出现了等腰 $\triangle DAB$ 的底边 AB 的中点 E,所以可应用等腰三角形中的重要线段这个基本图形的性质进行证明,于是连结 DE 后,可得 $DE\perp AB$,也就是 $\angle DEA=90°$. 由于现在出现的两条相等线段 AE 和 AC 是关于 AD 成轴对称的,从而就可应用轴对称型的全等三角形进行证明. 由于这时角平分线 AD 是对称轴,所以就可找到这对全等三角形应是 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ADE$,而根据 $AE=AC$,$\angle DAC=\angle DAE$,$AD=AD$,就可证明这两个三角形全等. 从而就可证得

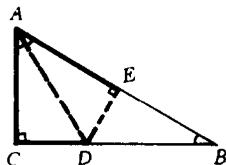


图 5・13

$\angle C=\angle DEA=90°$.

在由条件 $AB=2AC$,并根据线段倍半关系的定义进行分析时,也可以先作出 AC 的两倍,也就是延长 AC 到 E 使 $CE=AC$,那末就有 $AE=2AC=AB$,这样 AE 和 AB 这两条相等线段就是关于角平分线 AD 成轴对称的,所以可应用轴对称型全等三角形进行证明.而由 AD 是对称轴,就可以找到这对全等三角形应是$\triangle ABD$ 和$\triangle AED$,于是应先连结 DE.这样在$\triangle ABD$ 和$\triangle AED$ 中,就有 $AB=AE$,$\angle BAD=\angle EAD$,$AD=AD$,所以$\triangle ABD\cong\triangle AED$,也就可得 $DE=DB=DA$,$\triangle DAE$ 也是等腰三角形,而我们已经作出了 $EC=AC$,所以应用等腰三角形中的重要线段的基本图形的性质就可证得 $DC\perp AC$.

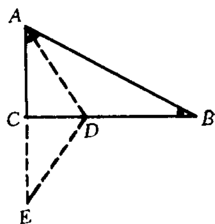


图 5·14

如果在根据两个角的倍半关系的定义进行分析时,考虑作出$\angle B$ 的两倍,由于这时$\angle B$ 有两条边,所以以哪条边作为两倍角的一边就出现了两种可能.

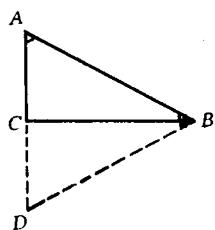


图 5·15

若考虑以 BC 为边,在$\angle B$ 的外侧作角.则作$\angle ABD=2\angle B$,或者也就是作$\angle CBD=\angle ABC$ 交 AC 的延长线于 D,即可得$\angle ABD=\angle A$,$DB=DA$.由于我们作出的 BC 是$\angle ABD$ 的角平分线,而要证的结论是 $AC\perp BC$,构成了角平分线和向角平分线所作垂线之间的组合关系,所以必定也得到一个等腰三角形的基本图形,所以问题就是要证 $BD=BA$,实质上也就是要证 BD、BA 和 DA 都相等.由条件 $AB=2AC$,所以问题就是要证 BD 也等于 $2AC$.由于这两个数量关系涉及夹$\angle ABD$ 的两边,所以想到要应用三角形的角平分线性质,

即有$\frac{BA}{BD}=\frac{AC}{DC}$，但$\frac{BA}{AC}=2$，所以$\frac{BD}{DC}=2$，即 $BD=2CD$，但我们已证 $BD=AD$，所以有 $AD=2CD$，$AC=DC$，从而就可证得 $BD=BA$，$AC\perp BC$.

若考虑以 BA 为边，在$\angle B$ 的外侧作角，则作$\angle CBD=2\angle CBA$交 CA 的延长线于 D，即可得$\angle BAC=2\angle ABC$

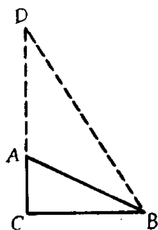


图 5・16

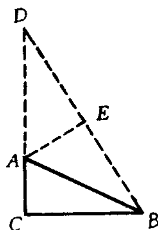


图 5・17

$=2\angle ABD$. 由 C、A、D 成一直线，可得$\angle BAC$ 就是$\triangle ABD$ 的一个外角，$\triangle ABD$ 就是一个等腰三角形，即 $AB=AD$，但已知 $AB=2AC$，所以有 $AD=2AC$，$\frac{AD}{AC}=2$. 而 BA 现在是$\angle CAD$ 的角平分线，所以又可应用三角形的角平分线的性质得$\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AC}$，$\frac{BD}{BC}=2$，$BD=2BC$. 这样又可以根据线段倍半关系的定义，取 BD 的中点 E 后，可得 $BE=BC$. 从而就出现了 BE 和 BC 这两条相等线段是关于角平分线 BA 成轴对称的，所以可添加一对轴对称型全等三角形进行证明，也就是连结 AE 后，由 $BE=BC$，$\angle ABE=\angle ABC$ 和 $AB=AB$，可得$\triangle ABC\cong\triangle ABE$，$\angle C=\angle AEB$，这样要证明$\angle C=90°$，就可以转而证$\angle AEB=90°$. 而在$\triangle ABD$ 中，$AB=AD$，$BE=DE$，所以上述性质可以证明，分析也就可以完成.

例 8　已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=100°$，CD 是角平分线. 求证：$BC=CD+AD$.

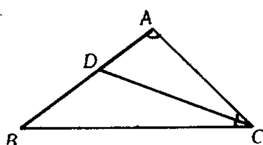


图 5・18

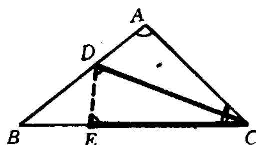


图 5・19

分析：本题要证的结论 $BC=CD+AD$，是一条线段等于两条线段的和，所以可根据线段和差关系的定义，在线段 CB 上截取 $CE=CD$，然后应证 $BE=AD$. 由于截得的线段 CE 和 CD 是两条具有公共端点的相等线段，所以它们可组成一个等腰三角形，现在这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，所以连结 DE，就可得 $\angle CDE=\angle CED$.

由条件 $AB=AC$，$\angle A=100°$，应用等腰三角形的性质可得 $\angle B=\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-100°)=40°$，而 CD 是角平分线，所以 $\angle BCD=\frac{1}{2}\cdot 40°=20°$，于是就有 $\angle CED=\frac{1}{2}(180°-20°)=80°$. 从而就得到 $\angle CED=2\angle B$，而由 B、E、C 成一直线，又有 $\angle CED$ 是 $\triangle EBD$ 的外角，由此就得 $\triangle EBD$ 是等腰三角形或 $BE=DE$，这样问题就成为应证 $DE=AD$.

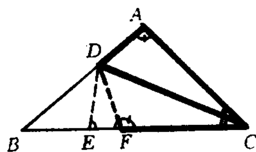


图 5・20

由于条件中给出 CD 是角平分线，所以 $\angle BCD$ 和 $\angle ACD$ 这两个相等的角就是关于 CD 成轴对称的，从而就可以添加轴对称型全等三角形进行证明. 由于图形中已经出现了对称轴 CD，所以添加的方法是将三角形沿对称轴翻折，若考虑将 $\triangle ACD$ 沿 CD 翻折过去，则由 $\angle BCD=\angle ACD$，可知 CA 必定落在 CB 上，所以具体的添加方法就是：在 CB 上截取 $CF=CA$，再连结 DF. 则由 $CF=CA$，$\angle FCD=\angle ACD$ 和 $CD=CD$，就

可得$\triangle FCD \cong \triangle ACD$，$DF=DA$. 这样问题就转化成要证$DE=DF$，而这又是两条具有公共端点$D$的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，问题也就成为等腰三角形的判定问题，所以问题又应转化成证$DE=DF$的等价性质$\angle DEF=\angle DFE$. 但我们已证$\angle DEF=80°$，从而又应证$\angle DFE$也等于$80°$，由于$\angle DFE$是$\angle DFC$的补角，而$\angle DFC=\angle A=100°$，所以分析可以完成.

本题在根据线段和差关系的定义来进行分析时，也可以考虑将CD和AD这两条线段接起来，也就是延长CD到E，使$DE=DA$，那末问题就成为要证$CE=CB$. 但这是两条具有公共端点C的相等线段，它们可组成一个等腰三角形，于是连结BE，然后应证$CE=CB$的等价性质$\angle E=\angle CBE$. 又因$AB=AC$，$\angle A=100°$，所以$\angle ABC=\angle ACB=40°$，而$CD$是角平分线，所以$\angle BCD=20°$，那末问题也就是要证$\angle E=80°$.

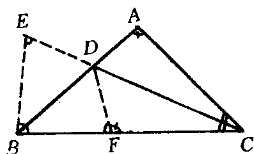


图 5・21

由于$\angle BCD$和$\angle ACD$这两个相等的角是关于CD成轴对称的，所以可添加轴对称型全等三角形进行证明，于是在CB上截取$CF=CA$，并连结DF，即可得$\triangle ACD \cong \triangle FCD$，$DA=DF$，$\angle DFC=\angle A=100°$. 而$B$、$F$、$C$成一直线，所以$\angle BFD=80°$，这样问题就是要证$\angle E=\angle BFD$，而这一性质也是等价于$\angle EBA=\angle FBA=40°$，所以$\triangle BDE$和$\triangle BDF$必定也是一对轴对称型全等三角形. 而在这两个三角形中，已经出现的条件是$DE=DA=DF$，$DB=DB$，所以还要证一个性质，由于上述已讨论的两组相等的角都是结论，不能用，所以只能证明第三个角，也就是这两条对应边的夹角相等，即要证$\angle BDE=\angle BDF$. 由条件AB、CE相交于D，可得$\angle BDE=\angle CDA$. 而在$\triangle ACD$中，$\angle CDA=180°-100°-20°=60°$. 而$\angle CDF=\angle CDA$，所以$\angle BDF=180°-2\times 60°=60°$，所以$\angle BDE=\angle BDF$可以证明，分析也就可以完成.

例 9　已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，AD 是角平分线. 求证：$AC=AB+BD$.

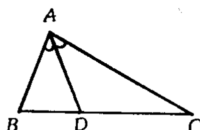


图 5・22

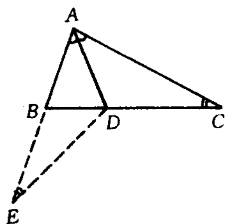


图 5・23

分析：本题要证明 $AC=AB+BD$，这是一条线段等于两条线段的和，所以可根据线段和差关系的定义来开始进行分析.

若根据线段和的定义，则可将 BD 接到 AB 上，也就是延长 AB 到 E，使 $BE=BD$，那末 AE 就等于 $AB+BD$，问题就成为要证 $AE=AC$.

但在作出了 $BE=BD$ 后，由于这是两条具有公共端点的相等线段，所以它们可组成一个等腰三角形，于是连结 ED，又因为 E、B、A 成一直线，出现了 $\angle ABD$ 是这个等腰三角形的顶角的外角，所以可得 $\angle ABD=2\angle E$，而已知 $\angle ABD=2\angle C$，从而就有 $\angle E=\angle C$. 而条件中已给出 $\angle EAD=\angle CAD$，且 $AD=AD$，所以 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$ 就是一对轴对称型的全等三角形，那末 $AE=AC$ 也就可以证明.

本题在根据线段和的定义进行分析时，也可考虑将 AB 接到 BD 上，也就是延长 DB 到 E，使 $EB=BA$，这样就有 $ED=AB+BD$，问题也就成为要证 $AC=ED$.

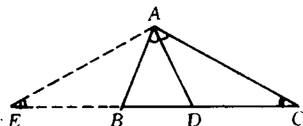


图 5・24

由于在作了 $EB=BA$ 以后，它们

也是两条具有公共端点的相等线段，所以也可以组成一个等腰三角形，于是连结 AE，又因为 E、B、C 成一直线，应用等腰三角形的基本图形的性质就有 $\angle ABC=2\angle E$，而已知 $\angle ABC=2\angle C$，所以 $\angle E=\angle C$. 而这两个角相等一出现，就得到 $\triangle AEC$ 也是等腰三角形，也就是 $AE=AC$，那末问题就成为要证 $ED=EA$. 这又是两条具有公共端点的相等线段，它们又可以组成一个等腰三角形，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题，这样就应证 $ED=EA$ 的等价性质 $\angle EAD=\angle EDA$. 而由 E、D、C 成一直线，可知 $\angle EDA$ 是 $\triangle ADC$ 的一个外角，所以有 $\angle EDA=\angle C+\angle CAD$，而 $\angle DAE$ 又等于 $\angle EAB+\angle BAD$，且已知 $\angle CAD=\angle BAD$，所以问题就成要证 $\angle BAE=\angle C$. 但因这两个角都和 $\angle E$ 相等，所以分析即可完成.

本题的分析也可以根据线段差的定义来开始进行，于是在 AC 上截取 $AE=AB$，那末问题就是要证 $EC=BD$. 而在作出了 $AE=AB$ 后，由 AD 是角平分线，就出现了 AE 和 AB 这两条相等的线段是关于 AD 成轴对称的，从而可添加轴对称型全等三角形进行证明. 于是连结 DE 后，由 $AE=AB$，$\angle EAD=\angle BAD$ 和 $AD=AD$，即可推得 $\triangle EAD\cong\triangle BAD$，$ED=BD$，那末问题也就成为要证 $ED=EC$. 但这是两条具有公共端点的相等线段，所以它们可组成一个等腰三角形，问题就成为一个等腰三角形的判定问题，而由 C、E、A 成一直线，所以问题就应证 $\angle AED=2\angle C$，而由 $\angle AED=\angle B$ 和已知 $\angle B=2\angle C$，就可以证明上述性质.

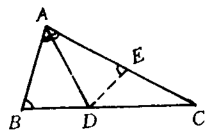


图 5・25

例 10 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle B=60°$，角平分线 AD、CE 相交于 F. 求证：$AC=AE+CD$.

分析：本题要证 $AC=AE+CD$，是一条线段等于两条线段的和，所以可根据线段和的定义，在 AC 上截取 $AG=AE$，然后证明

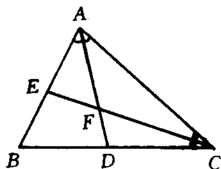


图 5・26

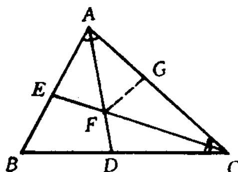


图 5・27

$CG=CD$.

由条件 AD 是角平分线，所以 AG 和 AE 这两条相等线段就是关于 AD 成轴对称的，从而就可添加轴对称型全等三角形进行证明，于是连结 FG，由 $AE=AG$，$\angle EAF=\angle GAF$ 和 $AF=AF$，即可证得$\triangle EAF\cong\triangle GAF$.

现在要证的结论是 $CG=CD$，而已知 CE 是角平分线，所以 CG、CD 这两条相等线段也是关于 CE 成轴对称的，从而也可应用轴对称型全等三角形进行证明，也就是应证$\triangle CGF\cong\triangle CDF$. 而在这两个三角形中，已经有的条件是$\angle GCF=\angle DCF$，$CF=CF$，所以还要证明一个性质. 由于 $CG=CD$ 是结论，不能用. 而 $GF=DF$，即使证明了相等，出现的也是两边和其中一边的对角对应相等，还不能证明这两个三角形全等，所以第三个条件只能是证明一组角对应相等. 于是就应证$\angle DFC=\angle GFC$，或$\angle FDC=\angle FGC$，实际上这两个性质是等价的，所以可证明其中的任意一个. 若证$\angle DFC=\angle GFC$，则由 AD、CE 相交于 F，可得$\angle DFC=\angle EFA$，也就等于$\angle GFA$，或者也就是这四个角都相等，但 E、F、C 成一直线，$\angle EFA+\angle GFA+\angle GFC=180°$，所以问题也就成为要证$\angle GFC$ 和$\angle DFC$ 都等于 $60°$.

由条件$\angle B=60°$，所以在$\triangle ABC$ 中就可得$\angle BAC+\angle BCA=180°-60°=120°$，而 AD、CE 是角平分线，就有$\angle FAC+\angle FCA=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle BCA)=\frac{1}{2}\cdot 120°=60°$，那末，在$\triangle FAC$ 中就有

$\angle AFC=180^\circ-(\angle FAC+\angle FCA)=180^\circ-60^\circ=120^\circ$. 而已知 C、F、E 成一直线，所以 $\angle EFA=180^\circ-\angle AFC=180^\circ-120^\circ=60^\circ$，而 $\angle GFA=\angle EFA=60^\circ$，从而就可得 $\angle GFC=180^\circ-(\angle EFA+\angle GFA)=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$，而 $\angle DFC$ 也等于 $\angle EFA$，所以就可得 $\angle GFC=\angle DFC$，从而就可完成分析.

例 11 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，CE 是中线，D 是 AB 上的一点，过 D、B 分别作 AC、EC 的平行线相交于 F. 求证：$CD=CF$.

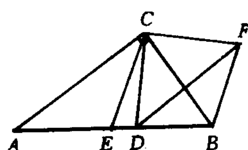


图 5・28

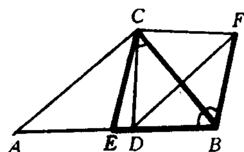


图 5・29

分析：本题的条件中出现了 $\angle ACB=90^\circ$，CE 是中线，所以就可以应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明. 于是就可得 $EC=EB=EA$，$\triangle EBC$ 是等腰三角形，$\angle ECB=\angle EBC$. 又因为 $BF\parallel EC$，这组平行线和等腰三角形的组合，就必然得到一条角平分线，也就是由 BF、EC 这组平行线被 BC 所截，所以 $\angle ECB=\angle FBC$，从而可推得 $\angle EBC=\angle FBC$.

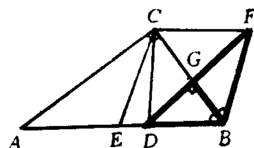


图 5・30

再由条件 $DF\parallel AC$，$\angle ACB=90^\circ$，又可得 $DF\perp BC$，而我们已经证明 $\angle DBC=\angle FBC$，这样就出现了 DF 是向角平分线 BC 所作的垂线，从而就可以应用轴对称型全等三角形进行证明，也就可得 $\triangle BDG\cong\triangle BFG$，$DG=FG$. 这样 BC 就成为 DF 的垂直平分线，所以 $CD=CF$ 就可以证明.

例 12 已知：$\triangle ABC$ 中，$BC=2AB$，D 是 BC 的中点，E 是

BD 的中点. 求证:$AC=2AE$.

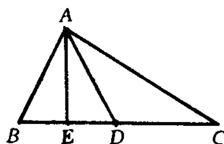


图 5·31

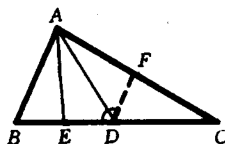


图 5·32

分析:本题要证明 $AC=2AE$,这是两条线段之间的倍半关系,所以可根据线段倍半关系的定义,将倍线段 AC 二等分,也就是取 AC 的中点 F 以后,应证 AC 的一半也就是 AF 和 AE 相等.

在作出了 F 是 AC 的中点后,由已知 D 是 BC 的中点,就出现了两个中点,是多个中点问题,就可以应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 D、F 所在的线段 BC、AC 有公共的端点 C,可以组成三角形,所以 DF 这两个中点的连线就是三角形的中位线. 而现在图形中是有三角形而没有中位线,所以应将中位线添上,也就是连结 DF,就可得 $DF \parallel BA$,$DF=\frac{1}{2}AB$. 另一方面,由条件 $BC=2AB$,且 D 是 BC 的中点,所以有 $BD=BA$,但 E 也是 BD 的中点,从而得 $DE=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AB$,所以 $DE=DF$.

这样,由我们要证的结论 $AE=AF$,就可以发现$\triangle ADE$ 和 $\triangle ADF$ 必定是一对轴对称型全等三角形. 由于在这两个三角形中已经出现了两条边对应相等的条件,而第三条边相等是结论,不能用,这样第三个条件只能是证明这两条边所夹的角相等,也就是应证$\angle ADE=\angle ADF$. 而由 $DF \parallel BA$,可得$\angle ADF=\angle BAD$,由 $BD=BA$,又可得$\angle BDA=\angle BAD$,所以上述性质可以证明.

本题在根据线段之间的倍半关系的定义进行分析时,也可以先作出半线段的两倍,也就是延长 AE 到 F,使 $FE=AE$,那末问题就应证 $AC=AF$.

而在作出了 $FE=AE$ 后，由于条件中还出现 $BE=DE$，且 AF、BD 相交于 E，就出现了两组相等线段都位于一组对顶角的两边，且成一直线，所以可添加一对中心对称型全等三角形进行证明. 添加的方法是将四个端点两两连结起来，于是连结 DF，则由 $FE=AE$，$\angle FED=\angle AEB$，$DE=BE$，就可得：$\triangle FED\cong\triangle AEB$，$AB=FD$，$\angle ABE=\angle FDE$. 这样由条件 $BC=2AB$，就可得 $BC=2FD$，而已知 $BD=CD$，所以 $FD=CD$.

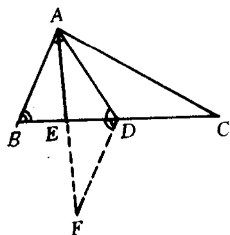


图 5・33

现在由我们要证的结论 $AF=AC$，就可以发现 $\triangle AFD$ 和 $\triangle ACD$ 是一对轴对称型全等三角形. 而在这两个三角形中，现在已经出现的条件是 $FD=CD$ 和 $AD=AD$，所以还要证明一个条件. 但第三条边相等的性质是结论，不能用，所以只能证这两边所夹的角相等，也就是要证 $\angle ADF=\angle ADC$. 由条件 B、D、C 成一直线，所以 $\angle ADC$ 是 $\triangle BAD$ 的外角，就有 $\angle ADC=\angle B+\angle BAD$，而 $\angle ADF=\angle FDE+\angle BDA$，且已经证明 $\angle B=\angle FDE$，所以问题就转化成要证 $\angle BAD=\angle BDA$，但我们已经有 $BD=BA$，所以这一性质可以证明.

例 13 已知：E 是正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的一点，$CE=CB$，过 E 作 $EF\perp AC$ 交 AB 于 F. 求证：$AE=EF=FB$.

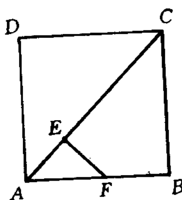


图 5・34

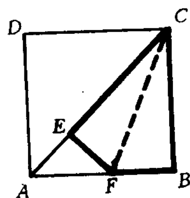


图 5・35

分析:由 AC 是正方形 $ABCD$ 的对角线,可得$\angle CAB=45°$,而已知$\angle AEF=90°$,就可得$\triangle AFE$ 也是等腰直角三角形,于是 $AE=EF$,从而只要证明 $EF=BF$. 由于 $FE\perp AC$,$FB\perp BC$,所以要证明相等的这两条线段 EF、BF 就成为 F 到$\angle ACB$ 的两边的距离,从而 F 点就应在$\angle ACB$ 的角平分线上,或者也就是 EF 和 BF 这两条相等线段是关于$\angle ACB$ 的角平分线成轴对称,从而就可以通过添加轴对称型全等三角形的方法进行证明. 由于已知图形中没有对称轴,所以可将对称轴添上,即连结 CF. 那末由 $CE=CB$、$CF=CF$ 和$\angle CEF=\angle CBF=90°$,就可证明$\triangle CFE$ 和$\triangle CFB$ 全等.

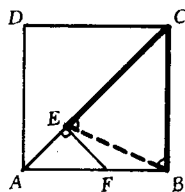


图 5・36

本题的分析在证明了 $AE=EF$ 后,接下来的分析也可从条件 $CE=CB$ 开始,由于这两条相等的线段具有公共的端点 C,所以它们可组成一个等腰三角形,而现在这个等腰三角形只有两条腰而没有底边,所以应先将底边添上,也就是连接 EB,即可得$\angle CEB=\angle CBE$,而已知$\angle CEF=\angle CBF=90°$,所以$\angle FEB=\angle FBE$,也就可以证明 $EF=BF$.

例 14 已知:正方形 $ABCD$ 中,以 C 为圆心、CB 为半径作$\overset{\frown}{BD}$,P 是$\overset{\frown}{BD}$上的一点,PC 交以 BC 为直径的半圆于 E,$PF\perp AB$ 垂足为 F. 求证:$PE=PF$.

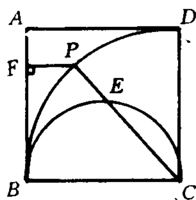


图 5・37

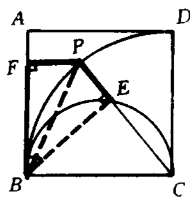


图 5・38

分析：由条件 BC 是半圆的直径，所以要应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明．由于已知图形中有直径，有半圆上的点 E，而没有圆周角，所以应将圆周角添出，即连结 BE，得$\angle BEC=90°$，而已知 C、E、P 成一直线，所以$\angle BEP=90°$．由条件$\angle BFP=90°$，这样要证明相等的这两条线段 PE 和 PF 就成为 P 到$\angle EBF$ 的两边的距离，P 点就应在$\angle EBF$ 的平分线上，也就是 PE 和 PF 这两条相等的线段是关于$\angle EBF$ 的平分线成轴对称的，从而就可以添加轴对称型的全等三角形进行证明．由于已知图形中没有对称轴，所以可先将对称轴添上，也就是连结 BP，然后就应证$\triangle BPE$ 和$\triangle BPF$ 全等．在这两个三角形中，现在已有 $BP=BP$ 和$\angle BEP=\angle BFP=90°$，所以还需要一个条件．

如考虑证$\angle PBE=\angle PBF$，则由$\angle ABC=90°$和 BC 分别是半圆、$\overset{\frown}{BD}$的直径和半径，可得 AB 是$\overset{\frown}{BD}$和半圆的切线．而 BP、BE 分别是过切点的弦，所以可应用弦切角的基本图形的性质进行证明，也就是可分别得到$\angle FBP=\frac{1}{2}\angle BCP$，$\angle FBE=\angle BCE$，从而就可以证得$\angle FBP=\angle EBP$．

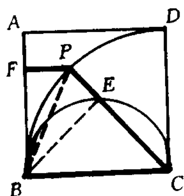


图 5・39

如考虑证$\angle BPF=\angle BPE$，则由 $PF\perp AB$，$CB\perp AB$，可得$\angle BPF=\angle CBP$，而由 $CP=CB$，又可得$\angle BPE=\angle CBP$，分析．

例 15 已知：等边$\triangle ABC$ 中，延长 BC 到 D，延长 BA 到 E，使 $AE=BD$．求证：$CE\doteq DE$．

分析：本题的条件中出现了 $AE=BD$，所以 $BE=AB+AE$，就等于 $AB+BD$．这是一条线段等于两条线段的和的问题，所以可根据线段和的定义，将 AB 和 BD 这两条线段接起来，也就是延长 BD 到 F，使 $DF=AB$，那就可得 $BF=BE$．而这是两条具有公共端点的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，于是连接

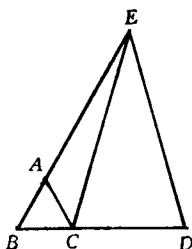


图 5・40

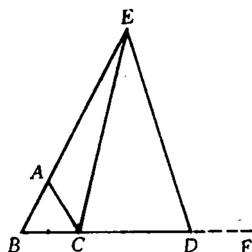


图 5・41

EF，再由$\angle B=60^\circ$，可知$\triangle BEF$不仅是一个等腰三角形，而且是一个等边三角形，也就是$BE=BF=EF$，$\angle F=\angle B=60^\circ$. 而我们要证明相等的这两条线段$CE$和$DE$就出现在这个等边三角形的轴对称部分，从而就可应用轴对称型全等三角形进行证明. 那末在$\angle EBC$和$\triangle EFD$中，由$EB=EF$，$\angle B=\angle F$和$BC=FD$，就可以在证明这两个三角形全等以后证得结论.

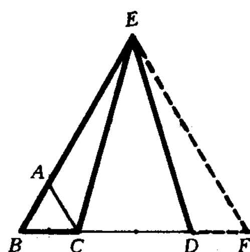


图 5・42

本题在根据线段和的定义来进行分析时，也可以将线段和的问题转化成线段差的问题来进行讨论. 于是由$BE=AB+BD$，转化为$BD=BE-AB$，从而在EB上截取$EF=AB$，就可得$BF=BD$，这又是两条具有公共端点的相等线段，它们可组成一个等腰三角形，于是连结DF，再由$\angle B=60^\circ$，就可得$\triangle BDF$是等边三角形，$BD=BF=DF$. 而我们现在要证明相等的这两条线段EC和ED可分别看作是$\triangle ECA$和$\triangle DEF$的边，而在这两个三角形中，我们有$AE=BD=FD$，$\angle CAE=\angle EFD=180^\circ-60^\circ=120^\circ$，$CA=AB=EF$，所以这

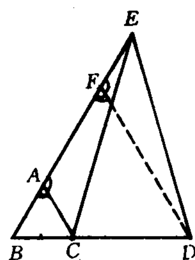


图 5・43

两个三角形全等可以证明，分析也就可以完成.

例 16 已知：D 是等边$\triangle ABC$ 内的一点，且 $AD=BD$，P 是$\triangle ABC$ 外的一点，且$\angle DBP=\angle DBC$，$BP=BA$. 求证：$\angle P=30°$.

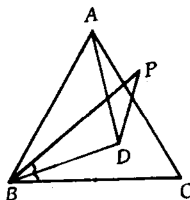


图 5・44

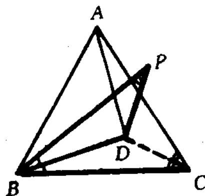


图 5・45

分析：由本题的条件 $BP=BA$ 和$\triangle ABC$ 是等边三角形，可得 $BA=BC$，$BP=BC$，又因为$\angle DBP=\angle DBC$，就出现了 BP 和 BC 这两条相等线段是关于 BD 成轴对称的，从而就可以添加轴对称型全等三角形进行证明. 根据 BP 和 BC 关于 BD 的轴对称性，就可以找到这对全等三角形应是$\triangle BPD$ 和$\triangle BCD$，于是连结 CD，而在这两个三角形中，已经有 $BP=BC$，$\angle DBP=\angle DBC$，$BD=BD$，所以这两个三角形全等，$\angle P=\angle BCD$，这样问题就可转化成要证$\angle BCD=30°$，但已知$\angle BCA=60°$，所以又应证$\angle BCD=\angle ACD$. 而这两个角相等一出现，就说明这两个相等的角是关于 CD 成轴对称，所以仍然可应用轴对称型全等三角形进行证明. 根据$\angle BCD$ 和$\angle ACD$ 关于 CD 的轴对称性，就可以找到这对全等三角形应是$\triangle BCD$ 和$\triangle ACD$，而在这两个三角形中，已出现的条件是 $BD=AD$，$BC=AC$，$CD=CD$，所以这两个三角形全等，分析就可以完成.

例 17 已知：E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AD、AB 上的两点，$\angle ECF=45°$，$CG\perp EF$，G 是垂足. 求证：$CG=CD$.

分析：本题要证明 $CG=CD$，而条件中又给出了$\angle CDE=$

$\angle CGE = 90°$和 $CE = CE$，所以 $\triangle CED$ 和 $\triangle CEG$ 应是一对轴对称型的全等三角形，但要证明这一对三角形全等，由于 $CG=CD$ 是结论不能用，所以还要再证明一个性质.

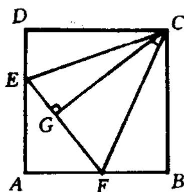


图 5·46

由条件$\angle ECF=45°$，且$\angle BCD=90°$，所以有$\angle BCF+\angle DCE=90°-45°=45°$，这是两个角的和的问题，因而可根据两个角的和的定义将这两个角拼起来，也就是以 C 为顶点、CD 为一边，在正方形 $ABCD$ 外作$\angle DCH=\angle BCF$，这样就有 $\angle ECH = 45°$，也就得 $\angle ECH = \angle ECF$，而这两个角相等一出现，也就是出现了这两个相等的角是关于 CE 成轴对称的，从而又可以应用一次轴对称型全等三角形进行证明. 根据$\triangle CED$ 和$\triangle CEG$ 也是一对轴对称型全等三角形可知 F 点的对称点 H 应在 ED 的延长线上，因此在作$\angle DCH$ 的边 CH 时就应交 ED 的延长线于 H. 这样就出现了$\triangle ECH$ 和$\triangle ECF$ 应是一对轴对称型全等三角形，而它们的一组对应角，即$\angle CEH$ 和$\angle CEF$ 也同时是$\triangle CED$ 和$\triangle CEG$ 的一组对应角，所以问题就成为要证$\triangle CEH \cong \triangle CEF$. 而在这两个三角形中，已经出现的条件是$\angle ECH=\angle ECF=45°$，$CE=CE$，所以还要再证明一个条件. 由于$\angle CEH = \angle CEF$ 是要证的结论，不能用；$\angle H = \angle EFC$ 与$\angle CEH=\angle CEF$ 是等价的性质，也不能用；而 $EH=EF$ 即使成立，但构成的是两边和其中一边的对角，不能用来证明这两个三角形全等，因而只能证明 $CH=CF$.

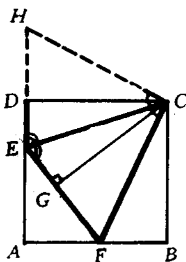


图 5·47

由于 CH 和 CF 是两条具有公共端点的相等线段，且它们又互相垂直，所以可组成一个等腰直角三角形，也就是半个正方形. 而已知四边形 $ABCD$ 也是正方形，从而又出现两个具有公共顶点

C 的正方形，所以就可出现一对旋转型的全等三角形，根据由公共顶点 C 发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法，可得 $\triangle CHD \cong \triangle CFB$，全等的条件是 $CD = CB$，$\angle CDH = \angle CBF = 90°$，$\angle DCH = \angle BCF = 90 - \angle DCF$. 所以 $CH = CF$. 这样进一步就可证明 $\triangle ECH \cong \triangle ECF$，$\angle CEH = \angle CEF$，那末 $\triangle CED \cong \triangle CEG$ 也就可以证明，分析也就可以完成.

例 18 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$AC = BC$，D、E 是 AB 上的两点，$\angle DCE = 45°$. 求证：$DE^2 = AD^2 + BE^2$.

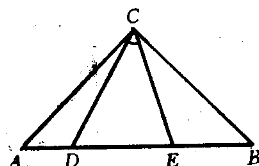


图 5・48

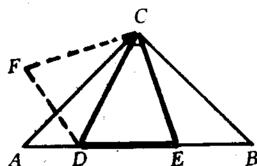


图 5・49

分析：本题条件中出现了 $\angle DCE = 45°$，且 $\angle ACB = 90°$，所以 $\angle DCA + \angle ECB = 90° - 45° = 45°$. 这是一个两个角之和的问题，所以可根据两角和的定义，将 $\angle DCA$ 和 $\angle ECB$ 这两个角拼起来，也就是以 C 为顶点，以 CA 为一边，在 $\triangle ABC$ 的外面，作 $\angle ACF = \angle ECB$，这样就可得 $\angle DCF = 45°$，$\angle DCF = \angle DCE$. 而这两个角相等的关系一出现，就出现了这两个相等的角是关于 CD 成轴对称的，从而就可以添加轴对称型全等三角形进行证明，于是在所作的 $\angle DCF$ 的边 CF 上，截取 $CF = CE$，并连结 DF，就可由 $CF = CE$，$\angle DCF = \angle DCE = 45°$ 和 $DC = DC$，证得 $\triangle DCF \cong \triangle DCE$，$DE = DF$.

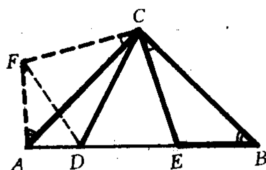


图 5・50

由我们所作的 $CF=CE$ 和 $\angle ECF=45^\circ+45^\circ=90^\circ$，可知 CF、CE 可组成一个等腰直角三角形，而已知 $\triangle ABC$ 也是等腰直角三角形，且这两个等腰直角三角形有公共的直角顶点 C，所以必定出现一对旋转型全等三角形. 找这对全等三角形的方法是将由公共顶点 C 发出的四条线段，即 CF、CA、CE、CB 两两组成全等三角形，于是连结 AF，那末在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中，由 $AC=BC$，$\angle ACF=\angle BCE$ 和 $CF=CE$，就可得 $\triangle ACF\cong\triangle BCE$，那末 $AF=BE$，$\angle CAF=\angle CBE=45^\circ$，进一步就可得 $\angle FAB=45^\circ+45^\circ=90^\circ$，而在 $Rt\triangle FDA$ 中，应用勾股定理就有 $DF^2=AD^2+AF^2$，而 $DF=DE$，$AF=BE$，所以分析可以完成.

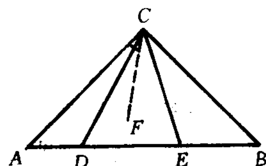


图 5·51

本题条件中出现了 $\angle DCE=45^\circ$，$\angle ACB=90^\circ$，所以就有 $\angle DCA+\angle ECB=45^\circ=\angle DCE$，那末根据角的和的定义，就可以在 $\angle DCE$ 内作 $\angle DCF=\angle DCA$，然后可得 $\angle ECF=\angle ECB$.

在作出了 $\angle DCF=\angle DCA$ 后，就出现了这两个相等的角是关于 DC 成轴对称的，从而就可添加轴对称型全等三角形进行证明.

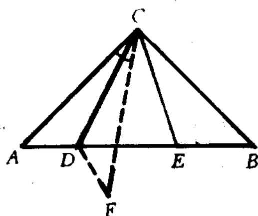


图 5·52

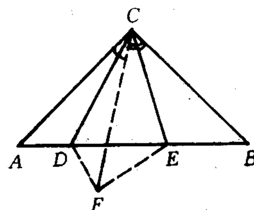


图 5·53

由于图形中已经出现了对称轴 CD，所以添加的方法就是将 $\triangle ACD$ 沿对称轴翻折过去，这时因 $\angle DCA=\angle DCF$，所以 CA 就

会沿 CF 落下，于是就可以在射线 CF 上截取 $CF=CA$，连结 DF 后，就可得 $\triangle ACD \cong \triangle FCD$，$\angle F=\angle A=45°$ 和 $DF=DA$. 根据同样的道理，由 $CF=CA=CB$，$\angle FCE=\angle BCE$ 和 $CE=CE$，又可证明 $\triangle FCE$ 和 $\triangle BCE$ 也是一对轴对称型全等三角形，所以 $FE=BE$，$\angle EFC=\angle B=45°$，进一步就可得 $\angle DFE=45°+45°=90°$，这样在直角 $\triangle DEF$ 中，就可应用勾股定理得 $DE^2=DF^2+EF^2$，从而也可完成分析.

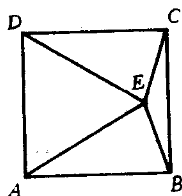


图 5・54

例 19 已知：E 是正方形 $ABCD$ 内的一点，$\angle EBC=\angle ECB=15°$. 求证：$\triangle AED$ 是等边三角形.

分析：本题要证 $\triangle AED$ 是等边三角形，也就是要证明 $AE=ED=AD$. 而已知四边形 $ABCD$ 是正方形，$AD=AB$，所以问题成为要证 $AE=AB$，而这是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题，于是问题就转化成为证明 $AE=AB$ 的等价性质 $\angle ABE=\angle AEB$. 而已知 $\angle EBC=15°$，$\angle ABC=90°$，所以 $\angle ABE=90°-15°=75°$，从而又只要证明 $\angle AEB=75°$.

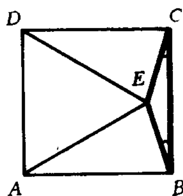


图 5・55

而由条件 $\angle EBC=\angle ECB=15°$，可得 $\triangle EBC$ 也是等腰三角形，且它的顶角 $\angle BEC=180-15°-15°=150°$，所以要证 $\angle AEB=75°$，就是要证明 $\angle AEB$ 等于 $\angle BEC$ 的一半，也就是要证 $\angle AEB=\frac{1}{2}\angle BEC$. 这样就出现了两个角之间的倍半关系，从而就可以根据角的倍半关系的定义，将倍角，即 $\angle BEC$ 两等分，也就

是作$\angle BEC$的平分线交BC于F，然后证明$\angle BEC$的一半，也就是$\angle BEF$和$\angle AEB$相等. 但由于$\triangle EBC$是等腰三角形，所以在作出了角平分线EF后，应用等腰三角形中的重要线段的基本图形的性质，就可得$EF\perp BC$，且$BF=CF$.

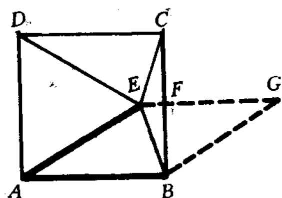


图 5・56

现在的问题是要证明$\angle AEB=\angle FEB$，而这两个角相等的关系一出现，就说明这两个相等的角是关于BE成轴对称的，所以可添加轴对称型全等三角形进行证明. 由于已知图形中已有对称轴BE，所以添加轴对称型的全等三角形的方法是将三角形沿对称轴翻折，于是就可将$\triangle ABE$沿对称轴BE翻折过去，由于$\angle AEB$应和$\angle FEB$相等，所以翻折后，AE应落在EF和EF的延长线上，而由$\angle ABE=75°$，可知BA应落在与BE交成$75°$角的射线上. 而已知$\angle EBF=15°$，所以在正方形外还应作一个$60°$的角，于是以BC为边、B为顶点作$\angle CBG=60°$交EF的延长线于G，从而只要证明$\triangle ABE$和$\triangle GBE$全等. 在这两个三角形中，已经出现的条件是$\angle ABE=\angle GBE=75°$，$BE=BE$，所以还需要一个条件. 因$\angle AEB=\angle BEF$是要证的结论，不能用；而$\angle BAE=\angle BGE$又是$\angle AEB=\angle BEF$的等价性质，也不能用；而$AE$和$GE$即使证明了相等，出现的也是两边和其中一边的对角对应相等，也不能证明这两个三角形全等，所以也不能用. 这样问题就只能证明$BG=BA$. 但BA是正方形的边长，所以问题就要证BG也等于正方形的边长. 但由所作的$\angle CBG=60°$和我们已得到的$\angle BFG=90°$，可知BG是$30°$角的直角三角形的斜边，所以有$BG=2BF$，而前面已证$BC=2BF$，所以$BG=BA$就可以证明. 在证明了$AE=AD$后，根据同样的道理也可证明$DE=DA$，所以分析可以完成.

本题要证$\triangle AED$是等边三角形，实质上就是要证$AE=AB$.

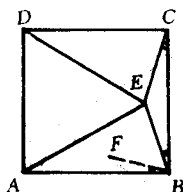


图 5・57

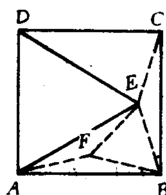


图 5・58

由条件$\angle BEC=15°$，$\angle ABC=90°$，所以$\angle ABE=75°$. 对于 15°和 75°这两个角来说，它们的和是 90°，而它们的差是另一个特殊角 60°，所以$\angle ABE$就等于$\angle EBC+60°$，这样根据角的和差关系的定义，就有在$\angle ABE$内以 B 为顶点，以 BA 为一边，作$\angle ABF=\angle CBE=15°$后，可得$\angle EBF=60°$. 但在作出了$\angle ABF=\angle CBE$后，由于$BA=BC$，所以就出现了这两个相等的角和这两条相等线段都是关于$\angle ABC$的角平分线，也就是正方形的对角线 BD 成轴对称的，所以就可以添加轴对称型全等三角形进行证明. 添加的方法就是将$\triangle EBC$沿对称轴 BD 翻折过去，于是在射线 BF 上截取 $BF=BE$，并连接 AF，就可由 $BA=BC$，$\angle ABF=\angle CBE=15°$和 $BF=BE$，推得$\triangle ABF\cong\triangle CBE$.

另一方面，由 $BF=BE$，这是两条具有公共端点 B 的相等线段，所以它们可组成一个等腰三角形，于是连结 EF，再由$\angle EBF=90°-15°-15°=60°$，可得$\triangle BEF$是一个等边三角形，$FE=FB$. 这样再由要证的结论 $AE=AB$，就可以发现$\triangle AFE$和$\triangle AFB$也是一对轴对称型全等三角形. 而在这两个三角形中，已经有 $AF=AF$，$FE=FB$，而第三条边相等是结论，不能用，所以证明这两个三角形全等的第三个条件只能是证这两条边的夹角相等，也就是要证$\angle AFE=\angle AFB$. 但$\angle AFB=\angle BEC=180°-2\times15°=150°$，所以问题就是要证$\angle AFE$也等于 150°，由于$\angle AFE=360°-\angle AFB-\angle BFE=360°-150°-60°=150°$，所以分析可以完成.

本题在根据$\angle ABE=\angle BEC+60°$的性质进行分析和添线时，也可以以 B 为顶点、以 BE 为一边，作$\angle EBF=\angle EBC=15°$，这样就出现了$\angle EBF$ 和$\angle EBC$ 这两个角是关于 BE 成轴对称的，所以可添加轴对称型全等三角形进行证明. 添加的方法就是将$\triangle EBC$ 沿对称轴 BE 翻折过去. 于是在射线 BF 上截取 $BF=BC$，并连结 EF，就可证明$\triangle BEF\cong\triangle BEC$，$EF=EC$，$\angle BEF=\angle BEC=180°-2\times15°=150°$. 这样，就出现了 EF 和 EC 是两条具有公共端点的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，于是连结 FC，$\triangle EFC$ 首先应是等腰三角形. 再由$\angle FEC=360°-\angle BEF-\angle BEC=360°-150°-150°=60°$，所以$\triangle EFC$ 也是一个等边三角形.

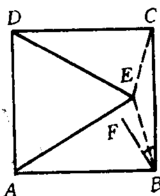


图 5・59

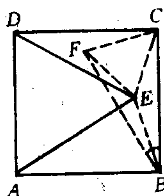


图 5・60

现在要证明的性质是 $AE=AB$，而 $AB=BC=BF$，且 $BE=CE=CF$，所以$\triangle ABE$ 和$\triangle BCF$ 也必定是一对绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形. 而在这两个三角形中，已经有 $AB=BC$，$BE=CF$，而第三条边相等，即 $AE=BF$ 是结论，不能用，所以第三个条件只能是证明这两边的夹角相等，也就是要证$\angle ABE=\angle BCF$，但$\angle ABE=90°-15°=75°$，而$\angle BCF=\angle BCE+\angle ECF=15°+60°$，也等于 75°，所以分析也就可以完成.

例 20 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，CD 是高，P 是 BC 上的任一点，$PE\perp AB$，$PF\perp AC$，垂足分别是 E、F. 求证：$PE+PF=CD$.

分析：本题要证明 $PE+PF=CD$，是一条线段等于两条线段的和，所以可根据线段和的定义，在 CD 上截取 $DG=PE$ 后，再证明留下的 $CG=PF$.

在作出了 $DG=PE$ 后，由条件 $CD\perp AB$，$PE\perp AB$，可得 DG

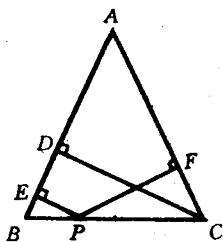


图 5・61

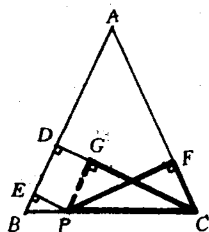


图 5・62

$//EP$，所以四边形 $DEPG$ 就应是平行四边形，于是连结 PG，再由 $\angle GDE=90°$，就可得四边形 $DEPG$ 是矩形，$\angle PGC=90°$. 这样要证明相等的这两条线段 CG 和 PF 就成为一对轴对称型的全等三角形，也就是 $\triangle PFC$ 和 $\triangle CGP$ 的对应边，于是问题就可证 $\triangle PFC \cong \triangle CGP$. 由于已经证明 $\angle PFC=\angle CGP=90°$，$PC=CP$ 是公共边，所以还要再证一个性质. 由 $AB=AC$，可得 $\angle ABC=\angle ACB$，而由 $PG//BA$，又可得 $\angle ABC=\angle GPC$，所以有 $\angle FCP=\angle GPC$，从而就可以完成分析.

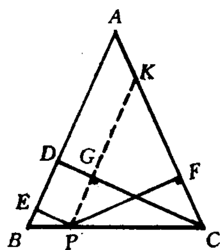


图 5・63

本题在作出了 PG，并得到了四边形 $DEPG$ 是矩形后，就出现了 $PG//BA$，是三角形内一条边的平行线段，所以可应用平行线型相似三角形进行证明，于是延长 PG 交 AC 于 K，则由 $AB=AC$，就可得 $KP=KC$，那末 CG 和 PF 就成为等腰三角形两腰上的高，所以结论可以证明.

本题在根据线段和的定义进行分析时，也可以考虑将 PE 和 PF 这两条线段接起来，也就是延长 EP 到 G，使 $PG=PF$，那末问题就是要证 $CD=GE$. 但由于 $CD\perp AB$，$PE\perp AB$，所以问题实际上就是应证四边形 $DEGC$ 是矩形，也就是应证 $\angle G=90°$. 而已知

$\angle PFC=90°$，这样就出现了这两个相等的角是关于 PC 成轴对称的，从而就可应用轴对称型全等三角形进行证明，问题也就成为应证$\triangle PCF\cong\triangle PCG$. 由所作的 $PF=PG$ 和 $PC=PC$ 是公共边，可知还应证明它们的夹角相等，也就是要证$\angle CPF=\angle CPG$. 由于 BC、EG 相交于 P，$\angle CPG=\angle BPE$，而由 $PE\perp AB$ 和 $PF\perp AC$，又可得$\angle CPF$ 和$\angle BPE$ 分别是$\angle ACB$ 和$\angle ABC$ 的余角，而$\angle ABC=\angle ACB$，所以上述性质就可以证明.

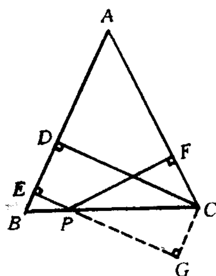


图 5・64

如果在将 PE 和 PF 这两条线段接起来时，考虑将 PF 接在 PE 的延长线上，那就可以延长 PE 到 G，使 $PG=CD$，问题就成为要证 $EG=PF$. 但在作出了 $PG=CD$ 后，由于 $PG\parallel CD$，所以四边形 $PCDG$ 就是平行四边形，也就可得 $DG=CP$. 这样就出现了要证明相等的两条线段 EG、PF 是 $Rt\triangle DGE$ 和 $Rt\triangle CPF$ 的直角边，而 DG 和 CP 是它们的斜边，所以问题可转化成证这两个三角形全等. 显然由 $DG=CP$，$\angle DEG=\angle CFP=90°$，以及由 $GD\parallel BC$，$\angle GDE=\angle B$ 和 $AB=AC$，$\angle B=\angle C$，$\angle GDE=\angle PCF$，就可以完成分析.

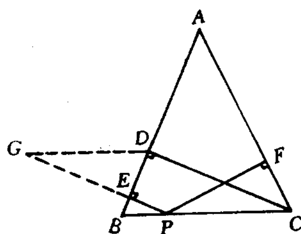


图 5・65

例 21 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，P 是 BC 的延长线上的一点，$PD\perp AB$、$PE\perp AC$，垂足分别是 D、E，CH 是 AB 上的高. 求证：$PD-PE=CH$.

分析：本题要证 $PD-PE=CH$，所以根据线段差的定义，在 PD 上截取 $DF=CH$，然后应证 $PF=PE$.

但在作了 $DF=CH$ 后，由条件 $PD\perp AB$，$CH\perp AB$，可得 DF

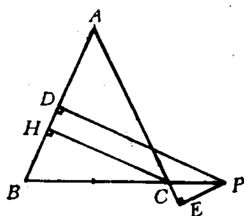


图 5・66

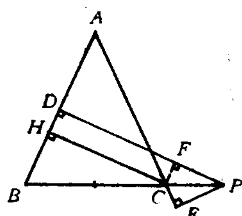


图 5・67

$/\!/ HC$，所以四边形 $DHCF$ 是一个平行四边形，而$\angle FDH=90°$，所以这个四边形就是一个矩形，从而有$\angle PFC=90°$. 而已知$\angle PEC=90°$，这样要证明相等的这两条线段 PF 和 PE 就成为点 P 到$\angle ECF$ 两边的距离，也就是它们是关于 PC 成轴对称的，所以就可应用轴对称型全等三角形进行证明，也就是应证$\triangle PCF\cong\triangle PCE$. 而在这两个三角形中，已经有$\angle PFC=\angle PEC=90°$，$PC=PC$，再由 $AB=AC$，可得$\angle B=\angle ACB$，由 BP、AE 相交于 C，得$\angle ACB=\angle PCE$ 和 $CF/\!/BA$，得$\angle B=\angle PCF$，所以$\angle PCF=\angle PCE$，从而就可完成分析.

例 22 已知：P 是等边$\triangle ABC$ 内的一点，$PD\perp BC$，$PE\perp AC$，$PF\perp AB$，垂足分别为 D、E、F，AH 是高. 求证：$PD+PE+PF=AH$.

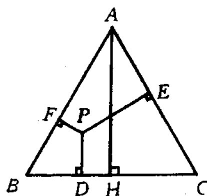


图 5・68

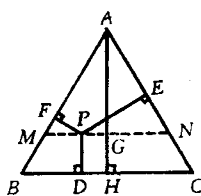


图 5・69

分析：本题要证明 $PD+PE+PF=AH$，所以根据线段和差

的定义，在 HA 上截取 $HG=PD$，然后再证明 $PE+PF=AG$.

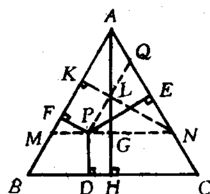


图 5・70

在作出了 $HG=DP$ 后，由于 HG 和 DP 都和 BC 垂直，所以有 $HG/\!/DP$，四边形 $PDHG$ 是一个矩形. 那末 $PG/\!/DH$，PG 就是$\triangle ABC$ 内一条边 BC 的平行线，所以将 PG 向两方延长到分别与 AB、AC 相交于 M、N，即可得$\triangle AMN$ 也是等边三角形. AG 就成为这个等边三角形的高. 而等边三角形的三条高都相等，所以问题就成为要证 $PE+PF$ 等于等边$\triangle AMN$ 的高. 于是另作一条等边$\triangle AMN$ 的高，也就是过 N 作 $NK\perp AM$，垂足是 K，则有 $NK=AG$，所以问题就要证 $PE+PF=NK$. 这样就可以再一次根据线段和差的定义，在 KN 上截取 $KL=PF$，然后证明 $NL=PE$. 但在作了 $KL=PF$ 后，由于 $LK\perp AM$，$PF\perp AM$，所以四边形 $KFPL$ 是矩形，于是延长 PL 交 AC 于 Q 后，可得$\triangle QPN$ 也是等边三角形，而 PE、NL 就是这个等边三角形的两条高，它们当然相等，所以分析也可以完成.

例 23 已知：P 是等边$\triangle ABC$ 所在平面上的任意一点，AD、BE、CF 是高，$PM\perp AD$，$PN\perp BE$，$PL\perp CF$，垂足分别是 M、N、L. 求证：$PN=PM+PL$.

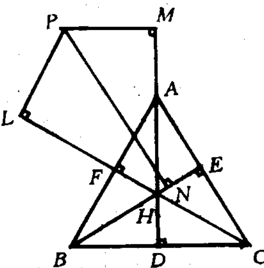


图 5・71

分析：本题条件中出现了 AD、BE、CF 是等边三角形的三条高，所以它们必定相交于一点，也就是等边三角形的中心，设为 H 点. 于是就可证得$\angle FBH=\angle DBH=30°$，$\angle FHB=\angle DHB=60°$，$BH$ 就是$\angle FHD$ 的角平分线，而条件中出现 $PN\perp BH$，就构成了角平分线和向角平分线所作垂线的组合关系，所以必定可以得到一个

等腰三角形的基本图形，由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线与角的两边相交得到的，所以延长 PN 交 AD 于 Q，并设 PN 交 CF 于 R，即可由 $\angle RHN=\angle QHN=60°$，$\angle RNH=\angle QNH=90°$ 和 $NH=NH$，得 $\triangle RHN$ 和 $\triangle QHN$ 是一对轴对称型全等三角形，所以 $RN=QN$，$\angle HRN=\angle HQN=30°$. 这样在 $\triangle PQM$ 中，由 $\angle PMQ=90°$ 和 $\angle PQM=30°$，可得 $PM=\frac{1}{2}PQ$. 而在 $\triangle PRL$ 中，由 $\angle PLR=90°$，$\angle PRL=\angle HRN=30°$，又可得 $PL=\frac{1}{2}PR$，从而就有 $PM+PL=\frac{1}{2}(PQ+PR)=\frac{1}{2}(PQ+2QN+PQ)=PQ+QN=PN$.

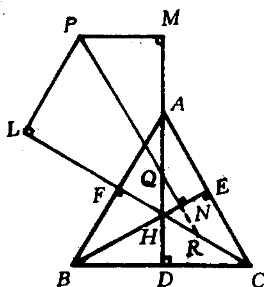


图 5・72

本题的分析在得到了 H 是等边 $\triangle ABC$ 的中心后，考虑要证的结论中出现的 PN 是点 P 到 BE 的距离，所以它就可以进行平行移动而不会改变其大小，而在平移过程中，就出现了一条过 P 点的 BE 的平行线，于是过 P 作 $QR/\!/BE$ 且分别交 CF、DA 的延长线于 Q、R，就可得 $\angle Q=\angle FHB=60°$，$\triangle HQR$ 是等边三角形，PN 就等于这个等边三角形的一条高，所以结论是可以证明的.

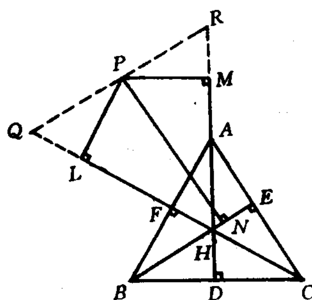


图 5・73

例 24　已知：PA、PB 与 $\odot O$ 相切于 A、B，延长 OA 到 C，使 $AC=OA$. 求证：$\angle APC=\frac{1}{3}\angle BPC$.

分析：本题条件中出现 PA、PB 与 $\odot O$ 相切于 A、B，所以可应

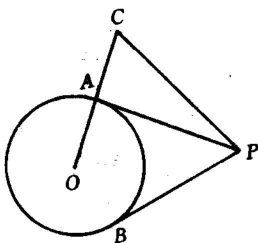


图 5·74

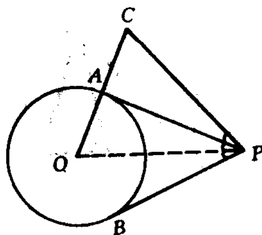


图 5·75

用切线长定理及其推论进行证明，所以连结 OP 后，有 $\angle BPO=\angle APO$.

又因为 PA 与 $\odot O$ 相切于 A，OA 是过切点的半径，所以 $OA\perp PA$. 而 O、A、C 成一直线，所以 $\angle OAP=\angle CAP=90°$，条件中还给出 $AC=AO$，且 $PA=PA$ 是公共边，从而可得 $\triangle PAC$ 和 $\triangle PAO$ 是一对轴对称型的全等三角形，由此就可推得 $\angle APO=\angle APC$，$\angle APC=\frac{1}{3}\angle BPC$.

例 25 已知：O 是 $\triangle ABC$ 的外心，AD 是角平分线，E 是 AB 上的一点，且 $AE=AC$. 求证：$OA\perp DE$.

分析：本题条件中出现了 $AE=AC$、$\angle EAD=\angle CAD$ 和 $AD=AD$，可得 $\triangle ADE\cong\triangle ADC$，是一对轴对称型全等三角形，于是 $\angle ADE=\angle ADC$.

现在要证 $OA\perp DE$，这是一个垂线的判定问题，所以根据垂线的定义，延长 AO 交 DE 于 F 后，应证明 $\angle AFD=90°$，也就是要证明 $\angle ADF+\angle DAF=90°$. 但由 $\angle ADE=\angle ADC$，可以发现这两个相等的角是关于 AD 成轴对称的，从而就可以再一次添加轴对称型全等三角形进行证明. 由于图形中已经出现了对称轴 AD，所以添加的

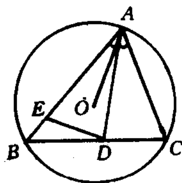


图 5·76

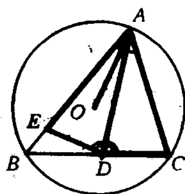


图 5・77

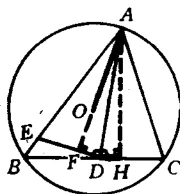


图 5・78

方法是将三角形沿对称轴翻折过去. 而当我们将$\triangle ADF$沿对称轴AD翻折后,DF就落在DC上,而AF就应落在DF的对应部分DC的垂线上. 由于已知图形中没有这条垂线,所以应将这条垂线添上,即过A作$AH\perp BC$交BC于H,那就应证$\triangle ADF$和$\triangle ADH$全等. 而在这两个三角形中,已经有$\angle ADF=\angle ADH$和$AD=AD$,所以还要证一个条件.

由条件AD是$\triangle ABC$的角平分线,即$\angle BAD=\angle CAD$,而这两个角都是圆周角,所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明,但现在这两个圆周角都只有一边和圆相交,所以要将另一边也延长到与圆相交,即延长AD交$\odot O$于G,即可得$\overset{\frown}{BG}=\overset{\frown}{CG}$,$G$是$\overset{\frown}{BC}$的中点. 然后就可直接应用弧的中点的性质,或者也就是应用垂径定理,可得连结OG后,有$OG\perp BC$,所以$OG/\!/AH$. 又因为OA、OG是$\odot O$的两条半径,它们可组成一个等腰三角形,应用等腰三角形的性质可得$\angle G=\angle FAD$,而由$OG/\!/AH$,又可得$\angle G=\angle HAD$,所以$\angle FAD=\angle HAD$,所以$\triangle ADF$和$\triangle ADH$全等就可以证明,分析也就可以完成.

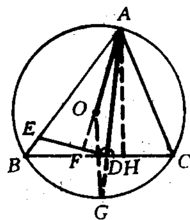


图 5・79

本题要证明$OA\perp DE$,而OA是$\odot O$的半径,这样就出现了半径的垂线,所以可添加过半径的外端所作的半径的垂线,也就是圆的切

线进行证明，于是过 A 作 OA 的垂线 MN，即可得 MN 与 $\odot O$ 相切于 A，而 AB 是过切点的弦，所以 $\angle MAB=\angle C$. 而在作出了 $MN\perp OA$ 后，由于要证 $OA\perp DE$，也就是要证 $DE\parallel MN$，所以问题又转化为要证 $\angle MAB=\angle AED$，$\angle AED=\angle C$. 由条件可得 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ADC$ 是一对轴对称型全等三角形. 所以这个性质就可以证明.

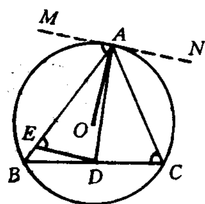


图 5・80

例 26 已知：$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，D 是 AB 上的一点，$AD=AC$，E 是 AC 的延长线上的一点，$AE=AB$. 求证：$OA\perp DE$.

分析：本题要证明 $OA\perp DE$，而 OA 是 $\odot O$ 的半径，这样就出现了 DE 是向半径所作的垂线，从而就可添加过半径的外端所作的半径的垂线，也就是圆的切线进行证明，于是过 A 作 OA 的垂线 MN，就可得 MN 与 $\odot O$ 相切于 A. 而 AB 是过切点的弦，所以 $\angle MAB=\angle ACB$. 而我们要证 $OA\perp DE$，也就是要证 $MN\parallel DE$，$\angle MAB=\angle ADE$，这样问题又转化成为要证 $\angle ACB=\angle ADE$. 而由条件 $AB=AE$，$AC=AD$ 和 $\angle BAC=\angle DAE$，就可证明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 是一对轴对称型全等三角形，从而就可完成分析.

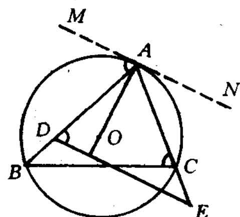


图 5・81

例 27 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，过 C 作以 AB 为直径的 $\odot O$ 的切线，分别交以 AC、BC 为直径的 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 于 D、E. 求证：$CD=CE$.

分析：本题条件中出现了 BC 是 $\odot O_2$ 的直径，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明. 现在图形中是有直径 BC、有半圆上的点 E，而没有圆周角，所以应将圆周角添上，也就是连结 BE，即可得 $\angle CEB=90°$. 根据同样的道理，设 AB 与 $\odot O_2$

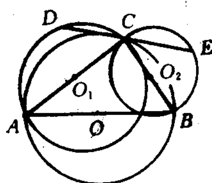


图 5・82

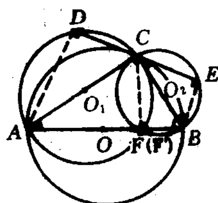


图 5・83

相交于 F，则连结 CF 后有$\angle CFB=90°$. 另一方面，由 CE 与$\odot O$ 相切于 C，CB 是过切点的弦，所以$\angle ECB=\angle CAB$，且$\angle ACB=90°$，这在$\triangle ECB$ 和$\triangle CAB$ 中，就可推得$\angle EBC=\angle ABC$. 而这两个角相等一出现，就出现了$\triangle ECB$ 和$\triangle FCB$ 是一对轴对称型全等三角形，所以 $CE=CF$.

根据同样的道理，如设$\odot O_1$ 交 AB 于 F'，则由$\angle CF'A=90°$，可先证明 F' 与 F 重合. 从而连接 AD 后，可证明$\triangle DCA\cong\triangle FCA$，$CD=CF$，所以分析可完成.

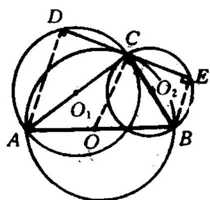


图 5・84

由本题的条件 AC、BC 分别是$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的直径，所以应用半圆上的圆周角的基本图形的性质，连结 AD、BE 后，可得$\angle D=\angle E=90°$，$AD/\!/BE$，这样四边形 $ABED$ 就是一个梯形. 又因为 DE 与$\odot O$ 相切于 C，所以可应用切线的性质，连结 OC 后有 $OC\perp DE$，从而有 $AD/\!/OC/\!/BE$，而已知 $AO=BO$，所以 $CD=CE$ 可以证明.

例 28 已知：P 是$\odot O$ 的弦 AB 的中点，过 P 任作两弦 CD、EF，CF、ED 交 AB 于 M、N. 求证：$PM=PN$.

分析：由于 P 是弦 AB 的中点，所以就要应用弦的中点的性质，也就是要应用垂径定理进行证明，于是过 P 作$\odot O$ 的直径

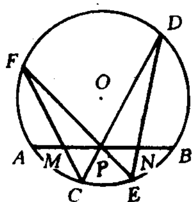


图 5・85

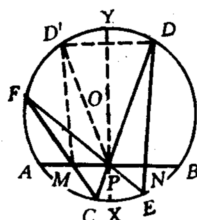


图 5・86

XY，则有 $XY \perp AB$.

在作出了直径 XY 后，由于我们要证的结论是 $PM=PN$，所以就出现了要证明相等的这两条线段 PM 和 PN 是关于 XY 成轴对称的，从而就可添加轴对称型的全等三角形进行证明，添加的方法是将三角形沿对称轴翻折过去，从而就可考虑将$\triangle PDN$ 沿直径 XY 翻折，也就是过 D 作 $DD' \perp XY$ 交$\odot O$ 于 D'，连结 PD'、MD'，显然问题就成为应证$\triangle PDN$ 和$\triangle PD'M$ 全等.

由于应用垂径定理，可得 XY 垂直平分 DD'，所以 $PD=PD'$，而由 $D'D /\!/ AB$，又可得$\angle NPD=\angle PDD'=\angle PD'D=\angle MPD'$，于是只须再证明一个性质. 由于条件中还给出 C、E、D、F 四点共圆，应用圆周角的基本图形的性质又可得$\angle PFM=\angle PDN$，所以第三个条件就应选择与$\angle PDN$ 有关的性质，即应证$\angle PD'M=\angle PDN$，也就进一步转化成要证$\angle PD'M=\angle PFM$. 而这两个角相等一出现，也就又出现了一个圆周角的基本图形，所以问题又成为应证 P、D'、F、M 四点共圆. 于是可先将圆内接四边形添全，即连结 $D'F$. 这样问题又可以转化为要证明$\angle D'FM+\angle D'PM=180°$. 但$\angle D'FM$ 是$\odot O$ 的一个圆周角，由 D'、F、C、D 四点共圆，又可得$\angle D'FM+\angle PDD'$

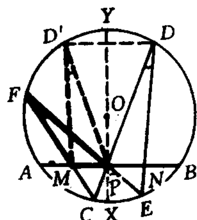


图 5・87

$=180°$，而我们已经证明$\angle MPD'=\angle PDD'$，故$\angle D'FM+\angle D'PM=180°$就可以得到证明.

例 29 已知：过⊙O 的圆心 O 向圆外直线 MN 作垂线，垂足是 A，过 A 作⊙O 的两割线 ABC、ADE 分别交⊙O 于 B、C、D、E，CD、EB 的延长线交 MN 于 F、G. 求证：$AF=AG$.

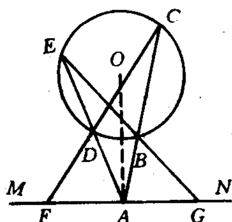


图 5・88

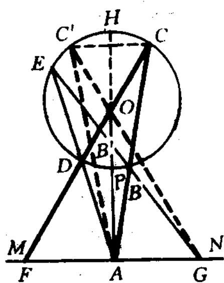


图 5・89

分析：本题要证明 $AF=AG$，且 OA 是过圆心所作 FG 的垂线，所以这两条相等的线段 AF、AG 是关于 OA 成轴对称的，从而就可以添加轴对称型的全等三角形进行证明. 添加的方法是将$\triangle AFC$沿对称轴 OA 翻折过去，于是在⊙O 中，首先应将这条对称轴添完整，即延长 AO 交⊙O 于 H，若 AO 交⊙O 于 P，那末 PH 就是⊙O 的直径. 接下来就可将$\triangle AFC$ 进行翻折，也就是过 C 作 $CC'\perp AH$ 交⊙O 于 C'，并连结 $C'A$、$C'G$，AC' 交⊙O 于 B'，那末问题就应证$\triangle FAC$ 和$\triangle GAC'$全等.

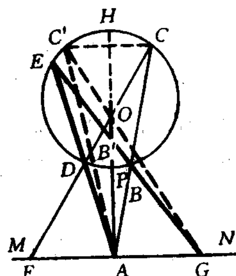


图 5・90

在这两个三角形中，我们已经可以证明的性质有：根据垂径定理，可得 AH 是 CC' 的中垂线，所以 $AC=AC'$，$\angle C'AH=$

$\angle CAH$，而已知 $OA\perp FG$，从而又有 $\angle FAC=\angle GAC'$，于是要证明这两个三角形全等，就还需要证明一个条件. 由于 $\angle FCA$ 是 $\odot O$ 的一个圆周角，可应用圆周角的基本图形的性质，所以第三个性质可考虑证 $\angle FCA=\angle GC'A$. 由于 B、C、E、D 四点共圆，就可得 $\angle ACF=\angle AEG$，所以只要证明 $\angle AEG=\angle AC'G$，而这两个角相等的关系一出现，问题也就成为要证 A、E、C'、G 四点共圆，于是连接 $C'E$，由于又出现了 $\angle GEC'$ 是 $\odot O$ 的一个圆周角，所以问题可进一步转化为要证 $\angle GAC'=\angle GEC'$. 由条件 E、B、C、C' 四点共圆，$\angle BEC'+\angle BCC'=180°$，而由 $C'C\parallel FG$，又可得 $\angle BCC'=\angle CAG$，而 $\angle CAG+\angle FAC=180°$，所以有 $\angle BEC'=\angle FAC$. 但我们已证 $\angle FAC=\angle GAC'$，所以 $\angle GAC'=\angle GEC'$ 就可以证明.

例 30 已知：以 $\triangle ABC$ 的三条边为底边，在形外作顶角为 120°的等腰三角形，即 $\triangle ABD$、$\triangle BCE$ 和 $\triangle CAF$. 求证：$\triangle DEF$ 是等边三角形.

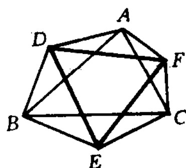


图 5 · 91

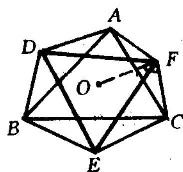


图 5 · 92

分析：本题要证明 $\triangle DEF$ 是等边三角形，就是要证明这个三角形的三个内角都等于 60°，考虑到这个图形性质的轮换对称性，实质上就是要证明它的一个内角是 60°，不妨就考虑证明 $\angle DFE=60°$. 但已知 $\angle AFC=120°$，所以在这个角的内部除去 $\angle DFE$ 后留下来的两个角之和也应等于 60°，也就是 $\angle AFD+\angle CFE$ 也应

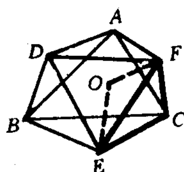


图 5·93

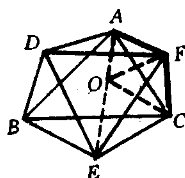


图 5·94

等于 60°，从而问题也就成为要证$\angle DFE=\angle AFD+\angle CFE$. 这是一个角等于两个角的和的问题，所以可根据角的和的定义将$\angle DFE$分成两部分，也就是先作$\angle EFO=\angle EFC$，然后再证明留下来的$\angle DFO$与$\angle DFA$相等.

在作出$\angle EFO=\angle EFC$后，就出现了这两个相等的角是关于EF成轴对称的，所以就可添加轴对称型全等三角形进行证明. 由于图形中已经出现了对称轴EF，所以添加的方法是将$\triangle EFC$沿EF翻折过去，实质上也就是作$FO=FC$，然后连结EO，则有$\triangle EFO\cong\triangle EFC$，$EO=EC$.

由条件$FA=FC$，而我们已作$FO=FC$，这是由F点发出的三条相等线段，所以它们可以两两组成等腰三角形，于是连结OA、OC后，可得$\angle FAO=\angle FOA$，$\angle FOC=\angle FOC$，由于这两个等腰三角形的顶角之和等于 120°，所以它们的四个底角之和应等于 240°，所以就有$\angle AOC=\angle FOA+\angle FOC=\frac{1}{2}\cdot 240°=120°$.

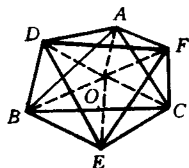


图 5·95

根据同样的道理，由已证明的性质$EO=EC$和条件$EB=EC$，可得连接BO后，$\angle BOC=120°$. 从而就可得$\angle AOB=360°-120°-120°=120°$. 而已知$\angle ADB=120°$，所以根据上述性质的逆定理就

可得连结 DO 后，有 $DO=DB=DA$.

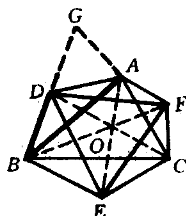


图 3·96

对于这一性质的证明也可作如下的分析：由于$\triangle DBA$ 是顶角为 120°的等腰三角形，所以它的底角为 30°，从而就可添加特殊角三角形的基本图形的性质进行证明，添加的方法是作特殊角一边的垂线到和另一边相交. 如我们取$\angle DBA$ 为 30°角，则就可过边 BA 上的点 A 作 BA 的垂线，并交 BD 的延长线于 G，即可得$\angle G=60°$，$BG=2AG$，而由$\angle BDA=120°$和 B、D、G 成一直线，又可得$\angle ADG=60°$，所以就得 $BG=2DG$，D 是 BG 的中点. 而由$\angle G=60°$和已证的$\angle AOB=120°$，可得$\angle G+\angle AOB=180°$，G、B、O、A 四点共圆，而这个圆就是以 BG 为直径的圆，所以 $DO=DB=DA$.

而在证明了 $DO=DA$ 后，就可由 $FO=FA$ 和 $FD=FD$，证明$\triangle DFA$ 和$\triangle DFO$ 也是一对轴对称型的全等三角形，从而有$\angle DFA=\angle DFO$，这样也就可进一步证明$\angle DFE=60°$.

根据同样的道理，还可以证明$\angle DEF$ 或$\angle EDF$ 也等于 60°，从而就可以完成分析.

本题在分析得到了 FA、FO、FC 是由 F 点发出的三条相等线段后，也就得到了 F 是$\triangle ACO$ 的外心，所以可直接应用三角形的外心的性质，得$\angle AFC$ 是$\triangle ACO$ 的外接圆的圆心角，而$\angle AOC$ 就是一个圆周角，从而由$\angle AFC=120°$，就可推得$\angle AOC$ 也是 120°. 根据同样的道理，通过$\triangle EFO$ 和$\triangle EFC$ 全等，并得到 $EO=EC=EB$ 后，又可证得$\angle BOC=120°$，从而也可得$\angle AOB=120°$，而已知$\angle ADB=120°$，所以 D 也就是$\triangle ABO$ 的外心，从而也可证得 $DO=DB=DA$，进一步也可完成分析.

本题在将问题转化为要证$\angle DFE=\angle EFC+\angle DFA$，并根据角的和的定义来进行分析时，也可以考虑作$\angle DFO=\angle EFC$，那

末就应有$\angle EFC+\angle EFO$也等于$60°$，而已知$\angle AFC=120°$，所以FO实际上就是$\angle AFC$的角平分线，而在具体作图时可以考虑从已知条件出发，所以可作$\angle AFC$的角平分线FO，则$\angle AFO=\angle CFO=60°$. 由于现在出现了$60°$的特殊角，所以也可以构成等边三角形，所以取$FO=FC$，并连接$CO$，则$\triangle FOC$就是一个等边三角形. 这样现在的问题也就是要证$\angle DFO=\angle EFC$.

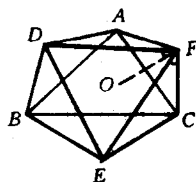


图 5・97

现在图形中出现了两个等边三角形，$\triangle FCO$已经证明是等边三角形，$\triangle FDE$是要证明的等边三角形，而这两个等边三角形现在有一个公共的顶点F，所以必然构成一对旋转型的全等三角形，找全等三角形的方法是将由这个公共顶点F发出的两组相等线段，即FD、FE和FO、FC两两组成全等三角形，于是连结DO，就得到

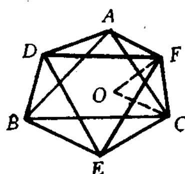


图 5・98

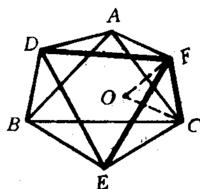


图 5・99

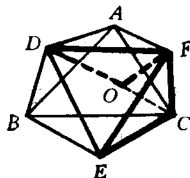


图 5・100

$\triangle FDO$和$\triangle FEC$应是一对旋转型全等三角形. 在这两个三角形中，已经出现的条件是$FO=FC$，所以还需要证明两个性质. 由于$FD=FE$和$\angle DFO=\angle EFC$都是要证明的结论，不能用，且由于$\angle DFC=\angle EFC$是结论，所以也不能再证另外两个角都对应相等，所以只能证明$DO=EC$和$\angle DOF=\angle ECF$.

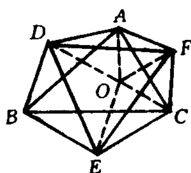


图 5·101

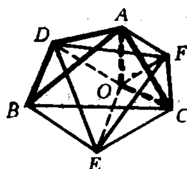


图 5·102

由于 $FO=FC=FA$，所以 FO 和 FA 也是两条具有公共端点

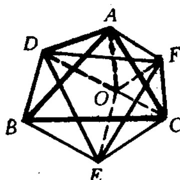


图 5·103

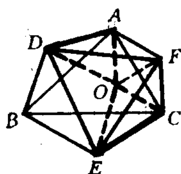


图 5·104

的相等线段，且它们的夹角$\angle AFO$ 也等于 60°，所以它们也可以组成等边三角形，于是连接 AO，可得$\triangle FAO$ 是等边三角形，$\angle FOA=60°$，而$\angle FCO$ 也等于 60°，所以证明$\angle DOF=\angle ECF$ 就可转化为证$\angle DOA=\angle ECO$.

由于现在图形中出现了$\triangle FAO$ 和$\triangle FCO$ 都是等边三角形，所以$\angle AOC=\angle AOF+\angle COF=120°$，且 $OC=OA$，所以$\triangle OCA$ 是一个顶角为 120°的等腰三角形，而已知$\triangle DBA$ 也是一个顶角为 120°的等腰三角形，且它们有一个公共顶点 B，所以它们是一对旋转型的相似三角形，即由$\angle ADB=\angle AOC=120°$，$\frac{BD}{CO}=\frac{DA}{OA}$或$\angle DAB=\angle OAC=30°$，可证明$\triangle DBA\backsim\triangle OCA$. 由于在旋转型相似三角形的基本图形中，必定同时出现另一对旋转型相似三角形. 也就是由上述相似三角形，可得$\frac{AD}{AO}=\frac{AB}{AC}$. 于是就有$\frac{AD}{AB}=\frac{AO}{AC}$，且$\angle DAO=\angle BAC$，所以$\triangle DAO\backsim\triangle BAC$，$\angle DOA=\angle BCA$. 而

$\angle BCA=\angle OCA+\angle OCB=30°+\angle OCB=\angle ECO$. 所以$\angle DOA=\angle ECO$可以证明. 根据同样的道理，由$\triangle CAO$和$\triangle CBE$也是一对旋转型的相似三角形，又可证明$\angle DAO=\angle EOC$，而已经证明$OA=CO$，所以又可得$\triangle DOA\cong\triangle ECO$，这样也就证明了$DO=EC$.

在证明了$\triangle FDO$和$\triangle FEC$全等以后，就可得$FD=FE$，$\angle DFO=\angle EFC$，而$\angle EFC+\angle EFO=60°$，所以$\angle DFO+\angle EFO$也等于60°，亦即$\angle DFE=60°$，所以$\triangle DEF$是等边三角形就可以证明.

本题在证明了$\triangle DAO\backsim\triangle BAC$后，也可直接推得$AD:DO:OA=AB:BC:CA$. 而由条件又可得$\triangle ABD\backsim\triangle BCE\backsim\triangle CAF$，从而又有$AD:EC:CF=AB:BC:CA$，而$CF=OA$，所以也可证明$DO=EC$，也就可完成分析.

第二节　中心对称型

【分析方法导引】

如两条相等的线段或两个相等的角出现在一个平行四边形的中心对称部分，或者也可以是出现在一个中心对称图形的对称部分时，就可以想到要应用中心对称型全等三角形的基本图形进行分析. 接下来就可以根据图形的中心对称部分找到相应的全等三角形，当完成分析的思路尚不完全清晰时，可将图形中出现的各对中心对称型全等三角形全部列举出来，从中找出与条件或结论有联系的全等三角形，再应用全等三角形的性质来完成分析.

如果几何问题中出现了一组或两条相等的线段

是位于一组对顶角的两边且成一直线时，就应想到要应用中心对称型全等三角形的基本图形进行证明. 接下来就应以对顶角的公共顶点为对称中心，找到全等三角形. 若全等三角形尚未出现，则可将图形，主要是三角形绕对称中心旋转 180°，具体地说就是过两条相等线段对应的两个端点作平行线，到与过公共端点（这时实质上是一个中点）的直线相交，构成中心对称型全等三角形. 由于过两个端点作平行线可以有无数多种可能性，所以在具体应用时，可将两条平行线中的一条选取在图形中已经出现的线段上，这条线段起了决定平行线方向的作用，所以也可称为平行方向线段，这样具体的作平行线的过程就成为：在图形中选取一条过端点的线段为平行方向线段，然后过另一端点作平行方向线段的平行线到与过中点的直线相交，构成全等三角形，然后再应用全等三角形的性质完成分析.

如果几何问题中出现两条线段相交且互相平分时，也应想到要应用中心对称型全等三角形的基本图形进行证明. 应用的方法是将线段的四个端点两两连结起来，构成全等三角形，然后就可完成分析.

例 31 已知：$\square ABCD$ 中，E、F 是 AC 上的两点，且 $AE=CF$. 求证：$BF=DE$.

分析：本题要证明相等的这两条线段 BF 和 DE 现在是位于一个平行四边形的中心对称部分，所以可应用中心对称型全等三角形进行证明.

根据平行四边形的中心对称部分，我们可以找到以 BF 和 DE 为对应边的两对全等三角形，即 $\triangle CBF$ 和 $\triangle ADE$，$\triangle ABF$ 和 $\triangle CDE$.

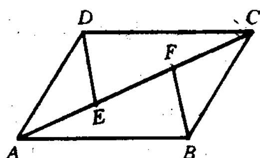


图 5・105

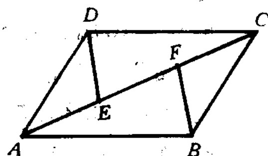


图 5・106

如考虑证明$\triangle CBF\cong\triangle ADE$，则在这两个三角形中，已经有$CF=AE$，应用平行四边形的性质又可得$CB=AD$，而由$AD\parallel BC$，又可推得$\angle BCF=\angle DAE$，所以这两个三角形全等就可以证明.

如考虑证明$\triangle ABF\cong\triangle CDE$，则根据$AB=CD$，由$AE=CF$可得$AF=CE$和$\angle BAF=\angle DCE$，也可以完成分析.

例 32 已知：$\square ABCD$中，以四边为直径作半圆，每相邻两半圆依次相交于E、F、G、H. 求证：四边形$EFGH$是平行四边形.

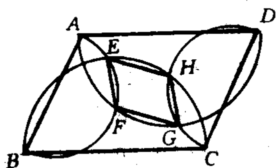


图 5・107

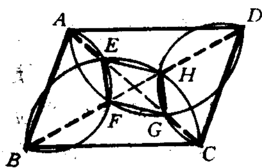


图 5・108

分析：因已知平行四边形$ABCD$的四边是四个半圆的直径，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明. 对于以AB为直径的半圆来说，现在是有直径，有半圆上的点E，但没有圆周角，所以应将圆周角添上，也就是连结AE、BE后，有$\angle AEB=90°$. 同样地，对于直径BC来说，连结CE后，有$\angle BEC=90°$. 于是A、E、C成一直线，根据同样的道理可以证明A、G、C也成一直线，也就是AC必定经过E、G，同样地连结BF、AF、DF、CH、BH、DH后也可以证明BD必定经过F、H. 这样就可设AC、BD

的交点为 O. 由条件四边形 $ABCD$ 是平行四边形和 $BE\perp AC$、$DG\perp AC$，可得$\triangle ABE$ 和$\triangle CDG$ 是一对中心对称型的全等三角形. 显然由平行四边形的性质 $AB=CD$，以及由 $AB\parallel CD$，得$\angle BAE=\angle DCG$，并根据已经证明的$\angle AEB=\angle CGD=90°$，就可以证明这两个三角形全等，$AE=CG$. 而由平行四边形的性质，又有 $AO=CO$，从而就可得 $EO=GO$. 显然用同样的方法还可证得 $FO=HO$，所以分析可以完成.

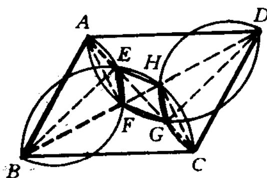


图 5・109

本题在证明了 A、E、G、C 及 B、F、H、D 成一直线后，由于出现了圆上的四点，即 A、B、F、E 四点共圆，所以也可应用圆周角的基本图形的性质进行证明，于是由 A、E、C 成一直线，出现了圆内接四边形的外角，所以可得$\angle GEF=\angle ABD$，同样地我们还可得$\angle EGH=\angle CDB$. 而由 $AB\parallel DC$，可得$\angle ABD=\angle CDB$，所以就有$\angle GEF=\angle EGH$，$EF\parallel HG$，同理可证 $EH\parallel FG$. 这样也可以完成分析.

例 33 已知：▱$ABCD$ 中，E、F、G、H 是边 AB、BC、CD、DA 上的点，且 $AE=CG$，$BF=DH$. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

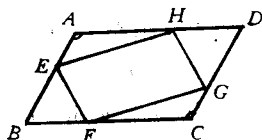


图 5・110

分析：由条件 $AE=CG$，$BF=DH$，可以发现这两组相等线段都位于平行四边形的中心对称部分，所以就可应用中心对称型全等三角形进行证明. 根据图形的中心对称性，我们可以找到图形中已经出现的两对全等三角形，即$\triangle AEH$ 和$\triangle CGF$，$\triangle BFE$ 和$\triangle DHG$.

在$\triangle AEH$ 和$\triangle CGF$ 中，条件中给出 $AE=CG$，由四边形 $ABCD$ 是平行四边形可得$\angle A=\angle C$，而由 $AD=BC$ 和 $DH=BF$，又可得 $AH=CF$，所以这两个三角形全等可以证明，也就有

$EH=GF$. 显然，根据同样的道理还可证明 $EF=GH$，所以分析可完成.

例 34 已知：□$ABCD$ 中，AC、BD 相交于 O，过 O 的一直线分别交 BC、AD 于 E、F. 求证：$EO=FO$.

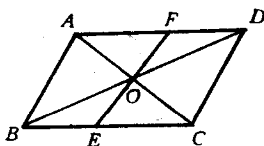


图 5・111

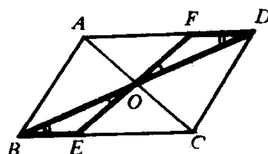


图 5・112

分析：本题要证明相等的两条线段 EO 和 FO，现在是位于这个平行四边形的中心对称部分，所以可应用中心对称型全等三角形进行证明. 根据平行四边形的中心对称部分，我们可以找到以 EO 和 FO 为对应边的全等三角形有两对，即 $\triangle BOE$ 和 $\triangle DOF$，$\triangle COE$ 和 $\triangle AOF$.

如考虑证明 $\triangle BOE \cong \triangle DOF$，则由条件四边形 $ABCD$ 是平行四边形，就可得 $BO=DO$，$AD \parallel BC$，$\angle OBE=\angle ODF$，而由 EF、BD 相交于 O，又可得 $\angle BOE=\angle DOF$，所以这两个三角形全等，$EO=FO$ 就可以证明.

如考虑证明 $\triangle COE$ 和 $\triangle AOF$ 全等，那末我们也可以用类似的方法完成分析.

例 35 已知：$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，$BE \perp AD$，$CF \perp AD$，垂足分别是 E、F. 求证：$BE=CF$.

分析：本题条件中出现 $BD=CD$，且 BC、AE 在 D 点相交，从而就出现了 BD 和 CD 这两条相等线段是位于一组对顶角的两边，且成一直线，所以就可应用中心对称型全等三角形进行证明. 找全等三角形的方法则是将过端点的一组平行线与过中点的直线相交组成全等三角形. 从而可找到这对全等三角形应是 $\triangle BDE$ 和

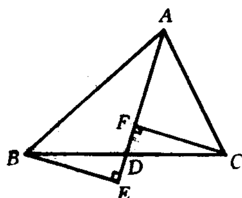


图 5 · 113

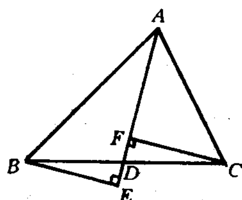


图 5 · 114

$\triangle CDF$. 而在这两个三角形中，有 $BD=CD$，$\angle BDE=\angle CDF$ 以及 $\angle BED=\angle CFD=90^\circ$，所以这两个三角形全等可以证明，也就可以推得 $BE=CF$.

例 36 已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是中线，G 是 AD 上的一点，且 $GD=\frac{1}{3}AD$，BG、CG 的延长线交 AC、AB 于 E、F. 求证：$AE=CE$，$AF=BF$.

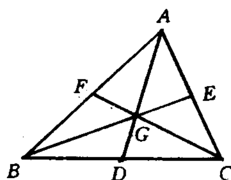


图 5 · 115

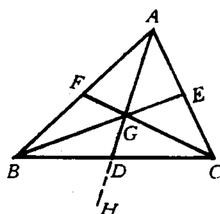


图 5 · 116

分析：本题条件中给出了 $GD=\frac{1}{3}AD$，也就是 $GD=\frac{1}{2}AG$，这是两条线段之间的倍半关系，所以可根据线段倍半关系的定义，作出半线段的两倍，也就是延长 GD 到 H，使 $DH=GD$，那就有 $GH=AG$.

而在作出了 $DH=DG$ 后，由于条件中还给出 $BD=CD$，且 BC 和 AH 在 D 点相交，从而就出现了这两组相等线段都是位于

一组对顶角的两边，且成一直线，所以可添加中心对称型全等三角形进行证明．添加的方法是将这四个端点两两连结起来，并可得这两条连线必定是平行线，于是连结 CH，这样在 $\triangle BGD$ 和 $\triangle CHD$ 中，就有 $BD=CD$，$\angle BDG=\angle CDH$，$GD=HD$，所以 $\triangle BGD\cong\triangle CHD$，$\angle GBD=\angle HCD$，$BG /\!/ HC$．那末在 $\triangle AHC$ 中，由 $AG=HG$ 和 $GE /\!/ HC$，就可证得 $AE=CE$．根据同样的道理，连结 BH 后，也可以证明 $AF=BF$．

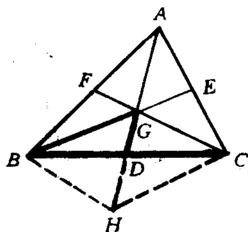


图 5・117

本题在根据线段倍半关系的定义开始进行分析时，也可以将倍线段两等分，也就是取 AG 的中点 H 后，可得 $HG=DG$．但在出现了这两条线段相等的关系后，由于 HD 和 BE 相交于 G，所以这两条相等线段就位于一组对顶角的两边且成一直线，从而就可添加中心对称型全等三角形进行证明，添加的方法是过两条相等线段的端点作平行线．于是过 H 作 BD 的平行线交 BE 的延长线于 M，即可根据 $\angle BGD=\angle MGH$，$DG=HG$ 和 $\angle BDG=\angle MHG$，证得 $\triangle BGD\cong\triangle MGH$，$MH=BD=CD$．

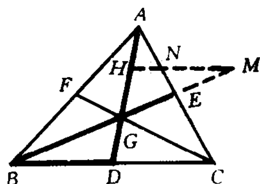


图 5・118

但在作出 $HM /\!/ DC$ 后，在 $\triangle ADC$ 中就出现了三角形内一条边的平行线段，从而可应用平行线型相似三角形进行证明．于是设 HM 交 AC 于 N，就可得 $\triangle AHN\backsim\triangle ADC$，$\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{HN}{DC}=\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{1}{3}$．而 $HM=DC$，所以 $\dfrac{NM}{DC}=\dfrac{2}{3}$，而 $DC=\dfrac{1}{2}BC$，这样又可得 $\dfrac{NM}{BC}=\dfrac{1}{3}$．由 $NM /\!/ BC$，又可得 $\triangle NME\backsim\triangle CBE$，$\dfrac{EN}{EC}=\dfrac{NM}{CB}=\dfrac{1}{3}$．也

就是$\frac{EN}{CN}=\frac{1}{4}$，$\frac{AN}{CN}=\frac{1}{2}$，从而可证明$EN:AN:CE=1:2:3$，所以分析可以完成.

本题在过AG的中点H作BC的平行线交AC于N，交BE的延长线于M后，可得$MH=BD$，$\frac{HN}{DC}=\frac{1}{3}$，$\frac{MN}{BC}=\frac{1}{3}$. $\frac{EN}{EC}=\frac{1}{3}$. 接下来由于要证$E$是$AC$的中点，而已作$H$是$AG$的中点，出现了多个中点问题，

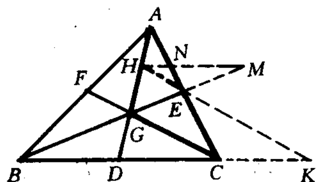


图 5・119

所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于E、H所在的线段AC、AG具有公共端点A，可以组成三角形，所以HE这两个中点的连线就是三角形的中位线，现在图形中是有三角形而没有中位线，所以应将中位线添上，于是连结HE，问题就成为要证$HE/\!/GC$. 又因为G是DH的中点，所以GC也成为过中点的平行线，从而GC也可以取作中位线，于是将三角形添完整，也就是延长HE交BC的延长线于K，那末证$HE/\!/GC$的问题就转化成要证$DC=CK$. 但已证$\frac{MH}{BC}=\frac{1}{2}$，而由$HM/\!/BK$，又可证$\triangle MHE\backsim\triangle BKE$，$\frac{MH}{BK}=\frac{ME}{BE}=\frac{NE}{CE}=\frac{1}{3}$，所以$DC=CK$可以证明.

例 37 已知：$\triangle ABC$中，D是AC的中点，E是BC上的一点，延长DE到F使得$EF=DE$，且$FC/\!/BA$. 求证：$EC=\frac{1}{3}BE$.

分析：由条件中的$EF=ED$和DF、BC相交于E，就出现了EF和ED这两条相等线段是位于一组对顶角的两边且成一直线，从而可添加中心对称型的全等三角形进行证明. 添加的方法是过这两条相等线段的端点作平行线，于是过D作$DG/\!/CF$交BC于G. 即可由$\angle DEG=\angle FEC$，$DE=FE$和$\angle GDE=\angle CFE$，推得

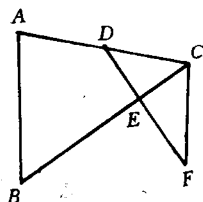


图 5・120

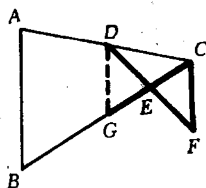


图 5・121

$\triangle DEG \cong \triangle FEC$，$GE=CE$. 于是要证 $EC=\frac{1}{3}BE$，就只要证 $EC=\frac{1}{2}BG$，也就是要证明 $BG=CG$，即证 G 是 BC 的中点. 因 D 是 AC 的中点，从而出现了两个中点，所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明，即只须证明 $DG /\!/ AB$，而因 $CF /\!/ AB$，这样问题又需要有 $DG /\!/ CF$. 由于这个性质已经成立，所以分析就可完成.

例 38 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是 AB 上的一点，E 是 AC 的延长线上的一点，$CE=BD$，DE 交 BC 于 F. 求证：$DF=EF$.

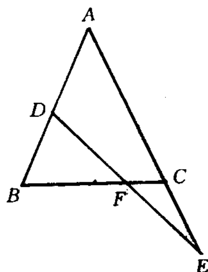


图 5・122

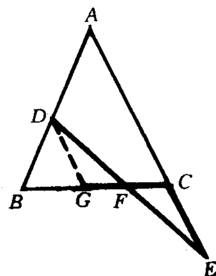


图 5・123

分析：本题要证明的结论是 $DF=EF$，而条件中又给出 DE 和 BC 相交于 F，这样就出现了要证明相等的两条线段 DF 和 EF 位

于一组对顶角的两边且成一直线，从而就可添加中心对称型的全等三角形进行证明. 添加的方法是过端点作平行线. 由于过端点 D 和 E 可以作许多组平行线，所以选取哪一条线段为平行线的方向或方向线段也就出现了多种可能情况：

如果取 EC 为平行方向线段，则过 D 作 $DG \parallel AE$ 交 BC 于 G，那末$\triangle DFG$ 和$\triangle EFC$ 就是一对中心对称型的全等三角形. 在这两个三角形中，已经有$\angle DFG = \angle EFC$，$\angle DGF = \angle ECF$，所以还应找一组边对应相等的条件. 因条件中还给出 $CE = BD$，所以就应证明 CE 和它的对应边 GD 相等，也就是要证 $DG = DB$，但这又是两条具有公共端点的相等线段，它们可组成一个等腰三角形，所以问题可转化成证 $DG = DB$ 的等价性质$\angle B = \angle DGB$. 由于 $DG \parallel AC$，$\angle DGB = \angle ACB$，和 $AB = AC$，$\angle B = \angle ACB$，就可以完成分析.

如果取 DB 为平行方向线段，则过 E 作 $EN \parallel BA$ 交 BC 的延长线于 H，那末由 $AB = AC$、$\angle B = \angle ACB = \angle ECN$ 和$\angle B = \angle N$，就可以证明 $DB = EC = EN$. 从而通过$\angle B = \angle N$ 和$\angle DFB = \angle EFN$，也可以证明$\triangle DBF$ 和$\triangle ENF$ 也是一对中心对称型全等三角形，从而完成分析.

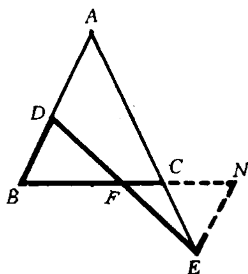


图 5・124

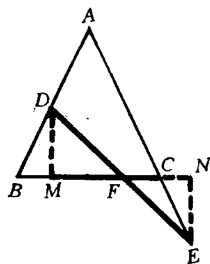


图 5・125

如果取与 BC 垂直的方向作为平行线的方向，则过 D、E 分别

作 $DM \perp BC$、$EN \perp BC$，并交 BC 和 BC 的延长线于 M、N，这样 $\triangle DFM$ 和 $\triangle EFN$ 就应是一对中心对称型的全等三角形. 在这两个三角形中，已有 $\angle DFM = \angle EFN$，$\angle DMF = \angle ENF = 90°$，所以也要再证一组边对应相等的条件. 由 $BD = CE$、$\angle B = \angle ACB = \angle ECN$ 和 $\angle DMB = \angle ENC = 90°$，就可先证明 $\triangle BDM$ 和 $\triangle CEN$ 全等，从而可得 $DM = EN$，也就可以完成分析.

接下来我们讨论一种特殊的情况，就是取 BC 为平行线的方向，也就是过端点 D、E 所作的平行线与 BC 不相交，也就是和 BC 平行，这样中心对称型的全等三角形也就不会出现，但由于这时出现了过线段的中点所作的平行线，所以就出现了三角形中位线的基本图形. 在具体添加平行线时，由于 BC 实际上已是平行方向线段，所以平行线只要过一个端点作即可.

如考虑过端点 D 作平行线，则过 D 作 $DG /\!/ FC$ 交 AC 于 G，于是由 $AB = AC$ 和 $DG /\!/ BC$，就可得 $AD = AG$，$BD = CG$，而已知 $BD = CE$，所以 $CG = CE$，而已作 $GD /\!/ CF$，所以 $DF = EF$ 可以证明.

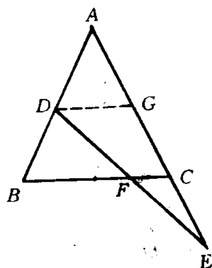


图 5・126

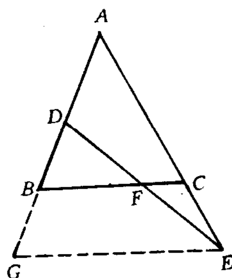


图 5・127

如考虑过端点 E 作平行线，则过 E 作 $EG /\!/ FB$ 交 AB 的延长线于 G，那末也可由 $AB = AC$ 和 $BC /\!/ GE$，推得 $BG = CE$，所以 $BD = GD$，从而再由 $BF /\!/ GE$，就可证明 $DF = EF$.

例 39 已知:四边形 $ABCD$ 中,$AD /\!/ BC$,$AB=AD+BC$,E 是 CD 的中点. 求证:AE、BE 分别是 $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$ 的平分线.

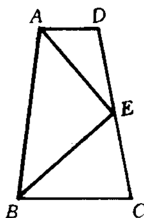


图 5·128

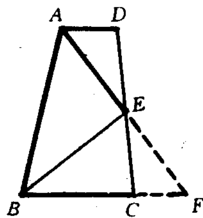


图 5·129

分析:本题要证明 AE 是 $\angle DAB$ 的角平分线,而条件中又出现了 $AD /\!/ BC$,所以就出现了角平分线和平行线的组合关系,就可得到一个等腰三角形的基本图形. 由于 BC 是角的一条边 AD 的平行线,所以它应和角的另一边以及角平分线相交构成等腰三角形,于是延长 AE 交 BC 的延长线于 F. 问题就成为要证 $AB=BF=BC+CF$,而已知 $AB=BC+AD$,所以问题就是要证 $AD=FC$.

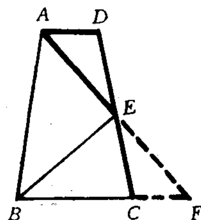


图 5·130

又因为条件中给出 E 是 CD 的中点,且 AF 和 CD 在 E 点相交,这样就出现了两条相等的线段 CE 和 DE 位于一组对顶角的两边且成一直线,所以可应用中心对称型的全等三角形进行证明. 而根据 DE、CE 的中心对称性就可以找到这一对全等三角形应是$\triangle AED$ 和$\triangle FEC$,在这两个三角形中,已经有$\angle AED=\angle FEC$,$DE=CE$,还可根据 $AD /\!/ BF$,推得$\angle DAE=\angle CFE$,所以这两个三角形全等可以证明,分析也就完成.

本题给出了 $AB=AD+BC$,且已知 $AD /\!/ BC$,所以就出现了梯形的上、下两底的和,又因为 E 是这个梯形的腰 CD 的中点,所

以可应用梯形中位线的性质进行证明. 于是应先将梯形的中位线添上,也就是取 AB 的中点 F,并连结 EF,即可得 $AD /\!/ FE /\!/ BC$,$EF=\frac{1}{2}\cdot(AD+BC)$,并进一步可推得 $EF=\frac{1}{2}AB=AF$. 由于 EF 和 AF 是两条具有公共端点 F 的相等线段,它们可组成一个等腰三角形,应用等腰三角形的性质可得 $\angle FAE=\angle FEA$,而由 $AD /\!/ FE$,又可得 $\angle DAE=\angle FEA$,所以 $\angle FAE=\angle DAE$ 可以证明,分析就可以完成. 对于 BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线显然可用同样的方法完成分析.

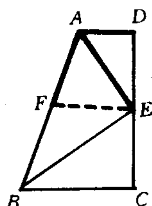


图 5・131

由本题的条件 $AB=AD+BC$,这是一条线段等于两条线段的

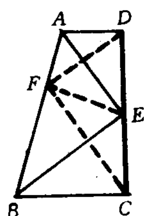


图 5・132

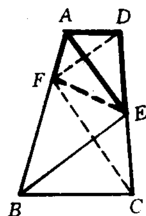


图 5・133

和,所以可根据线段和的定义,在和线段 AB 上截取 $AF=AD$,也就可得 $BF=BC$. 在作出了 $AF=AD$ 后,由于这是两条具有公共端点的相等线段,所以它们可组成一个等腰三角形,于是连结 DF,就可得 $\angle AFD=\angle ADF$. 根据同样的道理,连结 CF 后,有 $\angle BCF=\angle BFC$. 又因为 $AD /\!/ BC$,这两条平行线可以看作是被 AB 所截,所以 $\angle DAF+\angle CBF=180°$,那末这两个顶角互补的等腰三角形的底角必定互余,也就是由 $\angle AFD=\frac{1}{2}(180°-\angle DAF)$ 和 $\angle BFC=\frac{1}{2}(180°-\angle CBF)$,可得 $\angle AFD+\angle BFC=\frac{1}{2}(180°-$

$\angle DAF+180^\circ-\angle CBF)=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$，而 A、F、B 成一直线，所以$\angle CFD=180^\circ-90^\circ=90^\circ$. 又因为已知 E 是 CD 的中点，这样就出现了 E 是直角三角形的斜边 CD 的中点，所以可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明，于是连结 EF，就可得 $EF=ED=EC$. 这样由 $EF=ED$，$AF=AD$ 和 $AE=AE$，就可以证明$\triangle AEF$ 和$\triangle AED$ 是一对轴对称型全等三角形，所以$\angle FAE=\angle DAE$ 就可以证明，根据同样的方法还可证明 BE 平分$\angle ABC$.

例 40 已知：正方形 $ABCD$ 中，E 是 CD 的中点，F 是 AD 上的一点，且 $BF=FD+CD$. 求证：BE 平分$\angle CBF$.

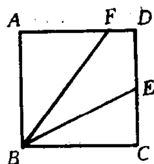


图 5·134

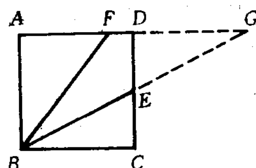


图 5·135

分析：本题要证 BE 平分$\angle CBF$，但已知四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $FD /\!/ BC$，这样就出现了角平分线和平行线的组合关系，从而必定构成一个等腰三角形的基本图形，于是延长 FD 交 BE 的延长线于 G. 问题也就转化成要证$\angle FBG=\angle G$，并再转化为证 $BF=GF$. 但已知 $BF=FD+CD$，所以问题又成为要证 $DG=DC$，即 DG 也等于正方形的边长.

由条件 $CE=DE$，且 CD、BG 在 E 点相交，就出现了 CE 和 DE 这两条相等线段是位于一组对顶角的两边，且成一直线，所以可应用中心对称型全等三角形进行证明. 于是在$\triangle BCE$ 和$\triangle GDE$ 中，由$\angle BEC=\angle GED$，$\angle BCE=\angle GDE=90^\circ$和 $CE=DE$，就可证明这两个三角形全等，那末 $BC=DG$，分析即可完成.

本题的条件中出现了 $BF=FD+CD$，所以可根据线段和的定义，将 FD 和 CD 这两条线段接起来. 由于 CD 是正方形的边长，所以实质上就是要将 FD 接在正方形的一条边长上. 由于正方形的边 BC 与 BF 有公共端点 B，且要证 BE 是角平分线，所以可将 FD 接在 BC 上，也就是延长 BC 到 G，使 $CG=DF$，那末这两条线段不但相等，而且平行，所以可添加中心对称型的全等三角形进行证明，于是连结 EF、EG，并由 $CG=DF$，$\angle ECG=\angle EDF=90°$，$CE=DE$，就可证明 $\triangle ECG\cong\triangle EDF$，$EF=EG$，$\angle DEF=\angle CEG$，从而又可证明 F、E、G 成一直线. 而在作出 $CG=DF$ 后，也就可得 $BF=BG$，那末在等腰 $\triangle BGF$ 中，由 $EF=EG$，就可推得 BE 平分 $\angle CBF$.

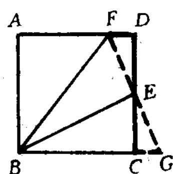


图 5・136

例 41 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，D 是 AB 的中点，E、F 分别是 AC、BC 上的点，且 $ED\perp FD$. 求证：$EF^2=AE^2+BF^2$.

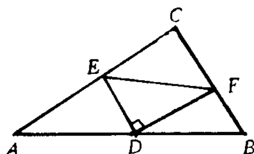


图 5・137

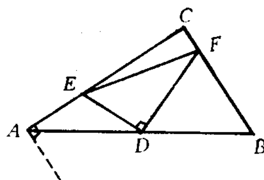


图 5・138

分析：本题要证明的结论 $EF^2=AE^2+BF^2$，是两条线段的平方和问题，是一个勾股定理应用的表示式，所以 AE 和 BF 就应是一个直角三角形的两条直角边. 但图形中这两条线段并没有公共的端点，所以应改变它们的位置，使它们具有公共的端点，且应互相垂直，但已知 $\angle C=90°$，AE 和 BF 已经垂直，所以实质上就是要将 BF（或 AE）平行移动到和 AE（或 BF）具有公共端点，也就是

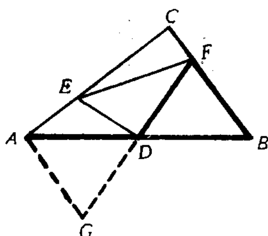


图 5・139

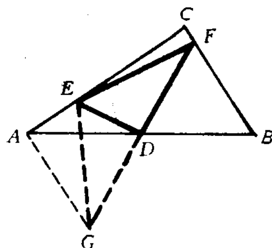


图 5・140

应过 A 作 BF 的平行线. 但这条平行线一作出，就出现了过线段两端的平行线，且条件中还给出了 D 是 AB 的中点，所以可添加中心对称型全等三角形进行证明，添加的方法是将过端点的平行线与过中点的直线相交，于是过 A 作 CB 的平行线交 FD 的延长线于 G，从而由 $\angle GAD=\angle FBD$，$AD=BD$，$\angle ADG=\angle BDF$，就可证得 $\triangle ADG\cong\triangle BDF$，$AG=BF$，$DG=DF$. 又因为 $ED\perp DF$，这样又出现了 GF 边上的中线和高重合，所以可应用等腰三角形中的重要线段的基本图形的性质进行证明. 由于这个等腰三角形尚缺少一条腰，所以应连结 EG，就可得 $EG=EF$. 而在 $\triangle EGA$ 中，由 $\angle EAG=90°$，就可得 $EG^2=AE^2+AG^2$，所以结论可以证明.

例 42 已知：AB 是 $\odot O$ 的直径，AC 是弦，$OD\perp AC$ 垂足是 D，BD 的延长线交 $\odot O$ 于 E，$CF\perp BE$ 交 $\odot O$ 于 F，交 BE 于 G. 求证：$ED=GD$.

分析：本题的条件中出现了 AB 是 $\odot O$ 的直径，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明. 现在图形中有直径，有半圆上的点 E，而没有圆周角，所以应先将圆周角添上，也就是连结 AE 后，可得 $\angle AEB=90°$. 而条件中还给出 $CF\perp BE$，所以有 $AE/\!/FC$.

现在问题是要证明 $ED=GD$，而已知 EG 和 AC 在 D 点相交，

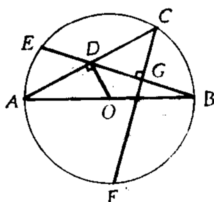


图 5・141

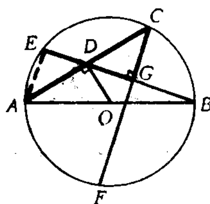


图 5・142

所以要证明相等的这两条线段就位于一组对顶角，即$\angle ADE$和$\angle CDG$的两边且成一直线，从而就可应用中心对称型的全等三角形进行证明. 找中心对称型全等三角形的方法，是将过端点的一组平行线与过中点的直线相交. 由于已经出现了过端点的平行线AE和GC，它们和过D的直线AC相交，就可找到这对全等三角形应是$\triangle ADE$和$\triangle CDG$，在这两个三角形中，角对应相等的条件已经解决，所以要再找一组边对应相等的条件，而$ED=GD$是要证的结论，不能用，所以要另找一组对应边相等. 而由条件$OD\perp AC$，AC是$\odot O$的弦，所以应用垂径定理就可得$AD=CD$，从而完成分析.

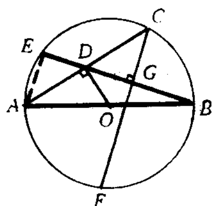


图 5・143

例 43　已知：$\triangle ABC$中，AD是中线，AE是角平分线，过A、D、E三点的$\odot O$交AB、AC于F、G. 求证：$BF=CG$.

分析：本题要证明$BF=CG$，而这两条线段所在的位置不易直接建立它们之间的等量关系，所以可考虑将线段改变位置. 由于BF、CG是过线段BC的两端的线段，且条件中还出现D是BC的中点，所以考虑将线段进行平

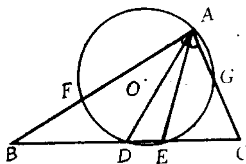


图 5・144

移. 于是将 CG(或 BF)平行移动到以 B(或 C)为端点，而过 B 所作 GC 的这条平行线一出现，就出现了过线段 BC 的两个端点的一组平行线，且 D 是 BC 的中点，所以可添加中心对称型全等三角形进行证明，添加的方法是将过端点所作的平行线与过中点的直线相交. 于是过 B 作 AC 的平行线交 GD 的延长线于 H，从而由 $\angle HBD=\angle GCD$，$BD=CD$ 和 $\angle HDB=\angle GDC$ 就可得 $\triangle HBD$

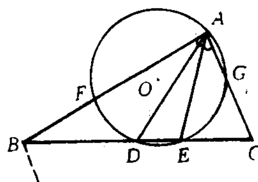


图 5・145

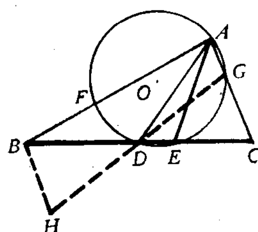


图 5・146

$\cong\triangle GCD$，$BH=CG$. 这样问题就转化成要证 $BF=BH$. 而这又是两条具有公共端点 B 的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，但这个等腰三角形只有两条腰而没有底边，所以连结 FH，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题，也就是要证 $\angle BFH=\angle BHF$.

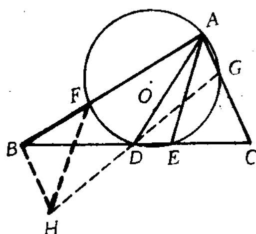


图 5・147

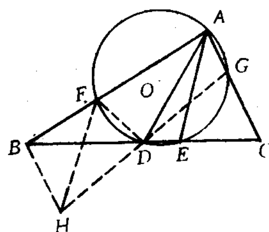


图 5・148

由条件 A、F、D、G 四点共圆，所以可应用圆周角的基本图形

或者也就是圆内接四边形的性质进行证明. 由于 A、G、C 成一直线,出现了$\angle DGC$ 是圆内接四边形的外角,所以连接 DF 后,可得$\angle DGC=\angle DFA$. 而由 $BH /\!/ GC$,又可得$\angle DHB=\angle DGC$,所以$\angle DFA=\angle DHB$,这样又可得 D、F、B、H 四点共圆. 然后再一次应用圆周角的基本图形的性质,可得$\angle BFH=\angle BDH$,$\angle BHF=\angle BDF$,从而问题就转化成要证$\angle BDH=\angle BDF$. 而$\angle BDH=\angle CDG$,所以问题成要证$\angle BDF=\angle CDG$.

再由条件 D、E、G、A 四点共圆,可得$\angle CDG=\angle CAE$. 而由 A、F、D、E 四点共圆,B、D、E 成一直线,又可得$\angle BDF=\angle BAE$. 再由条件中给出的$\angle CAE=\angle BAE$,就可以证明上述性质.

由于本题要证明相等的两条线段 BF 和 CG 都是割线的圆外部分,且图形中还出现了过圆外的点 B、C 分别作圆的两条割线,所以本题也可直接应用逆平行线型相似三角形的性质,或者也就是割线定理来进行证明. 于是就可得:$BF\cdot BA=BD\cdot BE$ 和 $CG\cdot CA=CE\cdot CD$,$BF=\dfrac{BD\cdot BE}{BA}$和 $CG=\dfrac{CE\cdot CD}{CA}$,这样问题就成为要证$\dfrac{BD\cdot BE}{BA}=\dfrac{CE\cdot CD}{CA}$,而已知 $BD=CD$,所以上式又简化为$\dfrac{BE}{BA}=\dfrac{CE}{CA}$,而已知 AE 是角平分线,所以应用三角形角平分线的性质就可以得到以上结论,分析也就可以完成.

例 44 已知:两等圆$\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于 A、B,C 是 AB 的中点,过 C 任作一割线交两圆于 E、F. 求证:$CE=CF$.

分析:由于$\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于 A、B,所以就要应用相交两圆的性质:连心线垂直平分公共弦. 于是连结 O_1O_2 后,可得 O_1O_2 必定经过公共弦 AB 的中点 C. 且由$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 是等圆,又可证明 $O_1C=O_2C$.

现在问题是要证 $CE=CF$,而我们已证明 O_1O_2 和 EF 在 C 点相交,这样就出现了 O_1C 和 O_2C,EC 和 FC 这两组相等线段都是

位于一组对顶角，即$\angle O_1CE$和$\angle O_2CF$的两边，且成一直线，从而就可添加中心对称型的全等三角形进行证明. 添加的方法是将这四个端点两两连结起来组成全等三角形. 于是连结O_1E和O_2F，则$\triangle O_1EC$和$\triangle O_2FC$就是一对中心对称型全等三角形. 由于O_1E和O_2F是等圆的半径，当然相等，且已证$O_1C=O_2C$和$\angle O_1CE=\angle O_2CF$，同时又有$O_1E>O_1C$，$O_2F>O_2C$，所以出现了两边以及大边对角对应相等，于是这两个三角形全等就可以证明.

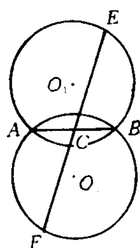


图 5·149

当然，在上述分析中是应用了两边以及大边对角对应相等的判定全等三角形的方法. 假如仍然要用基本的判定定理，那末由O_1C和O_2C这两条相等线段仍然是位于一组对顶角的两边，而且成一直线，所以仍然可以添加中心对称型全等三角形进行证明. 添加的方法也还是过端点作平行线，于是可选取与EF垂直的方向作为平行线的方向，也就是过O_1、O_2分别作EF的垂线，如设垂足为G、H，那末立即可以得到$\triangle O_1CG$和$\triangle O_2CH$是一对中心对称型的全等三角形，其全等的条件是$O_1C=O_2C$、$\angle O_1CG=\angle O_2CH$和$\angle O_1GC=\angle O_2HC=90°$，于是$CG=CH$，$O_1G=O_2H$. 因此在$\triangle O_1EG$和$\triangle O_2FH$中，由$O_1G=O_2H$，$O_1E=O_2F$，$\angle O_1GE=\angle O_2HF=90°$，可得这两个三角形也是一对中心对称型全等三角形，于是由$GE=HF$，就可以证明$CE=CF$.

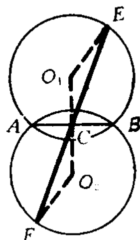


图 5·150

例 45 已知：$\triangle ABC$内接于$\odot O$，AD、BE是高，H是垂心，过B、H、C三点作$\odot O'$，M是BC的中点，延长AM交$\odot O'$于N. 求证：$AM=MN$.

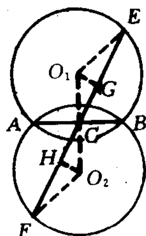


图 5·151

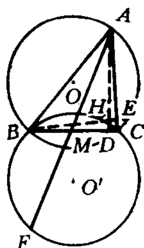


图 5·152

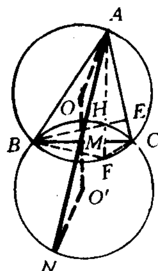


图 5·153

分析:由于 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心和 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆,就可应用三角形垂心的性质,也就是三角形的垂心关于三角形的边的对称点必定在三角形的外接圆上的性质进行证明. 于是可先作出 H 关于 BC 边的对称点,也就是延长 AD 交 $\odot O$ 于 F,就应有 $DH=DF$. 这是由 AD、BE 是 $\triangle ABC$ 的高,可得 $\angle ADC=\angle BEC=90°$,$H$、$D$、$C$、$E$ 四点共圆,$\angle BHD=\angle ACB$. 而由 A、B、F、C 四点共圆,又可得连结 BF 后,有 $\angle BFH=\angle ACB$. 所以 $\angle BHF=\angle BFH$,$BH=BF$,从而就可得 $DH=DF$.

现在再由条件 $BC\perp FH$,就出现了 BC 是 FH 的垂直平分线,所以连结 CH、CF 后,又有 $CH=CF$. 这样 $\triangle BCH$ 和 $\triangle BCF$ 就是一对轴对称型的全等三角形,从而有这两个全等三角形的外接圆一定相等;而由 A、B、F、C 四点共圆又可知 $\triangle BCF$ 的外接圆就是 $\triangle ABC$ 的外接圆,所以 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 是等圆. 这时 M 就成为公共弦 BC 的中点,而 AN 是过 M 点的割线,所以根据两等圆相交的性质,连结 OO' 后,OO' 必定过 M 点,且 $OM=O'M$;那末进一步连结 OA 和 NO' 后,可证明 $\triangle OAM$ 和 $\triangle O'NM$ 是一对中心对称型全等三角形,所以 $AM=MN$ 就可以证明.

第三节　旋转型

【分析方法导引】

如果几何问题中出现了两个具有公共顶点的等边三角形或正方形时，就可以想到要应用旋转型全等三角形的基本图形进行证明. 接下来就应找出全等三角形，方法就是从公共顶点(也就是旋转中心)出发，在两个等边三角形或正方形中，选定两条边，然后两两组成全等三角形. 如全等三角形尚未出现的话，可将两组端点分别连结起来，组成全等三角形. 再进一步就可应用旋转型全等三角形的基本图形的性质来完成分析. 这时应注意应用两个圆周角的基本图形的性质，因为在全等三角形的两组相等的对应角中，一组可构成同弧所对的圆周角，一组可构成圆内接四边形的外角和内对角.

以上的分析方法可推广应用到任意正多边形.

如果几何问题中出现了由一点发出的两组夹成等角的相等线段时，一般是由两组从一点发出的相等线段出发，然后判断它们两两的夹角是否可能相等，若能断定等量关系，就应想到要应用旋转型全等三角形进行证明. 然后就将这两组相等线段两两组成全等三角形，并进而完成分析.

如果几何问题中出现了过正方形的一个顶点向过它的相邻顶点的一条直线所作的垂线时，就可以想到要应用绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 然后就应找全等三角形，方法是从已知的

这个正方形的顶点的对角顶点向同一条直线作垂线，就可找到全等三角形，再进一步就可以应用直角三角形的性质，特点是在直角的两边外侧的两个锐角互余的性质来完成分析.

例 46 已知：$\triangle ABC$ 中，以 AB、BC、AC 为边在 BC 的同旁作等边 $\triangle ABD$，等边 $\triangle ACE$，等边 $\triangle BCF$. 求证：四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

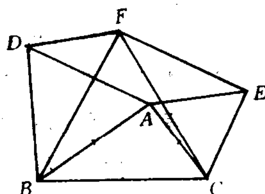


图 5・154

分析：本题条件中出现了三个等边三角形，且两两有一个公共顶点，所以每两个等边三角形都可以得到一对旋转型的全等三角形，因此在这个图形中一共出现三对旋转型的全等三角形，它们都可以用由公共顶点发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法找到.

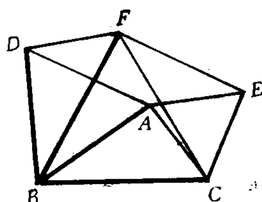


图 5・155

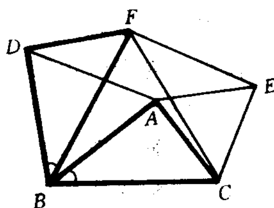


图 5・156

如取以点 B 为公共顶点的等边 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCF$，则由 B 发出的两组相等线段是 BD、BA、BF、BC，它们两两组成的全等三角形是 $\triangle BDF$ 和 $\triangle BAC$，全等的条件是 $BD=BA$，$BF=BC$，它们的夹角 $\angle DBF$ 和 $\angle ABC$ 都等于旋转角 $60°$ 减去公共部分 $\angle ABF$，从而就可证明 $DF=AC$. 而已知 $AC=AE$，所以 $DF=AE$. 根据同样的道理可以证明 $AD=EF$，所以四边形 $AEFD$ 就是平行四边形.

例 47 已知：P 是等边 $\triangle ABC$ 内的一点，以 PB、PC 为边向

BC 所在的一侧作等边$\triangle PBD$、$\triangle PCE$. 求证：$PA=DC=EB$.

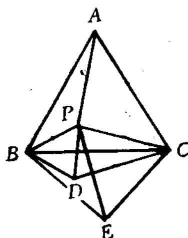


图 5・157

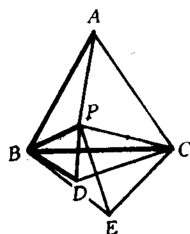


图 5・158

分析：本题的条件中出现了三个等边三角形，且它们两两有一个公共顶点，从而可应用旋转型全等三角形进行证明. 由于等边$\triangle PBD$和等边$\triangle ABC$具有公共顶点B，所以由B点发出的两组相等线段就是BA、BC和BP、BD，那末由它们两两组成的全等三角形就是$\triangle BAP$和$\triangle BCD$，全等的条件就是$BA=BC$，$BP=BD$以及它们的夹角，即$\angle ABP$和$\angle CBD$都等于旋转角$60°$减去公共部分$\angle PBC$. 从而就可证得$PA=DC$.

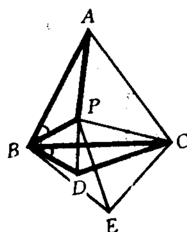


图 5・159

而由等边$\triangle PCE$和等边$\triangle ACB$具有公共顶点C，根据同样的道理又可得$\triangle ACP\cong\triangle BCE$，$PA=EB$，从而即可证明结论.

如果我们考虑等边$\triangle PBD$和等边$\triangle PEC$具有公共顶点P，那末由P点发出的两组相等线段就是PB、PD和PE、PC，它们两两组成的全等三角形就是$\triangle PBE$和$\triangle PDC$，全等的条件就是$PB=PD$，$PE=PC$，它们的夹角，即$\angle BPE$和$\angle DPC$都等于旋转角$60°$加上公共部分$\angle DPE$，从而也可证明$BE=DC$，分析也可以完成.

例 48　已知：$\triangle ABC$中，以AB、AC为边向外作等边$\triangle ABD$

和等边$\triangle ACE$. 求证:$CD=BE$.

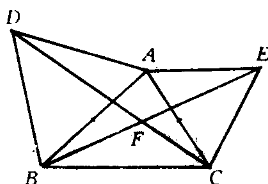


图 5・160

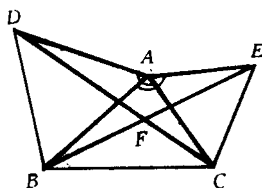


图 5・161

分析:在本题的条件中,出现了两个以 A 为公共顶点的等边$\triangle ABD$ 和等边$\triangle ACE$,从而就出现了一对旋转型的全等三角形.根据由公共顶点 A 发出的两组相等线段 AD、AB 和 AC、AE 两两组成全等三角形的方法,可找到这一对全等三角形应是$\triangle ADC$ 和$\triangle ABE$. 全等的条件是 $AD=AB$、$AC=AE$,它们的夹角$\angle DAC$ 和$\angle BAE$ 都等于旋转角 60°加上公共部分$\angle BAC$,因此 $CD=BE$ 就可以证明.

例 49 已知:$\triangle ABC$ 中,以 AB、AC 为边向外作等边$\triangle ABD$ 和等边$\triangle ACE$,CD、BE 相交于 F. 求证:AF 平分$\angle DFE$.

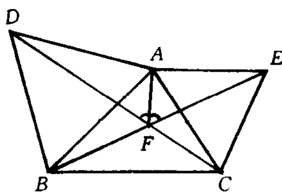


图 5・162

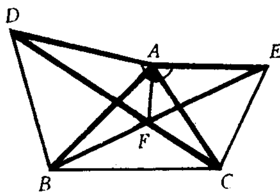


图 5・163

分析:本题的条件中,出现了两个以 A 为公共顶点的等边$\triangle ABD$ 和等边$\triangle ACE$,从而就出现了一对旋转型全等三角形.根据由公共顶点发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法,可找到这对全等三角形应是$\triangle ADC$ 和$\triangle ABE$. 全等的条件是 AD

$=AB$，$AC=AE$ 和 $\angle DAC=\angle BAE=60°+\angle BAC$. 在证明了 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABE$ 是一对旋转型全等三角形以后，由于在旋转型全等三角形的基本图形中，必定同时出现两个圆内接四边形，所以就可由 $\triangle ADC\cong\triangle ABE$，推得 $\angle ADF=\angle ABF$，从而又可进一步推得

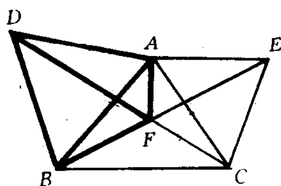


图 5・164

A、D、B、F 四点共圆，$\angle AFD=\angle ABD=60°$，而由 B、F、E 成一直线，又可证 $\angle AFE=\angle ADB=60°$，所以结论可以证明.

本题在证明了 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABE$ 是一对旋转型全等三角形以后，由于结论中出现的 AF 可以看作是 $\triangle ADC$ 中的一条线段，故当 $\triangle ADC$ 绕 A 旋转 $60°$ 到 $\triangle ABE$ 的位置时，AF 也应随 $\triangle ADC$ 的旋转而绕 A 旋转 $60°$ 到达 $\triangle ABE$ 中的对应位置，如果 F 点落到

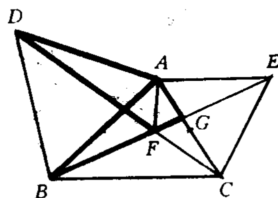


图 5・165

了 G 点上，则必有 $BG=DF$，所以可在 BE 上截取 $BE=DF$，并连结 AG，那就可得 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ABG$ 也是一对旋转型全等三角形，全等的条件是 $AD=AB$，$\angle ADF=\angle ABG$ 和 $DF=BG$，$\angle AFD=\angle AGB$，$AF=AG$，而这是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，应用等腰三角形的性质又可得 $\angle AFG=\angle AGB$，从而也就可以证明 $\angle AFD=\angle AFG$.

例 50 已知：以 $\triangle ABC$ 的三边为边向外作等边 $\triangle ABD$、等边 $\triangle ACF$ 和等边 $\triangle BCE$，CD、BF 相交于 G.

求证：A、G、E 共线且 $CD=BF=AE$.

分析：本题要证明 A、G、E 共线，所以可根据三个点成一直线的定义，将 A、G、E 三点分两次连结，然后证明 $\angle AGD+\angle DGB+\angle BGE=180°$. 由于条件中出现了 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACF$ 是具有公共

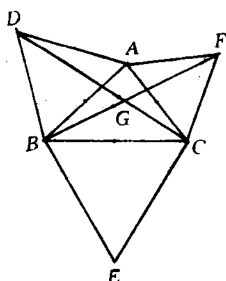


图 5・166

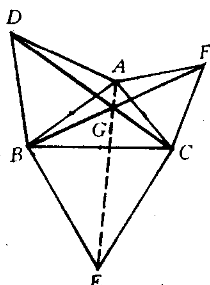


图 5・167

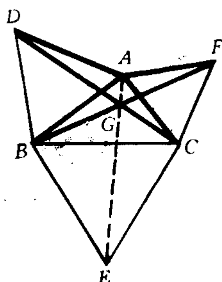


图 5・168

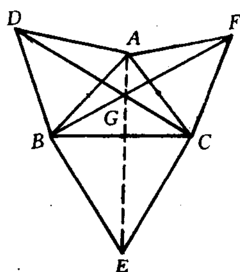


图 5・169

顶点 A 的等边三角形，所以就出现了一对旋转型全等三角形，根据由公共顶点 A 发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法，就可找到这对全等三角形是$\triangle ADC$ 和$\triangle ABF$. 全等的条件是 $AD=AB$，$AC=AF$ 和$\angle DAC=\angle BAF=60°+\angle BAC$. 于是就有$\angle ADG=\angle ABG$，$A$、$D$、$B$、$G$ 四点共圆，$\angle AGD=\angle ABD=60°$，$\angle DGB=\angle DAB=60°$. 又因为 D、G、C 成一直线，就出现了$\angle DGB$ 是四边形 $BECG$ 的一个外角，而$\angle BEC=60°$，所以就有$\angle DGB=\angle CEB$，B、E、C、G 四点共圆，从而也就可以证明$\angle BGE=\angle BCE=60°$，并可进一步证明 A、G、E 共线.

由于条件中还给出$\triangle BCE$ 也是等边三角形，且它分别与等边

$\triangle ABD$ 和等边$\triangle ACF$ 有公共的顶点 B 和 C. 所以又可以分别组成一对旋转型全等三角形. 根据由公共顶点发出的两组相等线段两两组成全等三角形,就可以找到这两对全等三角形是$\triangle DBC$ 和$\triangle ABE$,$\triangle BCF$ 和$\triangle ECA$. 那末在证明了其中的一对全等以后,就可证明 $CD=BF=AE$.

本题在连结 AG、EG,并证明了$\triangle ADC\cong\triangle ABF$ 后,也可以

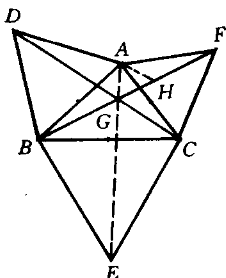


图 5 · 170

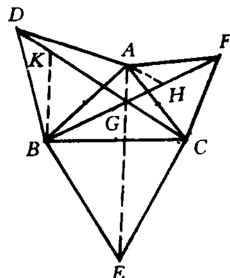


图 5 · 171

考虑在$\triangle ADC$ 中的线段 AG 随着$\triangle ADC$ 绕 A 点旋转到达$\triangle ABF$ 中的对应位置,所以在 BF 上截取 $BH=DG$,并连结 AH,则由 $AD=AB$, $\angle ADG=\angle ABH$ 和 $DG=BH$,就可得$\triangle ADG\cong\triangle ABH$,$AG=AH$,$\angle AGD=\angle AHB$,$\angle DAG=\angle BAH$,又因为 $\angle DAB=\angle DAG-\angle BAG=60°$,所以 $\angle GAH=\angle BAH-\angle BAG$ 也等于 $60°$,因而$\triangle AGH$ 也是等边三角形,所以$\angle AGD=\angle AHB=\angle AGH=60°$. 而已知 B、G、F 成一直线,从而就可得 $\angle DGB=180°-60°-60°=60°$. 这样要证明 A、G、E 成一直线,就转化成要证$\angle BGE=60°$.

由于条件中给出$\triangle BCE$ 是等边三角形,且已证明$\angle BGD=60°$,GB 的端点 B 就是$\triangle BCE$ 的顶点,所以可添加 $60°$角的特殊角三角形,在本题中也就是可直接添加等边三角形进行证明. 于是在 GD 上截取 $GK=BK$,并连结 BK,即可证明$\triangle BGK$ 是等边三角

形. 这样就又出现了$\triangle BGK$和$\triangle BEC$是两个具有公共顶点B的等边三角形，所以又可以得到一对旋转型全等三角形. 而现在由公共顶点发出的两组相等线段是BE、BC和BG、BK，它们两两组成的全等三角形就是$\triangle BEG$和$\triangle BCK$，而全等的条件就是$BE=BC$，$BG=BK$以及它们的夹角，$\angle EBG=\angle CBK$都等于$60°+\angle CBG$，从而就可证明$\angle BGE=\angle BKC=60°$，也就可以证明$A$、$G$、$E$成一直线. 接下来就可以通过证明$\triangle BDC\cong\triangle BAE$或$\triangle CEA\cong\triangle CBF$来证得$CD=BF=AE$.

例 51 已知：D是$\triangle ABC$内的一点，且$\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=120°$，$P$是$\triangle ABC$内的任一点. 求证：$AD+BD+CD\leqslant PA+PB+PC$.

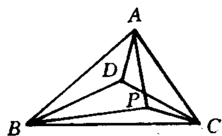


图 5·172

分析：本题结论中出现的$AD+BD+CD$是线段和的关系，所以可根据线段的和的定义，将这三条线段接起来. 如果考虑将AD、CD接到BD上去，则可将AD接到BD上，也就是延长BD到E，使$DE=AD$，由于这是两条具有公共端点的相等线段，所以它们可组成一个等腰

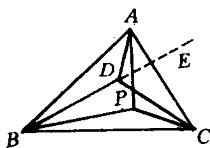


图 5·173

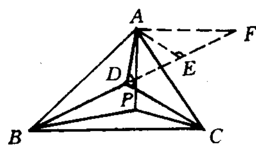


图 5·174

三角形，于是连结AE，但由于$\angle ADB=120°$，且B、D、E成一直线，所以有$\angle ADE=60°$，这样就可得$\triangle ADE$实际上是一个等边三角形.

接下来的问题就是再将CD接上去，于是再延长BE到F，使$EF=CD$. 但由$\triangle ADE$是等边三角形，又可得$AD=AE$，且

$\angle AED=60°$，而 B、E、F 也成一直线，所以$\angle AEF=120°$，也就可得$\angle ADC=\angle AEF$，这样就出现了两边和夹角对应相等的条件，从而就构成$\triangle ADC$ 和$\triangle AEF$ 是一对旋转型全等三角形，于是连结 AF，就可得$\triangle ADC\cong\triangle AEF$.

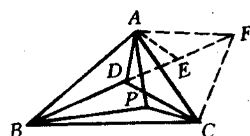


图 5・175

现在由 A 点发出的一组相等线段组成了等边$\triangle ADE$，所以另一组相等线段 AC 和 AF 必定也组成等边三角形，所以连结 CF. 就可由$\triangle ADC\cong\triangle AEF$，推得 $AC=AF$，$\angle DAC=\angle EAF$，但$\angle DAC+\angle CAE=\angle DAE=60°$，所以$\angle CAF=\angle EAF+\angle CAE$ 也等于 $60°$，从而也就证明了$\triangle ACF$ 也是等边三角形.

由于对$\triangle ABC$ 来说，B 是一个确定的点，而 AC 确定后，F 也是一个确定的点，所以以上的结果表明 $AD+BD+CD$ 实质上就

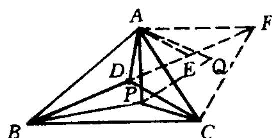


图 5・176

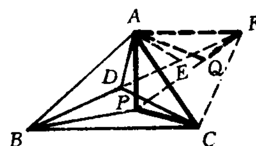


图 5・177

是连结两个确定的点 B、F 之间的线段，所以应用线段的性质，要证明结论就只要证明将 PA、PB、PC 接起来是连结 B、F 这两点之间的一条折线. 于是在图形中保持 BP 不动，而先将 PA 接过来. 由于在前述分析中，将 AD 接到 BD 上时，实质上是通过一个等边三角形来进行的，所以将 PA 接过来时，也可以同样地通过一个等边三角形来进行，于是以 PA 为边作等边$\triangle APQ$，则 AP 就成为 PQ. 但在作出了等边$\triangle APQ$ 后，由于我们已证$\triangle ACF$ 也是等边三角形，这样就出现了两个以 A 为公共顶点的等边三角形，就又可以得到一对旋转型全等三角形. 根据由公共顶点 A 发出的两

组相等线段 AP、AQ 和 AC、AF 两两组成全等三角形的方法可以找到这对三角形应是$\triangle APC$ 和$\triangle AQF$，于是应连结 QF，全等的条件就是这两组边对应相等，且它们的夹角$\angle PAC$ 和$\angle QAF$ 也相等，都等于旋转角 60°减去公共部分$\angle CAQ$，从而就有 $CP=FQ$，$AP+BP+CP=BP+PQ+QF$，所以结论可以证明，而其中的等号只能在 P 点与 D 点重合时成立.

例 52 已知：C 是 AB 上的一点，以 AC、BC 为边在 AB 的同侧作等边$\triangle ACD$ 和等边$\triangle BCE$，AE、BD 与 CD、CE 相交于 F、G. 求证：$CF=CG$.

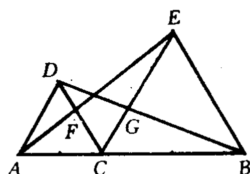


图 5・178

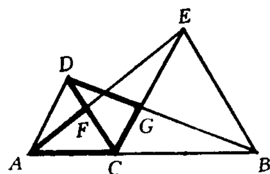


图 5・179

分析：本题条件中给出$\triangle ACD$、$\triangle BCE$ 是等边三角形，且它们具有公共顶点 C，所以可组成一对旋转型全等三角形. 现在由公共顶点发出的两组相等线段是 CA、CD 和 CE、CB，它们两两组成的全等三角形就是$\triangle ACE$ 和$\triangle DCB$，全等的条件是 $CA=CD$，$CE=CB$ 以及它们的夹角$\angle ACE=\angle DCB$，都等于旋转角 60°加上公共部分 60°，也就是都等于 120°.

本题要证的结论是 $CF=CG$，这是两条具有公共端点的相等线段，所以可组成一个等腰三角形，又因为 A、C、B 成一直线，从而又可得$\angle DCE=60°$，所以这个三角形不仅是等腰三角形，而且是一个等边三角形. 而这个等边三角形与等边$\triangle ACD$ 或等边$\triangle BCE$ 又都有一个公共顶点 C，从而又可分别组成一对旋转型全等三角形. 如果由公共顶点 C 发出的两组相等线段选取 CA、CD

和 CF、CG，则这对全等三角形就是 $\triangle ACF$ 和 $\triangle DCG$，在讨论全等条件时，CF 和 CG 相等由于是结论，不能用，这样就可以取 $AC=DC$，$\angle ACF=\angle DCG=60°$，还需要的一个条件就可以取由 $\triangle ACE \cong \triangle DCB$ 后得到的 $\angle CAF=\angle CDG$，所以结论就可以证明. 如果由公共顶点 C 发出的两组相等线段选取 CF、CG 和 CE、CB，则这时的全等三角形就是 $\triangle CFE$ 和 $\triangle CGB$，然后可用类似的方法完成分析.

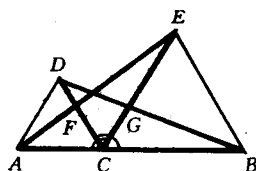


图 5・180

本题要证明 $CF=CG$，而由条件 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 都是等边三角形，所以 $\angle ACD=\angle ABE=60°$，也就可得 $CD /\!/ BE$，这样结论中出现的线段 CF 就成为 $\triangle ABE$ 内一条边 BE 的平行线段，所以就可以应用平行线型相似三角形进行证明. 于是由 $CF /\!/ BE$，可得 $\triangle ACF \backsim \triangle ABE$，$\frac{CF}{BE}=\frac{AC}{AB}$，$CF=\frac{AC \cdot BE}{AB}=\frac{AC \cdot BC}{AC+BC}$. 根据同样的道理还可得 $\triangle BCG \backsim \triangle BAD$，$\frac{CG}{AD}=\frac{BC}{AB}$，也可证得 $CG=\frac{AC \cdot BC}{AC+BC}$，从而也可以完成分析.

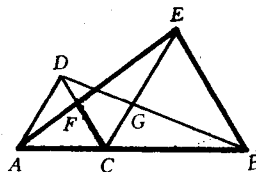


图 5・181

例 53 已知：C 是线段 AB 上的一点，$\triangle ACD$、$\triangle BCE$、$\triangle ABF$ 是等边三角形，AE、BD 相交于 G. 求证：$AE=BD=CF$，且 G、C、F 共线.

分析：本题条件中出现了三个等边三角形，且每两个三角形都有一个公共顶点，所以两两可组成三对旋转型全等三角形. 若取等边 $\triangle ACD$ 和等边 $\triangle ABF$，则由公共顶点 A 发出的两组相等线段就是 AD、AC 和 AB、AF，它们两两组成的全等三角形就是

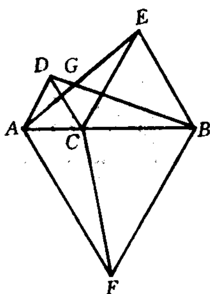


图 5·182

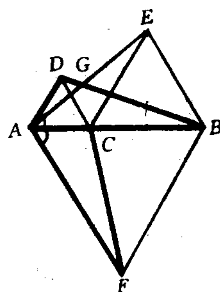


图 5·183

$\triangle ADB$ 和 $\triangle ACF$，全等的条件就是 $AD=AC$、$AB=AF$，$\angle DAB=\angle CAF=60°$，所以就可得 $BD=FC$. 根据同样的道理，如取具有公共顶点 B 的等边 $\triangle BEC$ 和等边 $\triangle BAF$，则可证 $\triangle BEA\cong\triangle BCF$，$AE=FC$，所以结论可以证明.

如果考虑取具有公共顶点 C 的等边 $\triangle ACD$ 和等边 $\triangle BCE$，则可证 $\triangle ACE\cong\triangle DCB$，$AE=DB$. 从而也可证明结论.

接下来的问题是要证 G、C、F 共线，所以可根据三点成一直线的定义，将 G、C 连结后，证明 $\angle GCA+\angle ACF=180°$. 由于我们已证 $\triangle ADB\cong\triangle ACF$，$\angle ACF=\angle ADB$，所以问题就成为要证 $\angle GCA+\angle ADG=180°$，从而又出现了要证 G、C、A、D 四点共圆. 而由 $\triangle ACE\cong\triangle DCB$ 和 $\angle CAG=\angle CDG$，这个性质就可以证明.

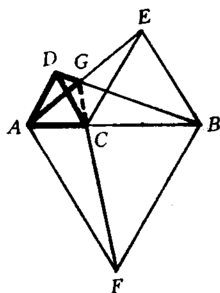


图 5·184

本题在连结 CG，并成为要证 $\angle GCA+\angle ACF=180°$以后，也可以考虑由于 GC 应是 FC 的延长线，所以在证明了 $\triangle ACF$ 和 $\triangle ADB$ 是一对旋转型全等三角形以后，当 $\triangle ACF$ 绕顶点 A 旋转 60°到达 $\triangle ADB$ 的位置

时，CG 也就应随$\triangle ACF$ 的旋转而绕 A 点旋转 60°而到达 BD 的延长线上的位置 DH，这样就出现了$\triangle ACG$ 和$\triangle ADH$ 应是一对旋转型全等三角形，且$\triangle ACD$ 是等边三角形，所以$\triangle AGH$ 也应是一个等边三角形. 于是作图时也可根据等边三角形来进行，也就是延长 BD 到 H，使 $GH=GA$，并连结 AH. 然后应先证$\triangle AGH$ 是等边三角形.

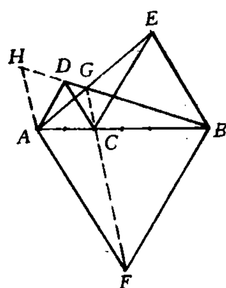


图 5・185

由于我们已证$\triangle ACE\cong\triangle DCB$，是一对绕顶点 C 旋转 60°的全等三角形，所以它们的对应边的交角应都等于 60°，从而 AE 和 DB 的交角也应等于 60°，也就是$\angle AGD=60°$. 具体的分析也可以是：在 DB 上截取 $DK=AG$，并连结 CK，则由 $CA=CD$，$\angle CAG=\angle CDK$ 和 $AG=DK$，可得$\triangle ACG\cong\triangle DCK$，$CG=CK$，$\angle AGC=\angle DKC$，$\angle ACG=\angle DCK$，而$\angle ACD=\angle ACG-\angle DCG=60°$，所以$\angle GCK=\angle DCK-\angle DCG$也等于 60°，$\triangle GCK$ 就是等边三角形，于是就$\angle AGC=\angle DKC=\angle CGK=60°$，也就可证明$\angle AGD=60°$. 这样也就证明了$\triangle AGH$是等边三角形.

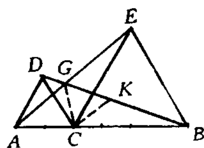


图 5・186

现在图形中就出现了$\triangle AGH$ 和$\triangle ACD$ 是两个具有公共顶点 A 的等边三角形，所以也就得到了一对旋转型全等三角形，也就是由 $AH=AG$，$AD=AC$，$\angle HAD=\angle GAC$ 都等于旋转角 60°减去公共部分$\angle DAG$，可得$\triangle HAD\cong\triangle GAC$，$\angle ADH=\angle ACG$. 而$\angle ADH+\angle ADB=\angle ADH+\angle ACF=180°$，所以$\angle ACG+\angle ACF=180°$也就可以证明.

例 54 已知：以▱$ABCD$ 的邻边 BC、CD 为边，向平行四边

形所在的一侧作等边$\triangle BCE$和等边$\triangle CDF$. 求证:$\triangle AEF$是等边三角形.

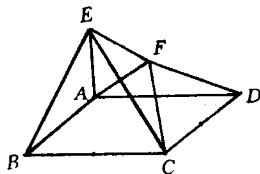


图 5・187

分析:本题要证明$\triangle AEF$是等边三角形,而已知$\triangle BCE$是等边三角形,所以就出现了两个具有公共顶点E的等边三角形,从而就可得到一对旋转型全等三角形,也就是$\triangle AEB$和$\triangle FEC$. 由于现在等边$\triangle AEF$是要证明的结论,所以就应先证这两个三角形全等. 由条件$EB=EC$,而$EA=EF$是要证明的结论,不能用,所以要另证两个性质. 由条件四边形$ABCD$是平行四边形,$AB=DC$,而$DC=CF$,所以有$AB=FC$,这样第三个条件只能是证它们的夹角相等,也就是要证$\angle EBA=\angle ECF$. 由于$\angle EBC=60°$,于是$\angle EBA=60°-\angle ABC$,从而应证$\angle ECF$也等于$60°-\angle ABC$. 而$\angle ECF=\angle BCD-\angle BCE-\angle DCF=\angle BCD-120°$,这样问题又成为要证$60°-\angle ABC=\angle BCD-120°$,也即要证$\angle ABC+\angle BCD=180°$,由于$AB/\!/DC$,这个性质是可以证明的. 如果在证明$\angle ECF=60°-\angle ABC$时,考虑应用平行线的性质,那末延长$BC$到$G$,可得$\angle DCG=\angle ABC$,而$\angle ECF=180°-60°-60°-\angle DCG$,所以$\angle ECF=60°-\angle ABC$,性质也可以证明.

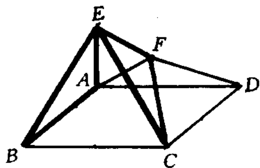


图 5・188

在证明了$\triangle AEB\cong\triangle FEC$后,就可得$AE=FE$,$\angle BEA=\angle CEF$,而$\angle BEC=\angle BEA+\angle AEC=60°$,所以$\angle AEF=\angle CEF+\angle AEC$也等于$60°$,从而完成分析.

例 55 已知:P是等边$\triangle ABC$的外接圆的$\overset{\frown}{BC}$上的任一点. 求证:$PA=PB+PC$.

分析:本题要证明的结论$PA=PB+PC$,是要证明一条线段

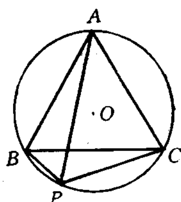


图 5・189

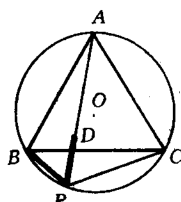


图 5・190

等于两条线段的和，所以可根据线段和或差的定义，在 PA 上先将 PB 或 PC 截去，或者先将 PB 和 PC 接起来.

若考虑在 PA 上截取 $PD=PB$，则应证明所剩的线段 DA 和 PC 相等. 由于 PB 和 PD 是两条具有公共端点的相等线段，所以可组成等腰三角形. 于是连结 BD. 又因为条件中给出 A、B、P、C 四点共圆，所以 $\angle BPD=\angle BCA=60°$，从而就可得 $\triangle PBD$ 是等边三角形. 这样又出现了 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBP$ 是两个以 B 为公共顶点的等边三角形，所以就出现了一对旋转型全等三角形. 根据由公共顶点 B 发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法，可以发现这对全等三角形应是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBP$，全等的条件是 $BA=BC$，$BD=BP$，$\angle ABD=\angle CBP$ 都等于旋转角 60°减去公共部分 $\angle CBD$，所以 $DA=PC$ 就可证明.

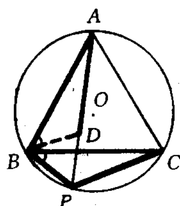


图 5・191

若考虑在 AP 上截取 $AD=PB$，则应证明所剩的线段 PD 和 PC 相等. 但这两条要证明的相等线段具有公共端点 P，所以可组成等腰三角形，于是连结 CD. 又因为 A、B、P、C 四点共圆，且 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以应用圆周

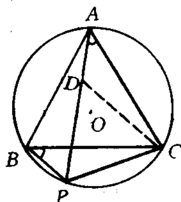


图 5・192

角的基本图形的性质又有$\angle CPD=\angle CBA=60°$. 这样$\triangle PCD$就应是一个等边三角形. 从而图形中又出现了两个具有公共顶点C的等边三角形，所以又可组成一对旋转型全等三角形. 根据由公共顶点C发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法，可找到这对全等三角形应是$\triangle ACD$和$\triangle BCP$. 由于现在$\triangle PCD$是等边三角形是要证明的结论，所以就应先证这两个三角形全等. 由条件$AC=BC$和所作的$AD=BP$，再根据A、B、P、C四点共圆得到的$\angle DAC=\angle PBC$，就可以证明这两个三角形全等，于是$DC=PC$，$\angle ACD=\angle BCP$. 而$\angle ACD+\angle DCB=\angle ACB=60°$，所以$\angle PCD=\angle BCP+\angle DCB$也等于$60°$，$\triangle PCD$是等边三角形，从而也就证得$PC=PD$.

现在我们讨论根据线段和的定义而将PB和PC接起来的情况. 如考虑将PB接到PC上去，那么在将PB接到PC的哪一个方向的延长线上又会出现两种可能情况.

如考虑将PB接到CP的延长线上. 则延长CP到D，使$PD=PB$，则问题就应证$PA=CD$. 但在作出$PD=PB$后，就出现了这是两条具有公共端点P的相等线段，它们就可组成一个等腰三角形，于是连结BD. 又因为A、B、P、C四点共圆，且C、P、D成一直线，那末应用圆内接四边形的基本图形的性质可得$\angle BPD=\angle BAC=60°$，所以等腰三角形$PBD$就成为一个等边三角形. 这样图形中就出现了$\triangle BPD$和$\triangle BAC$是两个具有公共顶点$B$的等边三角形，从而也就出现一对旋转型的全等三角形. 根据由公共顶点B发出的两组相等线段BD、BP和BC、BA两两组成全等三角形的方法可以找到这一对全等三角形应是$\triangle BPA$和$\triangle BDC$，它们全等的条件是$BA=BC$，$BP=BD$，$\angle PBA=\angle DBC$都等于旋转角$60°$加上公共部分$\angle PBC$，在证明

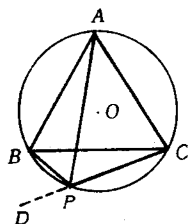


图 5・193

了这两个三角形全等后，就可得 $PA=CD$.

如将 PB 接到 PC 的延长线上，则延长 PC 到 D 使 $CD=PB$，那末只须证明 $PD=PA$. 由于这两条要证明相等的线段具有公共的端点 P，所以可组成一个等腰三角形，于是连结 AD，又因为 A、B、P、C 四点共圆和 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $\angle APC=\angle ABC=60°$，因此 $\triangle APD$ 又应是一个等边三角形，这样又出现了两个以 A 为公共顶点的等边三角形，所以又构成一对旋转型全

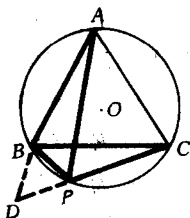


图 5・194

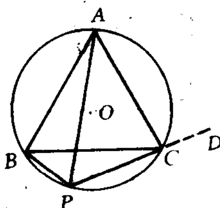


图 5・195

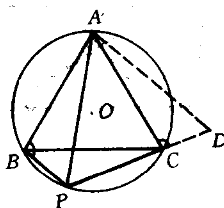


图 5・196

等三角形. 根据由公共顶点 A 发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法，可得这对全等三角形是 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACD$，但由于 $AP=PD$ 和 $\triangle APD$ 是等边三角形都是尚未证明的结论，所以就要先证这两个三角形全等. 由条件 $AB=AC$ 和所作的 $BP=CD$，并根据 A、B、P、C 四点共圆和 P、C、D 成一直线所得到的 $\angle ABP=\angle ACD$. 就可证明这两个三角形全等. 于是 $AP=AD$，而 $\angle APD=60°$，所以 $\triangle APD$ 是等边三角形，这样就可证明结论.

例 56 已知：$l_1/\!/l_2/\!/l_3$，$\triangle ABC$ 是等边三角形，且 A、B、C 分别在 l_1、l_2、l_3 上，D 是 l_3 上的一点，$\angle ADC=30°$，$BE\perp AD$，垂足是 E. 求证：$AE=DE$.

分析：本题的条件中出现了 $\angle ADC=30°$，所以可添加特殊角

三角形进行证明，添加的方法是过特殊角一边上的点向另一边作垂线，于是过A作$AF\perp CD$，并设垂足是F，就可得$\angle DAF=60°$，$AD=2AF$. 而现在要证明$AE=DE$，就是$AD=2AE$，所以问题就转化成为要证$AF=AE$. 但这是两条具有公共端点A的相等线段，它们可组成一个等腰三角形，于是连结EF. 但我们已证$\angle EAF=60°$，所以

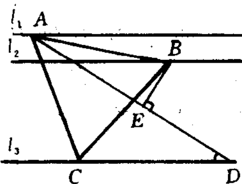


图 5・197

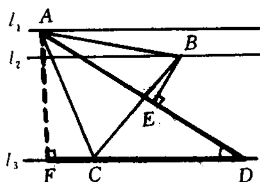


图 5・198

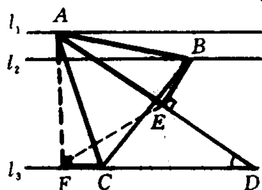


图 5・199

$\triangle AEF$应是一个等边三角形. 而条件中又给出$\triangle ABC$是等边三角形，从而又出现了两个具有公共顶点A的等边三角形，所以又可组成一对旋转型全等三角形，根据由公共顶点A发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法，可找到这对全等三角形应是$\triangle ABE$和$\triangle ACF$. 但由于$\triangle AEF$是等边三角形是要证明的结论，所以应先证这两个三角形全等. 于是由$\angle BEA=\angle CFA=90°$，$AB=AC$和$\angle BAE=\angle CAF$都等于旋转角$60°$减去公共部分$\angle CAE$，就可证明$\triangle ABE\cong\triangle ACF$，$AE=AF$，从而就可以完成分析.

例 57　已知：A、B、C、D、E、F是$\odot O$上的六点，$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$、$\triangle OEF$都是等边三角形，L、M、N分别是DE、AF、BC的中点. 求证：$\triangle LMN$是等边三角形.

分析：本题的条件中给出$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$是三个连续

的等边三角形，它们组成了半个正六边形. 而另一半中只有一个$\triangle OEF$是等边三角形，而这个等边三角形在位置上又没有确定的要求，或者也就是等腰$\triangle ODE$和$\triangle OAF$并没有大小上的确定的要求，所以$\triangle OEF$就可以绕O旋转，而对这个问题来说，那就是不论这个三角形旋转到什么位置，这个结论都是成立的. 而图形在一般位置上成立的性质，在特殊位置上是一定成立的. 而作为要证明的结论，图形在特殊位置上时由于有特殊的性质可应用，所以就可以首先加以证明. 于是将

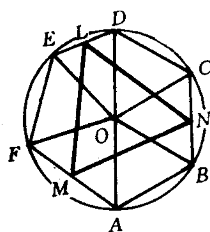


图 5・200

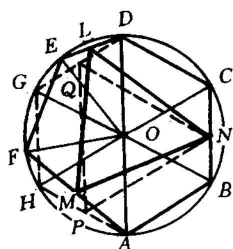


图 5・201

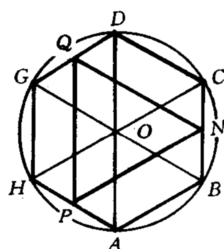


图 5・202

$\triangle OEF$旋转到圆内的一个特殊位置上，也就是将E、F也旋转到圆内接正六边形的顶点上，也就是延长BO、CO交$\odot O$于G、H，并连结DG、GH、HA，那末六边形$ABCDGH$就是圆的内接正六边形. 对这个正六边形来讲，结论当然也应该是成立的. 所以取DG和HA的中点Q、P，并连接NQ、QP、PN，则$\triangle NQP$也是一个等边三角形.

由于现在N、Q、P是正六边形不相邻的三边的中点，所以$\triangle NQP$是等边三角形是可以证明的. 这是因为NQ是等腰梯形$DGBC$的中位线，$DC /\!/ QN /\!/ GB$，$QN=\frac{1}{2}(DC+GB)=\frac{3}{2}R$. 根据

同样的道理可证 $QP=PN=\frac{3}{2}R$，所以 $\triangle NQP$ 是等边三角形.

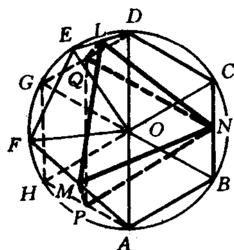


图 5・203

由于要证明的结论是$\triangle LMN$ 是等边三角形，而我们已经证明$\triangle PNQ$ 是等边三角形，这样就出现了两个以 N 为公共顶点的等边三角形，所以必定会构成一对旋转型全等三角形. 根据由公共顶点发出的两组相等线段两两构成全等三角形的方

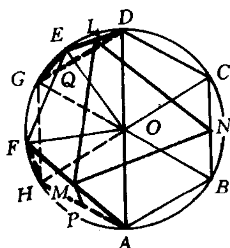


图 5・204

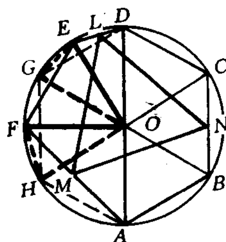


图 5・205

法，可找到这对全等三角形应是$\triangle MNP$ 和$\triangle LNQ$，于是连结 LQ、MP. 由于$\triangle LMN$ 是等边三角形是要证明的结论，所以就要先证这两个三角形全等. 现在已经出现的全等条件是 $PN=QN$，而 $LN=MN$ 是要证明的结论，所以要另外证明两个性质.

由于现在条件中出现了 L、M、N、Q、P 分别是 DE、AF、BC、DG、AH 的中点，是多个中点问题，所以就可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 L、Q 所在的线段 DE、DG 有公共端点 D，可以组成三角形，所以 LQ 这两个中点的连线就是三角形的中位线，而现在图形中是有中位线但三角形不完整，所以应将三角形的边添上，也就是连结 EG，即可得 $LQ/\!/EG$，$LQ=\frac{1}{2}EG$. 根据同样的道理，由 M、P 分别是 AF、AH 的中点，连结 PM 后，

又可得 $PM // HF, PM=\frac{1}{2}HF$. 由于这两组性质都与 LQ 和 MP 有联系，所以证明$\triangle LNQ$和$\triangle MNP$全等的第二个条件就应是证 $LQ=MP$，也就进一步成为要证 $EG=FH$. 然而在条件中还出现了$\triangle OGH$和$\triangle OEF$又是两个具有公共顶点 O 的等边三角形，所以又可以构成一对旋转型全等三角形. 根据由公共顶点 O 发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法，可得这对全等三角形应是$\triangle OEG$和$\triangle OFH$，全等的条件是 $OE=OF$，$OG=OH$，$\angle EOG=\angle FOH$ 都等于旋转角 60°减去公共部分$\angle GOF$，所以就有 $EG=FH$.

在证明了两组边对应相等以后，由于第三组边相等，即 $LN=MN$ 是要证明的结论，所以第三个条件只能证明它们的夹角相等，也就是应证$\angle LQN=\angle MPN$. 但我们已证明 $LQ // EG$，$QN // GB$，所以$\angle LQN=\angle EGB$. 根据同样的道理，又可得$\angle MPN=\angle FHC$，但在证明了$\triangle OEG\cong\triangle OFH$后，又有$\angle EGO=\angle FHO$，所以上述性质可以证明.

在证得$\triangle LNQ\cong\triangle MNP$后，就可得 $LN=MN$，$\angle LNQ=\angle MNP$，而已证$\angle QNP=\angle MNP+\angle QNM=60°$，所以就有$\angle LNM=\angle LNQ+\angle QNM$也等于 60°，所以$\triangle LMN$是等边三角形就可以证明.

本题的条件中出现了 L、M、N 分别是 DE、AF、BC 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 L、M、N 所在的线段 DE、AF、BC 没有公共端点，不能组成三角形，所以这三个中点两两之间的连线就不是三角形的中位线，这样就要增加中点，且应增加与已知中点所在的线段 DE、AF、BC 有

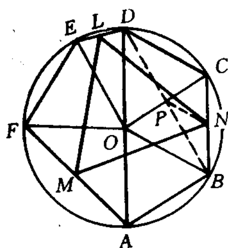


图 5・206

公共端点的线段的中点.

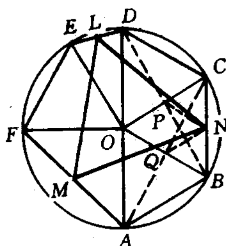


图 5・207

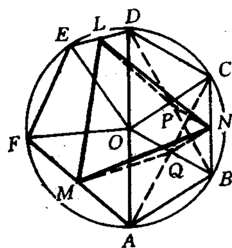


图 5・208

由条件△OAB、△OBC、△OCD 是三个连续的等边三角形，所以四边形 $OBCD$ 和 $OABC$ 都是菱形. 这样已知中点 L、N 所在的线段 DE、BC 的端点 D 和 B 就成为一个菱形的对角顶点，所以同时与 L、N 所在的线段有公共端点的线段就可以选取菱形的对角线 BD，于是连结 BD，且设 BD 交 OC 于 P，则应用菱形的性质就有 $DP=BP$. 现在就出现了 P 是 BD 的中点，而 N 是 BC 的中点，且 BD、BC 具有公共端点 B，可以组成三角形，所以 PN 这两个中

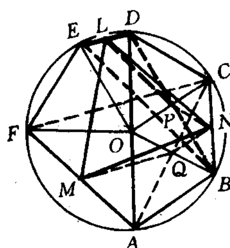


图 5・209

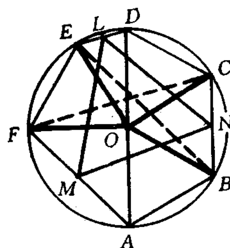


图 5・210

点的连线就是三角形的中位线，于是连结 PN，可得 $PN /\!/ DC$，且 $PN=\frac{1}{2}DC$. 根据同样的道理，连结 AC 交 BO 于 Q，并连结 QN

后，有 $QN \parallel AB$，$QN=\frac{1}{2}AB$. 但已知 $AB=CD$，所以 $PN=QN$，它们就是两条具有公共端点的相等线段，就可以组成一个等腰三角形. 又因为$\triangle OBC$ 是等边三角形，于是由 $PN \parallel DC \parallel OB$ 和 $QN \parallel AB \parallel OC$，可得$\angle PNQ=60°$，这样由 PN 和 QN 组成的等腰三角形就是一个等边三角形.

现在我们要证明的结论是$\triangle LMN$ 是等边三角形，这样就出现了两个具有公共顶点 N 的等边三角形，所以它们一定可以构成一对旋转型全等三角形，根据由公共顶点 N 发出的两组相等线段 NP、NQ 和 NL、NM 两两组成全等三角形的方法就可以找到这对全等三角形是$\triangle LNP$ 和$\triangle MNQ$，于是连结 LP 和 MQ. 由于这时$\triangle LMN$ 是等边三角形是要证明的结论，所以就应先证这两个三角形全等. 在这两个三角形中，已经证明 $NP=NQ$，而 $NL=NM$ 是要证的结论，所以还要另证两个性质. 由于条件中还给出 L 是 DE 的中点，且已证明 P 是 DB 的中点，DE、DB 有公共的端点 D，可以组成三角形，所以 LP 这两个中点的连线也是三角形的中位线，而现在的图形中是有中位线但三角形不完整，所以应将三角形的边添上，也就是连结 EB，就可得 $LP \parallel EB$，$LP=\frac{1}{2}EB$. 根据同样的道理，由 M、Q 分别是 AF、AC 的中点，连结 FC 后，可得 $MQ=\frac{1}{2}FC$，$MQ \parallel FC$. 由于这两组性质是和 LP、MQ 有联系，所以这对全等三角形的第二个全等条件就应证 $LP=MQ$，也就可证它们的两倍相等，即 $EB=FC$.

由于条件中还给出$\triangle OEF$ 是等边三角形，而$\triangle OBC$ 也是等边三角形，这样就又出现了两个具有公共顶点 O 的等边三角形，所以又可应用旋转型全等三角形进行证明. 现在由公共顶点 O 发出的两组相等线段是 $OE=OF$，$OB=OC$，且$\angle EOB=\angle FOC$ 都等于旋转角 60°加上公共部分$\angle COE$，所以$\triangle EOB \cong \triangle FOC$，$EB=FC$. 在证明了两组边对应相等以后，由于第三组边相等是结论，

所以只能证它们的夹角相等，也就是要证$\angle LPN=\angle MQN$．但由于$PN /\!/ OB$，$PL /\!/ BE$，所以$\angle LPN$与$\angle OBE$互补．根据同样的道理$\angle MQN$也与$\angle OCF$互补，而通过$\triangle EOB \cong \triangle FOC$可得$\angle OBE=\angle OCF$，所以$\angle LPN=\angle MQN$可以证明，从而也就证明了$\triangle LPN \cong \triangle MQN$，$NL=NM$，$\angle PNL=\angle QNM$，而$\angle PNQ=\angle PNM+\angle QNM=60°$，所以$\angle LNM=\angle PNM+PNL$也等于60°，分析也就可以完成。

例 58　已知：A、B、C、D、E、F是$\odot O$上的六点，$\triangle OAB$、$\triangle OCD$、$\triangle OEF$都是等边三角形，L、M、N分别是DE、AF、BC的中点．求证：$\triangle LMN$是等边三角形．

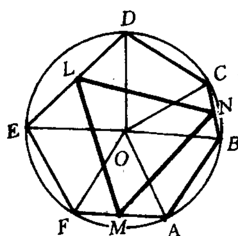


图 5・211

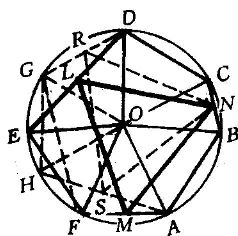


图 5・212

分析：本题条件中出现了三个不连续的等边三角形，而且并没有确定的位置上的要求，所以它们都可以绕圆心O旋转，而不论旋转到什么位置，这个结论又总是成立的，于是我们可先考虑将其中的一个旋转到一个特殊的位置上，于是将$\triangle OEF$旋转到$\triangle OGH$，使$\triangle ODG$也是等边三角形，也就是在$\odot O$上取点G、H，使$DG=GH=DO$，并连接DG、GH、HA和OG、OH，那末结论仍然是成立的，所以取DG、HA的中点R、S，并连结NR、RS、SN，$\triangle NRS$应是等边三角形．但由于现在图形中出现了$\triangle OCD$、$\triangle ODG$、$\triangle OGH$是三个连续的等边三角形，且$\triangle OAB$也是等边三角形，同时还给出了N、R、S分别是BC、DG、HA的中点，所以

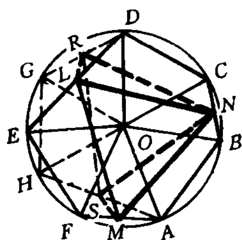


图 5・213

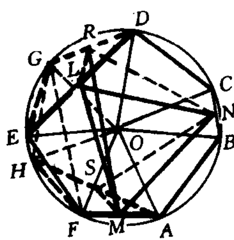


图 5・214

△NRS 是等边三角形是可以证明的(见例 57).

由于现在已经证明△NRS 是等边三角形,而△NLM 是要证明的等边三角形,且它们有公共的顶点 N,所以就可构成一对旋转型全等三角形.现在由公共顶点 N 发出的两组相等线段就是 NR、NS 和 NL、NM,它们两两组成的一对全等三角形就应是△NRL 和△NSM,于是应先连结 RL、SM.在这两个三角形中,已经出现的条件是 $NR=NS$,所以还要再证明两个性质.

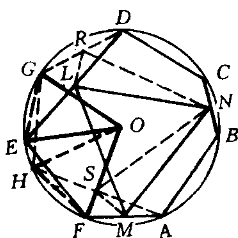


图 5・215

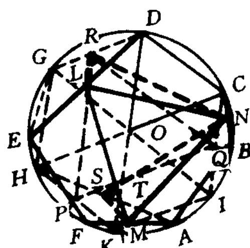


图 5・216

由于现在 R、L、S、M 分别是 DG、DE、AH、AF 的中点,出现了多个中点,所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明.由于 R、L 所在的线段 DG、DE 具有公共端点 D,可以组成三角形,所以 RL 这两个中点的连线就是三角形的中位线,而现在图形中是有中位线,但三角形不完整,所以先应将三角形的边添上,

于是连结 GE，就可得 $RL=\frac{1}{2}GE$，$RL/\!/GE$. 根据同样的道理，连结 FH 后，有 $SM/\!/HF$，$SM=\frac{1}{2}HF$. 这样，证明这两个三角形全等的第二个条件就应是证 $RL=SM$，也即可转化为证 $GE=HF$. 由于现在图形中还出现$\triangle OGH$ 和$\triangle OEF$ 是两个具有公共顶点 O 的等边三角形，所以又可组成一对旋转型的全等三角形，根据由公共顶点发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法，就可找到这对全等三角形是$\triangle OGE$ 和$\triangle OHF$，全等的条件是 $OG=OH$，$OE=OF$，$\angle GOE=\angle HOF$，都等于旋转角 60°减去或加上公共部分$\angle EOH$. 所以 $GE=HF$ 可以证明.

由于现在出现了两边相等的条件，而第三条边相等是要证明的结论，所以第三个条件只能是证它们的夹角相等，也就是要证$\angle NRL=\angle NSM$.

现在图形中出现的是$\triangle OCD$、$\triangle ODG$、$\triangle OGH$ 是三个连续的等边三角形，或者也就是组成了半个正六边形，而在另一个半圆中只有$\triangle OAB$ 是一个任意放置的等边三角形，所以这个等边三角形也是可以绕 O 点任意旋转的，而它旋转到任意的位置，问题的结论也总是成立的，所以也将 A、B 旋转到正六边形的顶点上，也就是延长 DO、GO 交$\odot O$ 于 K、I，并连结 HK、KI、IC，则六边形 $CDGHKI$ 就是一个圆内接正六边形. 于是再取 HK 和 IC 的中点 P、Q，并连结 RP、PQ、QR，就立即可证得$\triangle RPQ$ 是等边三角形. 于是就有$\angle NRL=\angle NRQ+\angle QRL$，而 $RL/\!/GE$，RQ 是梯形 $DGIC$ 的中位线，$RQ/\!/GI$，所以$\angle QRL=\angle OGE$. 而已证$\triangle OGE\cong\triangle OHF$，则$\angle OGE=\angle OHF$. 再由 $SM/\!/HF$ 和 $PQ/\!/HC$，又可证明$\angle NSM=\angle OHF+\angle NTQ$，可先设 PQ 交 SN 于 T，这样问题就转化为要证$\angle NRQ=\angle NTQ$. 由于我们已证明$\triangle RPQ$ 和$\triangle RSN$ 都是等边三角形，$\angle RQT=\angle RNT=60°$，所以 R、N、Q、T 四点共圆，从而就可证明$\angle NRQ=\angle NTQ$.

在证明了$\triangle NRL \cong \triangle NSM$后，就可得$NL=NM$，$\angle RNL=\angle SNM$，但$\angle RNL+\angle LNS=\angle RNS=60°$，所以$\angle LNM=\angle SNM+\angle LNS=60°$，从而就可完成分析.

在上述分析中，要证明$\angle NRQ=\angle NTQ$，也可以直接在$\triangle NRX$和$\triangle QTX$中，这时可先设NS与RQ相交于X，则由已证的$\angle RNX=\angle TQX=60°$和$\angle RXN=\angle TXQ$是对顶角相等来直接推得，从而也可以完成分析.

例 59 已知：以$\triangle ABC$的边AB、AC为边向外作正方形$ABDE$、$ACFG$，M、N、K分别是BC、BE、CG的中点. 求证：(1) $MN=MK$；(2) $MN\perp MK$.

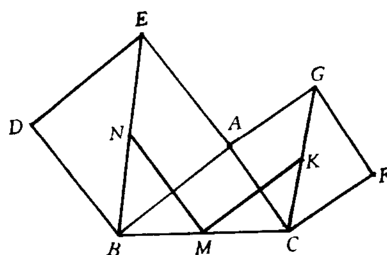


图 5・217

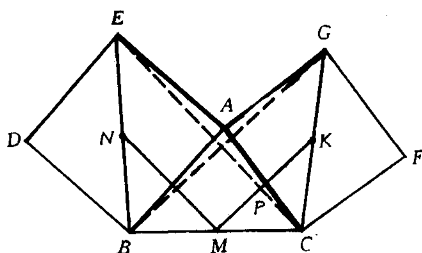


图 5・218

分析：本题条件中出现了两个以A为公共顶点的正方形$ABDE$和$ACFG$，从而就可出现一对旋转型全等三角形. 根据由公共顶点A发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法，可以找到这对全等三角形应是$\triangle ACE$和$\triangle AGB$，于是连结CE、GB，由$AE=AB$，$AC=AG$和$\angle EAC=\angle BAG$都等于旋转角$90°$加上公共部分$\angle BAC$，就可证明这两个三角形全等.

现在我们要证明的性质是$MN=MK$，而已知N、M、K分别是BE、BC、CG的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 因N、M所在的线段BE、BC有

公共的端点 B,可以组成三角形,所以 MN 就是$\triangle BCE$ 的中位线,于是可得 $MN /\!/ CE, MN=\frac{1}{2}CE$. 同理可证 $MK /\!/ BG, MK=\frac{1}{2}BG$. 于是要证 $MN=MK$ 就可转化为应证 $CE=BG$. 而由$\triangle ACE \cong \triangle AGB$,这个性质是可以证明的.

再由上述证得的两组平行线,如设 MK、CE、BG、MN 两两的交点分别为 P、Q、R,则四边形 $MPQR$ 就是平行四边形. 而我们现在要证 $MN \perp MK$. 所以这个四边形 $MPQR$ 就应是一个矩形,从而又只要证这个四边形有一个内角是 90°. 由于已证$\triangle ACE$ 和$\triangle AGB$ 是一对旋转型全等三角形,所以$\angle AEC=\angle ABG$,如设 AB 和 CE 的交点为 H,则又有$\angle AHE=\angle BHC$,它们是对顶角当然相等,这样在$\triangle AEH$ 和$\triangle QBH$ 中,就可以证明$\angle HQB=\angle HAE=90°$,而 E、Q、C 成一直线,所以就可证明$\angle BQC=90°$,从而完成分析.

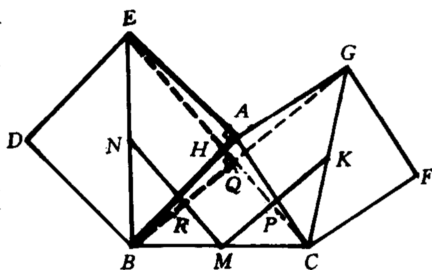


图 5・219

在上述分析中,由$\angle AEC=\angle ABG$,也可推得 A、E、B、Q 四点共圆,$\angle BQE=\angle BAE=90°$,从而也就可以完成分析.

例 60 已知:以$\triangle ABC$ 的边 AB、AC 为边,向形外作正方形 $ABDE$、$ACFG$,M、K、L、N 分别是 BC、CG、GE、EB 的中点. 求证:四边形 $MKLN$ 是正方形.

分析:本题条件中出现了 BC、CG、GE、EB 的中点 M、K、L、N,是多个中点问题,所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 M、N 所在的线段 BC、BE 具有公共端点 B,可以组成三角形,所以 MN 这两个中点的连线就是三角形的中位线,但现在图形中是有中位线而三角形不完整,所以应将三角形的边

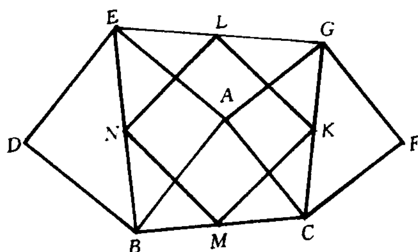


图 5・220

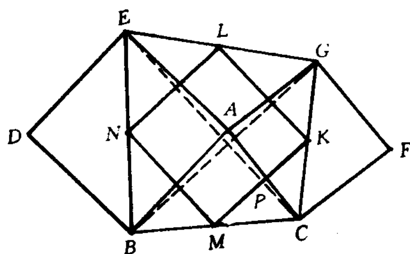


图 5・221

添上，也就是连结 CE，即可得 $MN /\!/ CE$，$MN=\frac{1}{2}CE$. 根据同样的道理，由 K、L 分别是 CG、GE 的中点，又可得 $KL /\!/ CE$，$KL=\frac{1}{2}CE$，从而可进一步推得 $MN /\!/ KL$，$MN=KL$，所以四边形 $MKLN$ 是平行四边形. 而现在的问题是要证明这个四边形是正方形，所以问题就成为要证明这个平行四边形的一组邻边相等而且垂直.

由条件四边形 $ABDE$、$ACFG$ 都是正方形，且它们有公共顶点 A，所以就可出现一对旋转型全等三角形. 现在由公共顶点 A 发出的两组相等线段分别是 AE、AB 和 AC、AG，所以它们两两组成的全等三角形就是$\triangle AEC$ 和$\triangle ABG$，于是连结 BG. 从而根据 $AE=AB$，$AC=AG$，$\angle EAC=\angle BAG=90°+\angle BAC$，就可证明$\triangle AEC \cong \triangle ABG$，从而可证得 $CE=GB$，且 $CE \perp GB$，由此再应用三角形中位线的基本图形的性质，就可证明 $MN=MK$，$MN \perp MK$，从而完成证明.

例 61 已知：E 为正方形 $ABCD$ 的边 BC 上的一点，F 是 AB 的延长线上的一点，$BE=BF$. 求证：$AE \perp CF$.

分析：本题要证明 $AE \perp CF$，是一个两条垂线的判定问题，所以可根据垂线的定义，将 AE 延长到与 CF 相交，并设交点为 G，

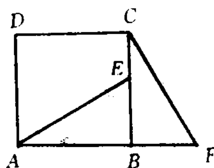


图 5・222

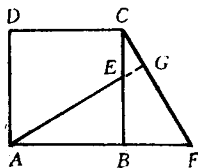


图 5・223

那末问题就应证$\angle AGF=90°$,由于这个角可以看作是$\triangle AGF$的一个内角,所以问题又可以转化为要证$\angle F+\angle GAF=90°$.而在$\triangle CFB$中,由条件可得$\angle FBC=90°$,所以有$\angle F+\angle BCF=90°$,从而问题又成为要证$\angle EAB=\angle FCB$.

另一方面由$BE=BF$和$\angle EBF=90°$,可得BE和BF应组成一个等腰直角三角形,也就是半个正方形,而已知四边形$ABCD$是正方形,这样又出现了两个具有公共顶点B的正方形,从而又出现一对旋转型全等三角形,根据由公共顶点B发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法,就可找到这对全等三角形应是$\triangle AEB$和$\triangle CFB$,全等的条件是$BA=BC$,$\angle ABE=\angle CBF=90°$,$BE=BF$.通过这两个三角形全等就可证明$\angle EAB=\angle FCB$.

例 62 已知:P是正方形$ABCD$内的一点,以BP为边作正方形$BPEF$.求证:$AP=CF$.

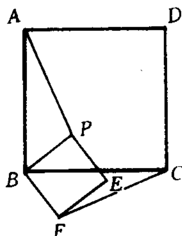


图 5・224

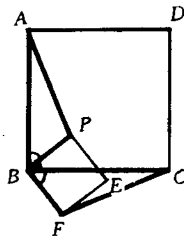


图 5・225

分析:本题的条件中出现了四边形 $ABCD$ 和 $BPEF$ 都是正方形,且它们具有公共顶点 B,所以就可组成一对旋转型全等三角形.根据由公共顶点 B 发出的两组相等线段 BA、BC 和 BP、BF 两两组成全等三角形的方法,可以找到这对全等三角形应是 $\triangle APB$ 和 $\triangle CFB$.全等的条件应是 $BA=BC$,$BP=BF$,以及它们的夹角相等,即 $\angle ABP=\angle CBF$ 都等于 90°减去公共部分 $\angle PBC$,在证明了这两个三角形全等以后,就可推得 $AP=CF$.

例 63 已知:以$\triangle ABC$ 的边 AB、BC 为边向$\triangle ABC$ 所在的一侧作正方形 $ABDE$、$BCFG$.求证:$GA\perp CD$.

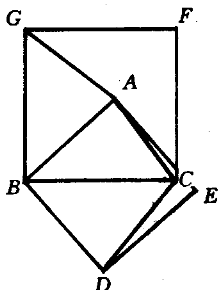


图 5・226

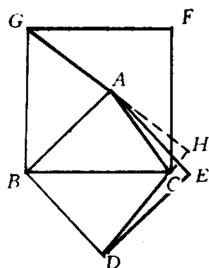


图 5・227

分析:本题要证明 $GA\perp CD$,所以可根据垂线的定义,将它们延长到相交后,再证明它们的交角是直角.于是延长 GA、DC 相交于 H,应证$\angle H=90°$.

由于条件中出现了 $ABDE$、$BCFG$ 都是正方形,且它们有一个公共顶点 B,所以就出现了一对旋转型全等三角形.由公共顶点 B 发出的两组相等线段两两组成的全等三角形就是$\triangle ABG$ 和$\triangle DBC$,全等的条件是 $BA=BD$,$BG=BC$,以及$\angle ABG=\angle DBC$,都等于旋转角 90°减去

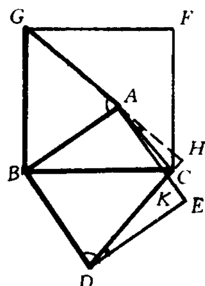


图 5・228

公共部分$\angle CBA$. 由于这一对全等三角形是绕B点旋转$90°$得到的，所以它们的第三组对应边AG和DC也必定绕B点旋转了$90°$，也就是GA和DC必定垂直. 具体的分析是由这两个三角形全等，可得$\angle GAB=\angle CDB$. 而由$\angle BAE=90°$和G、A、H成一直线，可得$\angle GAB+\angle HAE=180°-90°=90°$，而已知$\angle CDB+\angle CDE=90°$，所以$\angle HAE=\angle HDE$. 如我们设$DH$、$AE$相交于$K$，则在$\triangle AKH$和$\triangle DKE$中，就出现了两个角对应相等的条件，所以第三个角也必定相等，也就可得$\angle H=\angle E=90°$.

例 64 已知：$\triangle ABC$中，以AB、AC为边向形外作正方形$ABDE$、$ACFG$，以AE、AG为邻边作▱$AEHG$，正方形$ABDE$的对角线AD、BE的交点是O. 求证：$OH=OC$，$OH\perp OC$.

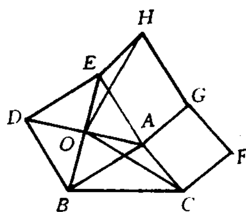


图 5・229

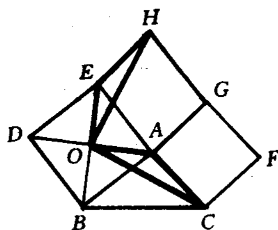


图 5・230

分析：本题要证$OH=OC$，这是两条具有公共端点O的相等线段，所以可组成一个等腰三角形. 又因为要证明它们互相垂直，所以它们应组成一个等腰直角三角形，也就是半个正方形，而已知点O是正方形$ABDE$的对角线AD、BE的交点，而正方形$ABDE$被这两条对角线分成四个全等的等腰直角三角形，也都是半个正方形，而且它们和OH、OC组成的半个正方形都有公共顶点O，从而就可以应用旋转型全等三角形进行证明.

在找旋转型全等三角形时，若首先考虑选取等腰直角$\triangle OAE$，那么由公共顶点O发出的两组相等线段就是OE、OA和

OH、OC，而由它们两两组成的全等三角形就是$\triangle OEH$和$\triangle OAC$，全等的条件有$OE=OA$，而由条件四边形$AEHG$是平行四边形，$EH=AG$和四边形$ACFG$是正方形，$AG=AC$，可得$EH=AC$，所以还要再证明一个性质. 由于$OH=OC$是要证明的结论，所以第三个条件必须是证明上述这两条边的夹角相等，也就是应证$\angle OEH=\angle OAC$，从图形中我们可以看出$\angle OEH=\angle OEA+\angle AEH$，$\angle OAC=\angle OAB+\angle BAC$，而其中的$\angle OEA=\angle OAB=45°$，所以问题就转化成要证$\angle AEH=\angle BAC$. 由于$\angle AEH$是$\square AEHG$的一个内角，应用平行四边形的性质可得$\angle AEH+\angle EAG=180°$，而$\angle BAC+\angle EAG=360°-\angle BAE-\angle CAG=360°-90°-90°=180°$，所以$\angle AEH=\angle BAC$可以证明.

在证明了$\triangle OEH\cong\triangle OAC$后，就可得$OH=OC$，$\angle EOH=\angle AOC$，而$\angle EOH+\angle AOH=\angle AOE=90°$，所以$\angle COH=\angle AOC+\angle AOH$也等于$90°$，分析就可以完成.

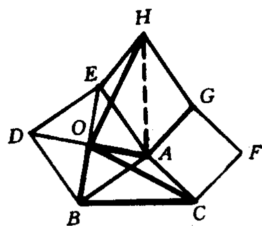


图 5・231

若在分析旋转型全等三角形时，考虑选取等腰直角$\triangle OBA$，则由公共顶点发出的两组相等线段就是OA、OB和OH、OC，从而组成的全等三角形就是$\triangle OAH$和$\triangle OBC$，于是应先连结AH. 全等的条件首先是$OA=OB$，又因为$EA=AB$，$EH=AG=AC$，且在前述分析中已得$\angle AEH=\angle BAC$，所以$\triangle AEH\cong\triangle BAC$，它们也是一对绕正方形的中心$O$旋转$90°$的全等三角形，所以就可得$AH=BC$，$\angle EAH=\angle ABC$，并进而推得$\angle OAH=\angle OBC$，从而分析也可以完成.

若考虑选取等腰直角$\triangle ODB$，则由公共顶点发出的两组相等线段就是OB、OD和OH、OC，就可进一步找到全等三角形是$\triangle OBH$和$\triangle ODC$，于是应先连结BH、DC. 全等的条件是$OB=$

OD，又因为 $EB=AD$，$EH=AC$，$\angle BEH=\angle DAC$，可得 $\triangle EBH$ 和 $\triangle ADC$ 是一对绕正方形的中心 O 旋转 90°的全等三角形，所以 $BH=DC$，$\angle OBH=\angle ODC$，从而也就可以证明 $\triangle OBH\cong\triangle ODC$.

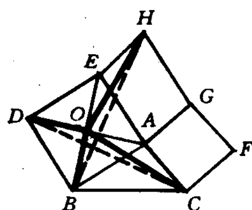


图 5・232

若考虑选取等腰直角 $\triangle OED$，则由公共顶点 O 发出的两组相等线段就是 OD、OE 和 OH、OC，从而可得全等三角形应是 $\triangle ODH$ 和 $\triangle OEC$，于是连结 DH、EC. 全等条件是 $OD=OE$，又因为 $ED=AE$，$EH=AC$，$\angle DEH=\angle EAC$，它们分别等于 $90°+\angle EAG$ 和 $90°+\angle BAC$，可得 $\triangle EDH\cong\triangle AEC$，从而就证明了 $DH=EC$ 和 $\angle EDH=\angle AEC$，那末再进一步就可得 $\angle ODH=45°+\angle EDH=45°+\angle AEC=\angle OEC$，所以 $\triangle ODH$ 和 $\triangle OEC$ 全等可以证明，分析也就可以完成.

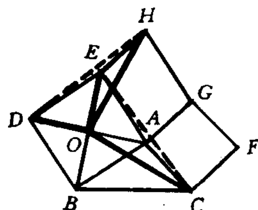


图 5・233

例 65 已知：以四边形 $ABCD$ 的四边为边向外作正方形 DAA_1D_2、ABB_1A_2、BCC_1B_2、CDD_1C_2，E、F、G、H 分别是这四个正方形的中心. 求证：$EG=FH$.

分析：由于 E、F、G、H 分别是四个正方形的中心，所以它们分别是正方形对角线的中点. 因而出现了多个中点问题，所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明.

若首先考虑取 E、G 分别为 DA_1、BC_1 的中点，那末因 DA_1、BC_1 没有公共的端点，不能组成三角形，所以 EG 就不是三角形的中位线，于是就要增加中点，且应增加与 E、G 所在线段 DA_1、BC_1 有公共端点的线段的中点. 由于 DA_1、BC_1 分别有一个端点 D、B

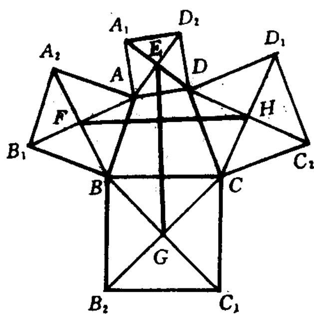


图 5・234

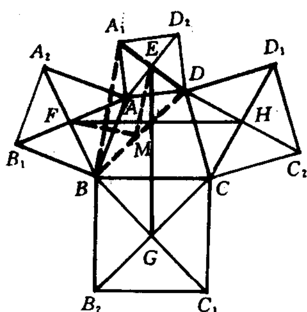


图 5・235

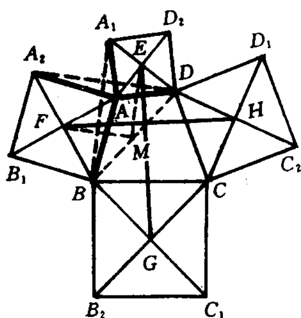


图 5・236

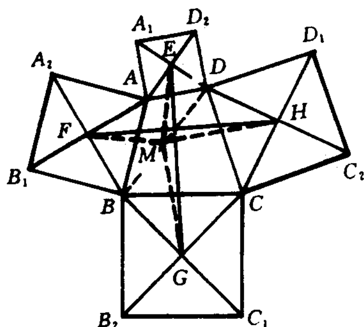


图 5・237

就是四边形的顶点，而连接这两点的线段就是四边形的对角线，所以就可增加这条对角线的中点，于是连结 BD，并取 BD 的中点 M，于是 EM 这两个中点的连线就应是三角形的中位线. 因此，要先连结 EM、A_1B. 就可得 $EM \parallel A_1B$，$EM=\frac{1}{2}A_1B$. 根据同样的道理，连结 FM 和 DA_2，又可得 $FM \parallel A_2D$，$FM=\frac{1}{2}A_2D$.

由于条件中给出了正方形 DAA_1D_2 和 ABB_1A_2，且它们有一个公共顶点 A，所以一定出现一对旋转型全等三角形. 现在由公共

顶点 A 发出的两组相等线段是 AA_1、AD 和 AB、AA_2，所以可找到这对全等三角形是$\triangle AA_1B$ 和 $\triangle ADA_2$，全等的条件是 $AA_1=AD$，$AB=AA_2$，它们的夹角都等于旋转角 90°加上公共部分 $\angle A_1AA_2$，也就是 $\angle A_1AB=\angle DAA_2$，在证明了 $\triangle AA_1B\cong\triangle ADA_2$ 后，就可得 $A_1B=DA_2$，并可进一步证明 $A_1B\perp DA_2$. 从而就可证明 $EM=FM$，$EM\perp FM$. 按照同样的方法，连结 GM、HM 后又可以证明 $GM=HM$，$GM\perp HM$.

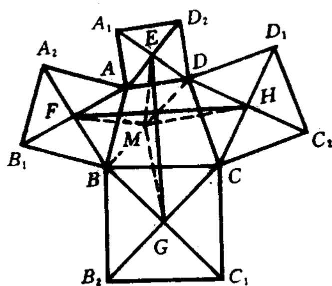


图 5・238

由 $EM=FM$ 可知它们是两条具有公共端点的相等线段，可以组成一个等腰三角形，又因为 $EM\perp FM$，所以这个等腰三角形实质上就是一个等腰直角三角形，或者也就是半个正方形. 同样地，由 $GM=HM$ 和 $GM\perp HM$ 可知 GM 和 HM 也组成了一个等腰直角三角形. 这样就又出现了两个以 M 为公共顶点的等腰直角三角形或半个正方形，从而又可出现一对旋转型的全等三角形. 现在由公共顶点 M 发出的两组相等线段就是 EM、FM 和 GM、HM，所以全等三角形就应是$\triangle EGM$ 和$\triangle FHM$，全等的条件是 $EM=FM$，$GM=HM$，$\angle EMG=\angle FMH$ 都等于旋转角 90°加上公共部分$\angle EMH$，在证明了这两个三角形全等以后，就可推得 $EG=FH$.

例 66 已知：E 是正方形 $ABCD$ 的边 BC 上的一点，$\angle DAE$ 的平分线交 CD 于 F. 求证：$AE=BE+DF$.

分析：本题要证明 $AE=BE+DF$，所以可根据线段和差关系的定义，将 BE 和 DF 这两条线段接起来.

若考虑将 BE 接到 FD 上，则延长 FD 到 G，使 $DG=BE$，然

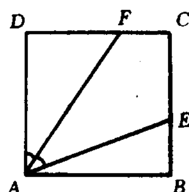


图 5・239

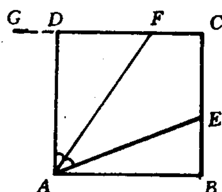


图 5・240

后证明所得到的线段 FG 和 AE 相等. 但在作出了 $DG=BE$ 后，我们可以发现问题实质上是将线段 BE 旋正方形的顶点 A 旋转了 90°后成为 DG，而 AB 也可看作是绕 A 点旋转 90°后成为 AD，且它们的夹角$\angle B$ 和$\angle ADG$ 都是直角，所以也可应用旋转型全等三角形进行证明. 于是连结 AG，就可得$\triangle ADG\cong\triangle ABE$，$AG=AE$，这样问题又转化成为要证 $FG=AG$. 而这又是两条具有公共端点的相等线段，它们就可以组成一个等腰三角形，问题也就成为一个等腰三角形的判定问题，从而就可以转而证 $FG=AG$ 的等价性质$\angle GAF=\angle GFA$. 由条件 $DC\parallel AB$，可得$\angle GFA=\angle BAF$，所以问题又应证$\angle GAF=\angle BAF$. 显然由条件$\angle DAF=\angle EAF$ 和由$\triangle ADG\cong\triangle ABE$ 得到的$\angle DAG=\angle BAE$，就可以证明上述性质.

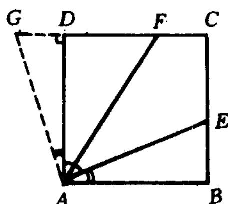


图 5・241

若考虑将 DF 接到 EB 上，则延长 EB 到 G 使 $BG=DF$，然后应证明 GE 和 AE 相等. 但在作出了 $BG=DF$ 后，实质上就是将 DF 绕正方形的顶点 A 旋转了 90°，所以也可以应用旋转型全等三角形的基本图形的性质进行证明. 于是连结 AG，由 $AD=AB$，$\angle ADF=\angle ABG=90°$和 $DF=BG$，即可证明$\triangle ADF\cong\triangle ABG$，$\angle AFD=\angle AGB$. 而由 $DC\parallel AB$，又可得$\angle AFD=\angle BAF$，所以$\angle BAF=\angle AGE$. 而由$\angle GAB=\angle FAD=\angle FAE$，又可证明

$\angle BAF=\angle GAE$，所以$\angle AGE=\angle GAE$，从而就可证明$GE=AE$.

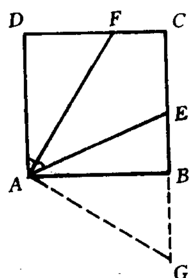


图 5·242

在上述分析中，我们都是将线段绕正方形的顶点旋转 90°，而在正方形中，也可以考虑绕正方形的中心旋转 90°，也就是在 AB 上截取 $AG=BE$，那就可以添加绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 于是连结 DG，并设交 AF、AE 于 H、K. 就可由 $AB=DA$，$BE=AG$，$\angle ABE=\angle DAG=90°$，得 $\triangle ABE\cong\triangle DAG$，$AE=DG$，$\angle BAE=\angle ADG$，这样问题就成为要证 $DG=AG+DF$. 而由 $\angle GAH=\angle BAE+\angle EAF$，$\angle GHA=\angle ADG+\angle DAF$ 和 $\angle BAE=\angle ADG$，$\angle EAF=\angle DAF$，可证 $\angle GAH=\angle GHA$，$AG=HG$，再由 $DC\parallel AB$，又可得 $\angle DFH=\angle GAH$，且有 $\angle GHA=\angle DHF$，所以又可证得$\angle DFH=\angle DHF$，$DF=DH$，所以分析可以完成.

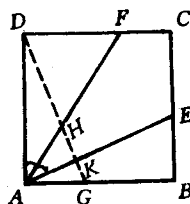


图 5·243

本题在根据线段和差关系的定义进行分析时，也可以考虑在 AE 上截取 $EG=EB$，然后证明剩余下来的线段 AG 与 DF 相等.

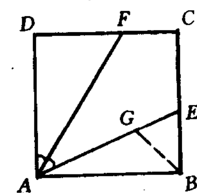


图 5·244

而由 $EG=EB$ 可知它们是两条具有公共端点 E 的相等线段，所以它们可组成一个等腰三角形，于是连结 BG. 就有$\angle EBG=\angle EGB$，而由 $AD\parallel BC$，又可得$\angle BEG=\angle DAE=2\angle DAF$，所以$\angle EBG=\frac{1}{2}(180°-\angle BEG)=90°-\frac{1}{2}\angle DAE=90°-\angle DAF=\angle BAF$. 而$\angle EBG+\angle ABG=90°$，所以$\angle BAF+\angle ABG=90°$，从而就可得 BG 与 AF 垂直. 而已知 AF 是$\angle DAE$ 的角平分线，这样又出

现了 BG 是角平分线 AF 的垂线，所以必定可组成一个等腰三角形的基本图形. 由于这个等腰三角形是由角平分线的垂线和角的两边相交得到的，所以延长 BG 交 AF、AD 于 K、H，就可通过 $\angle KAH=\angle KAG$，$AK=AK$，$\angle AKH=\angle AKG=90°$，$\triangle AHK\cong\triangle AGK$，得到 $AH=AG$. 于是接下来的问题就是要证 $DF=AH$. 由于我们已经证明 $BK\perp AF$，这是过正方形的一个顶点向过它的相邻顶点的一条直线所作的垂线，所以又可应用绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 于是问题就成为应证 $\triangle AHB\cong\triangle DFA$，根据条件 $AB=DA$，$\angle HAB=\angle FDA=90°$和 $\angle KBA=\angle FAD$，就可证明这两个三角形全等，分析也就可以完成.

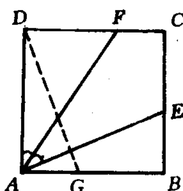


图 5・245

例 67 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$. 求证：$AB^2=AC^2+BC^2$.

分析：本题要证明线段 AB 的平方等于线段 AC、BC 的平方和，由于一条线段

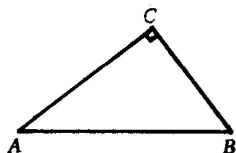


图 5・246

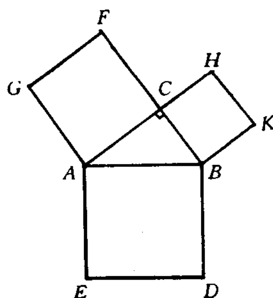


图 5・247

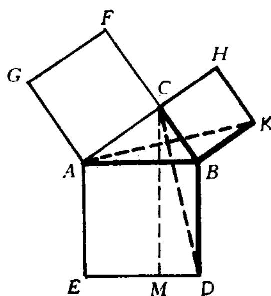


图 5・248

的平方表示以这条线段为边的正方形的面积，所以问题就是要证

以 AB 为边的正方形的面积等于以 AC、BC 为边的两个正方形的面积的和，于是就应先将这三个正方形作出，也就是分别以 BC、AC、AB 为边向形外作正方形 $BCHK$、$ACFG$、$ABDE$. 这样问题就成为要证正方形 $BCHK$ 和 $ACFG$ 的面积之和等于正方形 $ABDE$ 的面积.

由于现在图形中出现了正方形 $ABDE$ 和 $BCHK$ 是两个具有公共顶点 B 的正方形，所以就出现一对旋转型的全等三角形. 根据由公共顶点 B 发出的两组相等线段 BK、BC 和 BA、BD 两两组成全等三角形的方法，可找到这对全等三角形应是$\triangle BAK$ 和$\triangle BDC$，于是应先连结 AK、CD，根据 $BK=BC$，$BA=BD$ 和 $\angle KBA=\angle CBD$ 都等于 $90°+\angle CBA$，就可证明$\triangle BAK \cong \triangle BDC$.

接下来的问题就是要分析这两个全等三角形与要证明的正方形的面积之间的关系. 由于$\triangle BAK$ 与正方形 $BCHK$ 有一条公共的边 BK，且由条件 $CH /\!/ BK$，A、C、H 成一直线，又可得$\triangle BAK$ 的边 BK 上的高就是正方形 $BCHK$ 的边长 KH 或 BC，所以$\triangle BAK$ 的面积就等于正方形 $BCHK$ 的面积的一半. 而对于$\triangle BDC$ 来说，它与正方形 $ABDE$ 也有一条公共边 BD，那末根据三角形面积计算的要求，就应作出$\triangle BDC$ 的边 BD 上的高，所以应过 C 作 BD 的垂线，但因 $AB \perp BD$，所以也可以过 C 作 AB 的垂线，如交 AB 于 L，则 BL 就是$\triangle BDC$ 的边 BD 上的高，也就有$\triangle BDC$ 的面积等于 $BD \cdot BL$ 的一半. 而 $BD \cdot BL$ 又应是以 BD、BL 为邻边的矩形的面积，所以再延长 CL 交 DE 于 M，也就是先将这个矩形作出，那就可得$\triangle BDC$ 的面积就等于矩形 $BLMD$ 的面积的一半. 而$\triangle BAK$ 和$\triangle BDC$ 这两个全等三角形的面积当然是相等的，所以就可得正方形 $BCHK$ 的面积等于矩形 $BLMD$ 的面积.

根据同样的方法又可以证明正方形 $ACFG$ 的面积等于矩形

$ALME$ 的面积，从而就可以完成分析.

例 68 已知：$\triangle ABC$ 中，分别以 AB、AC 为边向形外作正方形 $ABDE$、$ACFG$，CE、BG 相交于 H. 求证：HA 平分 $\angle EHG$.

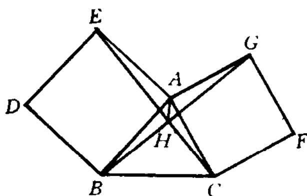


图 5・249

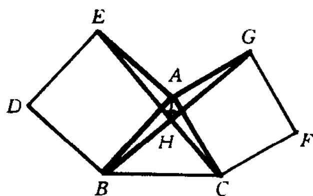


图 5・250

分析：本题条件中出现了四边形 $ABDE$、$ACFG$ 都是正方形，且它们有一个公共的顶点 A，所以就出现了一对旋转型全等三角形. 现在由公共顶点 A 发出的两组相等线段是 AE、AB 和 AC、AG，所以可找到这对全等三角形应是 $\triangle AEC$ 和 $\triangle ABG$. 全等的条件是 $AE=AB$、$AC=AG$ 和 $\angle EAC=\angle BAG=90°+\angle BAC$. 所以 $\angle AEC=\angle ABG$，A、E、B、H 四点共圆. 于是再应用圆周角的基本图形或者也就是圆内接四边形的性质，连接 BE 后，有 $\angle AHE=\angle ABE$，$\angle AHG=\angle AEB$，而 BE 是正方形 $ABDE$ 的对角线，$\angle ABE=\angle AEB=45°$，所以就可推得 $\angle AHE=\angle AHG$.

由于 $\triangle AEC$ 和 $\triangle ABG$ 是一对绕 A 点旋转 90°的全等三角形，所以 CE 经旋转后就到达 GB 的位置，CE 和 GB 也就一定垂直. 这样，在 $\triangle AEC$ 中的线段 HA 也就会随着三角形的旋转而绕同一个旋转中心即 A 点，旋转同一个角度即 90°，于是过

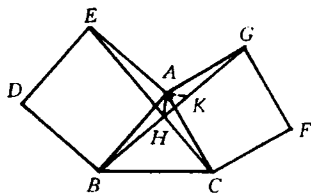


图 5・251

A 作 AH 的垂线交 BG 于 K，就可得 $AE=AB$，$\angle AEH=\angle ABK$，$\angle EAH=\angle BAK=90°+\angle BAH$，所以有 $\triangle AEH\cong$

$\triangle ABK$，$\angle AHE=\angle AKB$，且 $AH=AK$，$\angle AKB=\angle AHG$，所以 $\angle AHE=\angle AHG$ 也就可以证明.

例 69 已知：四边形 $ABCD$ 中，分别以 AB、CD 为边向形外作正方形 $ABEF$、$CDGH$，以 AC、BD 为边分别向$\triangle ACD$、$\triangle BDA$ 所在的一侧作正方形 $ACMN$、$BDKI$. 求证：四边形 $EHMI$ 是平行四边形.

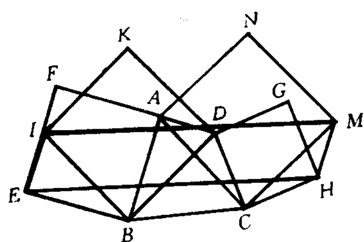


图 5・252

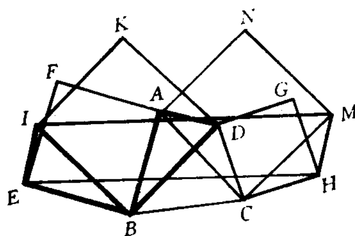


图 5・253

分析：本题条件中出现了 $ABEF$ 和 $DBIK$ 是两个具有公共顶点 B 的正方形，所以就出现了一对旋转型的全等三角形. 现在由公共顶点 B 发出的两组相等线段是 BE、BA 和 BI、BD，所以就可找到并证明$\triangle BEI\cong\triangle BAD$，从而有 $EI=AD$. 根据同样的道理，由 $CDGH$ 和 $ACMN$ 是两个具有公共顶点 C 的正方形，也可得$\triangle CHM\cong\triangle CDA$，$HM=DA$，从而可得 $EI=HM$.

另一方面，由于$\triangle BEI$ 和$\triangle BAD$ 是一对绕 B 点旋转 90°的全等三角形，所以又可证明 $EI\perp AD$. 根据同样的道理，也可证明 $HM\perp AD$，从而又可推得 $EI /\!/ HM$，所以结论可以证明.

例 70 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，D 是 AB 的中点，E 是 AB 上的任一点，$EF\perp AC$ 垂足是 F，$EG\perp BC$ 垂足是 G. 求证：$DF=DG$，$DF\perp DG$.

分析：本题条件中出现了 $AC=BC$，$\triangle CBA$ 是等腰三角形，且 D 是 AB 的中点，所以可应用等腰三角形中重要线段的基本图形

的性质进行证明，于是连结 CD，即可得 $CD \perp AB$. 又因为 $\angle ACB = 90°$，所以 $\triangle CAD$ 和 $\triangle CBD$ 都是等腰直角三角形.

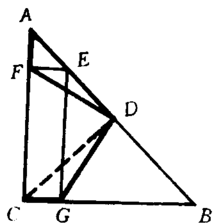


图 5・254

现在的问题是要证明 $DF = DG, DF \perp DG$，所以 DF、DG 也应组成一个等腰直角三角形. 这样就出现了 $\triangle ADC$ 和 $\triangle FDG$ 是两个具有公共的直角顶点 D 的等腰直角三角形，所以就出现了一对旋转型全等三角形，由于现在由公共顶点 D 发出的两组相等线段是 DA、DC 和 DF、DG，

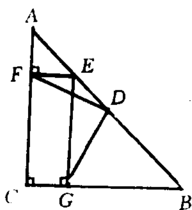


图 5・255

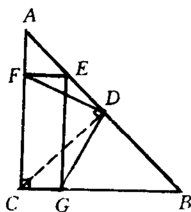


图 5・256

所以可找到这对全等三角形应是 $\triangle DAF$ 和 $\triangle DCG$. 由于 $DF = DG$ 和 $DF \perp DG$ 是要证明的结论，所以要另找三个全等的条件. 现在我们已经证明 $DA = DC$，$\angle DAF = \angle DCG = 45°$，再通过四边形 $EFCG$ 是矩形和 $\triangle FEA$ 也是等腰直角三角形，又可得 $AF = FE = CG$，所以这两个三角形全等可以证明，从而就有 $DF = DG$，$\angle ADF = \angle CDG$，而 $\angle ADF + \angle CDF = 90°$，所以 $\angle CDG + \angle CDF$ 也等于 $90°$，分析即可完成.

如果在分析中，考虑 $\triangle CDB$ 和 $\triangle FDG$ 是两个具有公共的直角顶点的等腰直角三角形，那末旋转型全等三角形就应是 $\triangle DCF$ 和 $\triangle DBG$，从而也可用同样的方法完成分析.

例 71 已知：$\square ABCD$ 中，分别以 AB、BC、CD 为边向形外作

正方形 $ABEF$、$BCGH$、$CDKI$，L、M、N 分别为这三个正方形的中心. 求证：$ML=MN$，$ML\perp MN$.

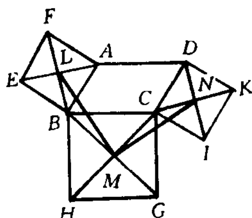


图 5・257

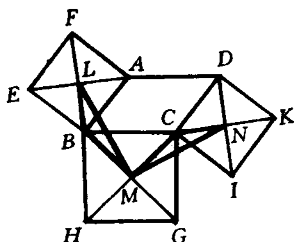


图 5・258

分析：本题要证明 $ML=MN$，这是两条具有公共端点的相等线段，所以它们可组成一个等腰三角形，又因为同时还要证明 $ML\perp MN$，所以这个等腰三角形又应是一个等腰直角三角形. 现在条件中还给出 M 是正方形 $BCGH$ 的中心，所以 BG、CH 就将这个正方形分成四个全等的等腰直角三角形. 这样就出现了 $\triangle BMC$ 和 $\triangle LMN$ 应是两个具有公共的直角顶点 M 的等腰直角三角形，所以又可以出现一对旋转型全等三角形. 现在由公共顶点 M 发出的两组相等线段是 MB、MC 和 ML、MN，所以这对全等三角形就应是 $\triangle MBL$ 和 $\triangle MCN$. 由于 $ML=MN$ 和 $ML\perp MN$ 是要证明的结论，不能用，所以必须要证另外的三个条件. 根据正方形的性质，首先可得 $MB=MC$，而由平行四边形的性质，$AB=DC$，可得 $ABEF$ 和 $CDKI$ 是大小相同的正方形，所以又有 $BL=CN$. 由于出现了两边对应相等的条件，而第三条边相等不能用，所以第三个条件只能是证明它们的夹角相等，也就是要证 $\angle MBL=\angle MCN$，但 $\angle MBL=2\times 45°+\angle ABC$，$\angle MCN=2\times 45°+\angle ICG$，所以问题又转化成要证 $\angle ABC=\angle ICG$，但 $\angle ABC$ 是 $\square ABCD$ 的一个内角，所以有 $\angle ABC+\angle BCD=180°$，而 $\angle ICG+\angle BCD=360°-2\times 90°=180°$，所以这两个角相等可以证明. 在证明了这两个三角

形全等以后，就可得 $ML=MN$，$\angle BML=\angle CMN$，而$\angle BML+\angle LMC=90°$，所以$\angle CMN+\angle LMC$ 也等于 90°.

如果我们取$\triangle MGC$ 为与$\triangle MNL$ 有公共的直角顶点的等腰直角三角形，则构成的旋转型全等三角形就应是$\triangle MGN$ 和$\triangle MCL$. 于是应先连结 GN、CL. 全等的条件首先是 $MG=MC$，所以还要证明两个性质. 由条件 CK 与 CD 的交角是 45°，BF 与 BA 的交角也是 45°，而 $AB /\!/ DC$，

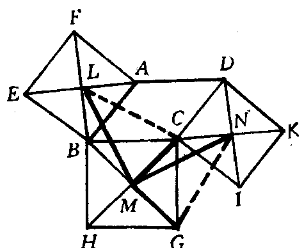


图 5・259

所以 BF 与 CK 的交角是 $45°+45°=90°$，这样就出现了过正方形的一个顶点向过它的相邻顶点的一条直线所作的垂线，所以可应用绕正方形的中点旋转 90°的全等三角形进行证明. 这样问题就应证$\triangle GCN \cong \triangle CBL$，而由条件 $GC=CB$，$CN=BL$，$\angle GCN=45°+\angle GCI=45°+\angle ABC=\angle CBL$，所以这两个三角形全等可以证明，就可得 $GN=CL$，$\angle CGN=\angle BCL$，从而又可证明$\angle MGN=45°+\angle CGN=45°+\angle BCL=\angle MCL$，这样又就可证明$\triangle MGN \cong \triangle MCL$，分析也就可以完成.

如果我们取$\triangle MHG$ 为与$\triangle MNL$ 有公共的直角顶点的等腰直角三角形，那末就应有$\triangle MHN \cong \triangle MGL$，于是应先连结 HN、GL，由于这时也出现了$\triangle CHN$ 和$\triangle BGL$ 应是一对绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形，所以可先由 $CH=BG$，$CN=BL$ 和$\angle NCH=90°+\angle ICG=$

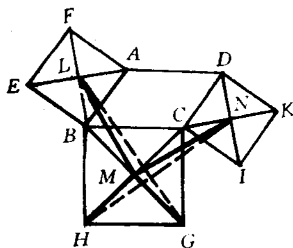


图 5・260

$90°+\angle ABC=\angle LBG$，证明$\triangle CHN \cong \triangle BGL$，$HN=GL$，$\angle CHN=\angle BGL$，那末再由 $MH=MG$ 就可证明$\triangle MHN \cong \triangle MGL$，分析

也可以完成.

如果我们取$\triangle MBH$为与$\triangle MNL$有公共的直角顶点的等腰直角三角形，那末就应有$\triangle MHL \cong \triangle MBN$，于是应先连结$HL$、$BN$. 由于这时也出现了$\triangle BHL$和$\triangle CBN$是一对绕正方形的中心旋转90°的全等三角形，所以可由$BH=CB$，$BL=CN$和$\angle HBL=45°+\angle HBE=45°+\angle BCD=\angle BCN$，证得$\triangle BHL \cong \triangle CBN$，$HL=BN$和$\angle BHL=\angle CBN$. 然后再由$MH=MB$和$\angle MHL=45°+\angle BHL=45°+\angle CBN=\angle MBN$，证明$\triangle MHL \cong \triangle MBN$，从而也可以完成分析.

图 5·261

例 72 已知：$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，分别以AB、BC、AC为边向形外作正方形$ABDE$、$BCFG$、$ACHK$. 求证：$EK^2+DG^2+FH^2=6AB^2$.

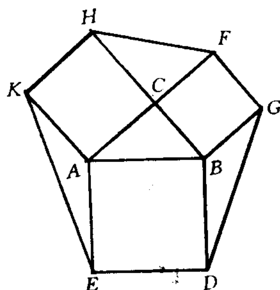


图 5·262

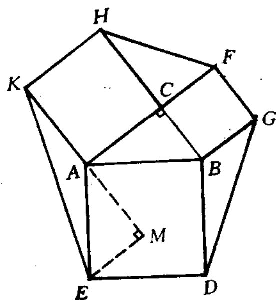


图 5·263

分析：本题结论中出现的是线段的平方之和的关系，所以可应用勾股定理进行证明. 这样就应将EK、DG、FH分别看作是直角

三角形的斜边.

若首先讨论 EK,则在将 EK 看作是直角三角形的斜边时,首先就应将这个直角三角形添出,添加的方法就是过 EK 的端点分别向对边作垂线. 若首先讨论端点 E,则过 E 作 $EM \perp KA$,且交 KA 的延长线于 M,就立即可得 $EK^2 = KM^2 + EM^2 = (AK + AM)^2 + EM^2 = AK^2 + 2AK \cdot AM + AM^2 + EM^2$,由于 $AM^2 + EM^2 = AE^2 = AB^2$,且 $AK = AC$,所以 $EK^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AM$. 根据同样的道理,过 D 作 $DN \perp GB$ 交 GB 的延长线于 N 后,也可得 $DG^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BN$. 而由 $\angle FCH = 90°$,又可得 $FH^2 = CH^2 + CF^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$,从而就有 $EK^2 + DG^2 + FH^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AM + AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BN + AB^2 = 4AB^2 + 2AC \cdot AM + 2BC \cdot BN$,现在我们要证明这个关系式等于 $6AB^2$,就是要证明 $2AC \cdot AM + 2BC \cdot BN = 2AB^2$,$AC \cdot AM + BC \cdot BN = AB^2$. 而 $AB^2 = AC^2 + BC^2$,比较这两个关系式可以发现,问题已成为要证 $AM = AC$ 和 $BN = BC$. 但 $AM = AC$ 这个性质一出现,且由于 $AM \perp AC$,所以它们应构成一个等腰直角三角形,或半个正方形,这样就出现了它是与正方形 $ABDE$ 具有公共顶点 A,所以就出现了一对旋转型全等三角形. 现在由公共顶点 A 发出的两组相等线段是 AB、AE 和 AC、AM,所以就可找到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEM$ 应是一对全等三角形,全等的条件是 $AB = AE$,$\angle ACB = \angle AME = 90°$,$\angle BAC = \angle EAM$ 都等于旋转角 $90°$减去公共部分 $\angle BAM$,在证明了这两个三角形全等以后,就可得 $AC = AM$. 根据同样的道理也可证明 $BC = BN$,所以分析可以完成.

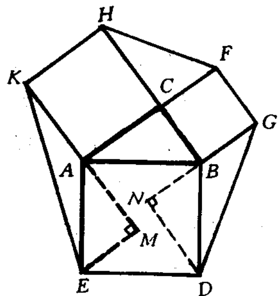


图 5・264

若考虑过端点 K 向对边作垂线,则过 K 作 $KM \perp EA$,交 EA

的延长线于 M，就可得 $EK^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AM$. 根据同样的道理，过 G 作 $GN\perp DB$，交 DB 的延长线于 N 后，又可得 $DG^2=AB^2+BC^2+2AB\cdot BN$. 而 $FH^2=AB^2$，所以问题就转化为要证 $2AB\cdot AM+2AB\cdot BN=2AB^2$，$AM+BN=AB$. 但这是要证明一条线段等于两条线段的和，所以根据线段和的定义在 AB 上截取 $AI=AM$ 后再证明留下来的 BI 和 BN 相等. 但作出了 $AI=AM$ 后，又因为 $AM\perp AI$，所以它们又可组成一个等腰三角形或半个正方形，它和正方形 $ACHK$ 具有公共顶点 A，这样又出现了$\triangle AMK$ 和$\triangle AIC$ 是一对旋转型全等三角形，全等的条件是 $AK=AC$，$AM=AI$，$\angle KAM=\angle CAI=90°-\angle CAM$，在证明了这两个三角形全等后，就可得$\angle AIC=\angle AMK=90°$，$\angle BIC=90°$，从而又可以证明$\triangle BCI$ 和$\triangle BGN$ 也是一对旋转型全等三角形，$BN=BI$，所以分析也可以完成.

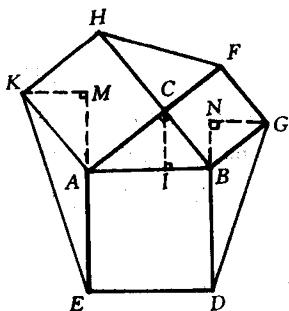


图 5・265

例 73 已知：$\triangle ABC$ 中，以 AB、AC 为边分别向形外作正方形 $ABDE$、$ACFG$. $AH\perp BC$ 垂足是 H. 求证：CD、BF、AH 相交于一点.

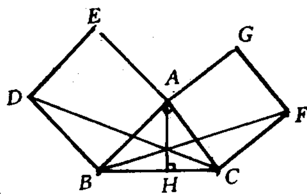


图 5・266

分析：本题要证明 CD、BF、AH 相交于一点，而已知 AH 是$\triangle ABC$ 的一条高，所以就想到要应用三角形的三条高交于一点的性质，这样就必须要使 CD、BF 也都成为三角形的高所在的直线，所以首先想到的是过 A 作 $AM\perp CD$，且分别交 CD、CB 于 K、M. 由于条件中给出 $BD=BA$，且 $BD\perp BA$，所以可得$\angle BDC=\angle BAM$，从而就出现了 AM 和 DC 这两条互相垂直

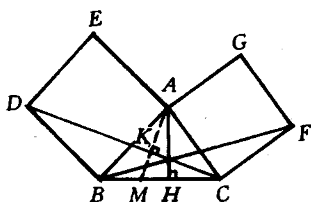


图 5・267

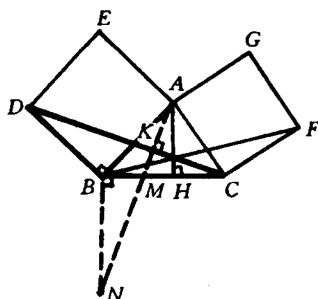


图 5・268

的线段是和正方形的一组邻边交成等角的，所以可添加旋转型全等三角形进行证明. 添加的方法是将$\triangle CBD$绕顶点B旋转$90°$，这样BD就和BA重合，而DC就和AM重合，或者也就是DC应

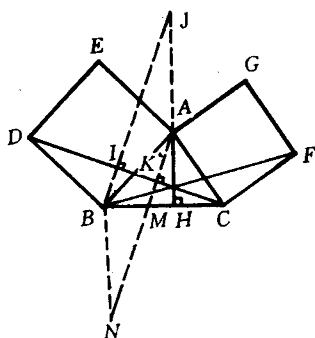


图 5・269

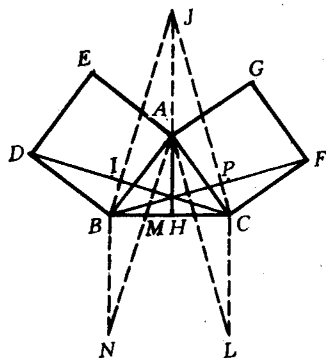


图 5・270

沿AM落下，所以应延长AM到N，使$AN=DC$，并连结BN，就可根据$BD=BA$，$\angle BDC=\angle BAN$和$DC=AN$得$\triangle BDC \cong \triangle BAN$，并可进一步得到$BC=BN$，$\angle NBC=\angle NBA-\angle ABC=\angle CBD-\angle ABC=\angle ABD=90°$.

在作出了$AM \perp CD$后，就出现了CK、AH是$\triangle AMC$的两条

高，但这时 BF 显然不在这个三角形的另一条高上，所以$\triangle AMC$还不是证明结论所需要的三角形．由于 CD 必须是三角形一条高所在的直线，所以三角形相应的一边必须和 CD 垂直，由此可得这条边也必须是 AM 的平行线，由于这时可将高 AH 对应的边 BC 的两个端点取作三角形的顶点，所以这条平行线就可以过 B 点作，也就是过 B 作 $BI /\!/ NA$，或者也就是作 $BI \perp CD$ 且分别交 CD 于 I，交 HA 的延长线于 J，然后再连结 CJ，那末 CI 和 JH 就是$\triangle CJB$ 的两条高．如设 JC 交 BF 于 P，则问题就成为要证 BP 是$\triangle CJB$ 的第三条高，也就是要证 $BP \perp CJ$．

由于以上的分析都是从 CD 要成为高所在的直线来进行分析的，那末对于 BF 来讲就可以用同样的方法进行分析．于是过 A 作 $AL \perp BF$，且使 $AL=FB$，并连结 CL，也就可证明$\triangle CFB \cong \triangle CAL$，$CL=CB$，$\angle LCB=90°$．而在作了 $AL \perp BF$ 后，问题就可转化为要证 $AL /\!/ JC$．由于我们已有 $BJ /\!/ NA$，$BN /\!/ JA$，所以四边形 $ANBJ$ 是平行四边形，可得 $JA=BN=BC$，所以 $JA=CL$，且 $JA /\!/ CL$，所以四边形 $ALCJ$ 也是平行四边形，从而就可证明 $AL /\!/ JC$，分析就可以完成．

例 74 已知：E、F、G、H 分别是正方形 $ABCD$ 四边上的点，$AE=BF=CG=DH$．求证：四边形 $EFGH$ 是正方形．

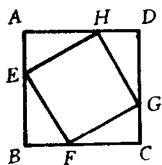


图 5·271

分析：本题要证明四边形$EFGH$是正方形，就可考虑先证它的四条边都相等，再证明它有一个内角是 $90°$．

若我们先考虑证 $EH=FE$，则由条件四边形 $ABCD$ 是正方形，$\angle A=\angle B=90°$，这样就出现了过要证明的正方形 $EFGH$ 的一个顶点 E 向过它的相邻顶点 H 或 F 的直线所作的垂线 EA 或 EB，所以可应用绕正方形的中心旋转 $90°$的全等三角形证明．根据这两组垂线相交的位置就可找到这对全等三角形应是$\triangle AEH$ 和

$\triangle BFE$. 全等的条件是 $AE=BF$，$\angle A=\angle B=90°$，$AH=BE$ 分别等于 $AB-AE$ 和 $AD-DH$. 所以就可得 $EH=FE$，$\angle EHA=\angle FEB$. 根据同样的道理可证 $FE=FG=GH$. 而由 $\angle EHA+\angle HEA=90°$，又可得 $\angle FEB+\angle HEA=90°$，所以就有 $\angle HEF=180°-90°=90°$，四边形 $EFGH$ 是正方形就可以证明.

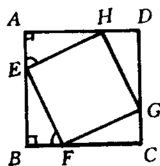


图 5・272

例 75 已知：E、F、G、H 分别是正方形 $ABCD$ 四边上的点，$AE=BF=CG=DH$，AF、BG、CH、DE 依次相交于 L、M、N、K. 求证：四边形 $KLMN$ 是正方形.

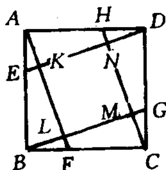


图 5・273

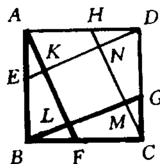


图 5・274

分析：本题要证明四边形 $KLMN$ 是正方形，就可以证明它的四条边相等，再证明它的一个内角是直角，也可以先证明它的四个角都是直角，再证明它的一组邻边相等.

若考虑证明 $\angle KLM=90°$，则就是要证明 $AF\perp BG$，这样就出现了过正方形 $ABCD$ 的顶点 A 向过它的相邻顶点 B 的一条直线 BG 所作的垂线，所以可应用绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 于是可找到这对全等三角形应是$\triangle AFB$ 和$\triangle BGC$，全等的条件是 $AB=BC$，$\angle ABF=\angle BCG=90°$，$BF=CG$. 从而可进一步推得$\angle FAB=\angle GBC$. 而已知$\angle GBC+\angle GBA=\angle ABC=90°$，所以就有 $\angle FAB+\angle ABL=90°$，就可得 $\angle ALB=90°$，$\angle KLM=90°$. 根据同样的道理也就可以证明四边形 $KLMN$ 的其它三个内角也都等于 90°.

而在证明了$\angle ALB=\angle BMC=90°$后，又可以通过$AB=BC$和$\angle BAF=\angle CBG$，证得$\triangle ABL$和$\triangle BCM$也是一对绕正方形的中心旋转90°的全等三角形，从而有$BL=CM$，也就可进一步得$BL=AK$，而$AL=BM$，所以可证明$KL=LM$. 分析就可以完成.

例 76 已知：D、E、F分别是等边$\triangle ABC$的三边上的点，且$AD=BE=CF$. 求证：$\triangle DEF$是等边三角形.

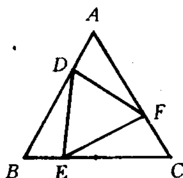


图 5・275

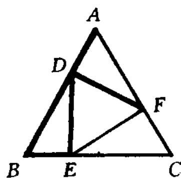


图 5・276

分析：本题要证明$\triangle DEF$是等边三角形，就要证明它的三条边都相等，也就是要证$DE=EF=FD$.

如我们先考虑证$DE=FD$. 而这两条线段分别是$\triangle DBE$和$\triangle FAD$的边. 再考虑在这两个三角形中，已经出现$BE=AD$，$\angle B=\angle A=60°$，且由$AB=AC$和$AD=CF$，又可得$BD=AB-AD=AC-CF=AF$，所以$\triangle DBE\cong\triangle FAD$，$DE=FD$. 根据同样的道理，还可证明这两条边都和$EF$相等，所以结论可以证明. 这一对全等三角形则是绕等边三角形的中心旋转120°的全等三角形.

例 77 已知：D、E、F是等边$\triangle ABC$的三边上的点，且$AD=BE=CF$，CD、AE、BF分别相交于G、H、K. 求证：$\triangle GHK$是等边三角形.

分析：本题要证明$\triangle GHK$是等边三角形就可以证明它的三条边相等，或者证明它的三个角都相等.

由条件$AB=CA$，$\angle ABE=\angle CAD=60°$，$BE=AD$，就可得$\triangle ABE\cong\triangle CAD$. 这也是一对绕等边三角形的中心旋转120°的全

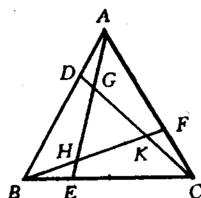


图 5・277

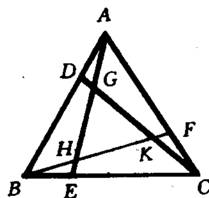


图 5・278

等三角形，于是就有$\angle BAE=\angle ACD$. 而$\angle BAE+\angle EAC=\angle BAC=60°$，所以$\angle ACG+\angle EAC$也等于60°，而$\angle KGH$是$\triangle ACG$的外角，从而就可证明$\angle KGH=\angle ACG+\angle CAG=60°$. 根据同样的道理还可证明$\angle GHK$和$\angle HKG$也都等于60°，从而可证明结论.

如考虑证明边相等，则在证明了$\angle BAE=\angle ACD$当然也等于$\angle CBF$后，就可得$\angle CAG=\angle ABH=\angle BCK$，且$CA=AB=BC$，所以也可得$\triangle CAG\cong\triangle ABH\cong\triangle BCK$，$AG=BH=CK$，而且$CG=AH=BK$，从而就可证明$GH=HK=KG$.

例 78 已知：以直角$\triangle ABC$的两条直角边AC、BC为边向外作正方形$ACDE$、$BCFG$，过E、G分别作$EM\perp AB$、$GN\perp AB$，垂

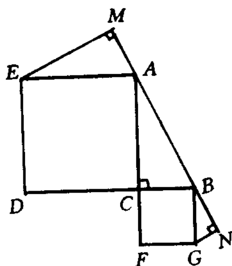


图 5・279

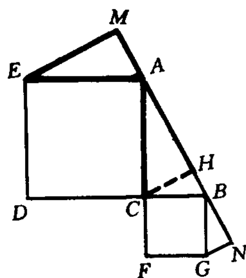


图 5・280

足为 M、N. 求证：$EM+GN=AB$.

分析：本题条件中出现的 $EM\perp AB$，是由正方形 $ACDE$ 的顶点 E 向过它的相邻顶点 A 的一条直线 AB 所作的垂线，从而就可添加绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 添加的方法是过 E 的对角顶点向同一条直线作垂线，于是过 C 作 $CH\perp AB$，且设垂足为 H，那末由 $AE=CA$，$\angle M=\angle CHA=90°$，$\angle AEM=90°-\angle EAM=\angle CAH$，就可证明$\triangle AEM$ 和$\triangle CAH$ 全等，从而可得 $EM=AH$. 根据同样的道理，还可以证明 $GN=BH$，所以结论也就可以证明.

例 79　已知：C 是线段 AB 上的一点，$AD\perp AB$，$CF\perp AB$，$BE\perp AB$，且使 $AD=BC$，$BE=AC$，$CF=AB$. 求证：$\angle DFA=\angle EFB$.

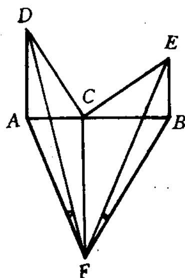


图 5・281

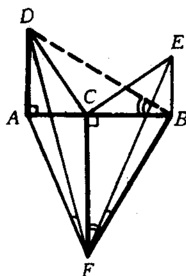


图 5・282

分析：由条件 AD 和 BC 垂直而且相等，AB 和 CF 垂直而且相等，所以将$\triangle BFC$ 绕 C 点逆时针旋转 90°后再平行移动就可以使 BC 和 DA、FC 和 $B'A$ 完全重合，而这样的移动实质上也是绕某一个特定的点旋转 90°，所以也可以添加旋转 90°的全等三角形进行证明. 由于 AD、AB 组成的三角形不完整，所以应将$\triangle ADB$ 添出，即连结 DB，可得$\triangle ABD$ 和$\triangle CFB$ 全等，于是 DB 和 BF 也垂直而且相等，从而可证明$\angle DFB=45°$. 根据同样的道理，连结 AE

后，可证得$\angle EFA=45^\circ$，从而也就可以完成证明.

例 80 已知：以$\triangle ABC$的边AB、AC为边向外作正方形$ABDE$、$ACFG$，AH是高，HA的延长线交EG于M.求证：$EM=GM$.

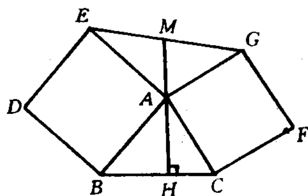


图 5・283

分析：由本题条件AH是BC边上的高，可知BC是由正方形的顶点C向过它的相邻顶点A的一条直线AH所作的垂线，从而就可以添加绕正方形的中心旋转90°的全等三角形进行证明.添加的方法是过C的对角顶点G向同一条直线作垂线，也就是过G作$GK\perp AH$交AM于K，就可得$\triangle GAK$和$\triangle ACH$全等，全等的条件是$GA=AC$，$\angle GKA=\angle AHC=90^\circ$，$\angle AGK=90^\circ-\angle GAK=180^\circ-90^\circ-\angle GAK=\angle CAH$，所以$GK$

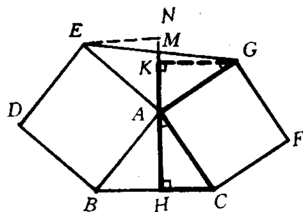


图 5・284

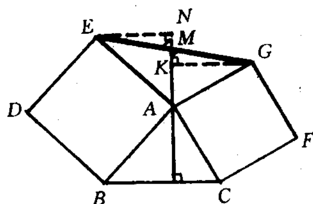


图 5・285

$=AH$.根据同样的道理，过E作$EN\perp HA$交HA的延长线于N后，也可得$EN=AH$，所以就可推得$EN=GK$.但根据作图又有$EN/\!/GK$，出现了这两条线段是平行而且相等，所以可应用中心对称型全等三角形进行证明.根据将这两条线段的四个端点两两连结组成全等三角形的方法，可找到这对全等三角形应是$\triangle EMN$和$\triangle GMK$，全等的条件是$\angle EMN=\angle GMA$，$\angle ENM=\angle GKM=90^\circ$，$EN=GK$，在证明了这两个三角形全等后，也就可证明$EM$

$=GM$.

本题在上述分析中可以发现在最后证明 $EM=GM$ 时，是应用一对中心对称型全等三角形来进行证明的. 而这一对全等三角形又是通过添加过 E、G 这两个端点的一组平行线 EN、GK 来得到的. 由于过两个点作平行线可以出现多种可能情况，所以我们也可以选取其它的可能情况进行讨论.

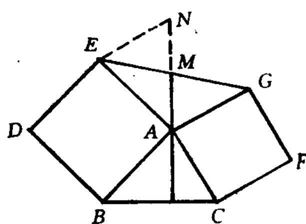


图 5·286

若取过端点 G 的 GA 为平行方向线段，则过 E 作 $EN/\!/AG$ 交 AM 的延长线于 N. 由于 $AB=EA$，$\angle BAC=360°-2\times 90°-\angle EAG=180°-\angle EAG=\angle AEN$，$\angle ABC=90°-\angle BAH=180°-90°-\angle BAH=\angle EAN$，所以$\triangle ABC$ 和$\triangle EAN$ 也是一对绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形，从而可得 $EN=AC=AG$，又因为 $EN/\!/AG$，可得$\angle ENM=\angle GAM$，且$\angle EMN=\angle GMA$，所以$\triangle EMN\cong\triangle GMA$，也就可证明 $EM=GM$.

若取过端点 G 的 GF 为平行方向线段，则过 E 作 $EN/\!/GF$ 交 MH 的延长线于 N. 但这时由于 GF 也尚未与 MH 相交，所以也应将它们延长到相交，于是延长 FG 交 HM 的延长线于 K，从而就可得到$\triangle EMN$ 和$\triangle GMK$ 应是一对中心对称型的全等三角形. 在这两个三角形中，两个角对应相等马上可以证明，所以就应再证一组边对应相等的条件.

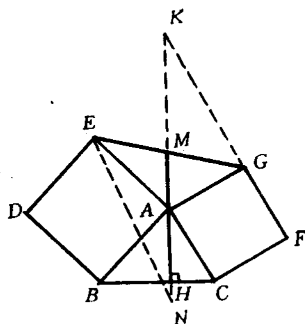


图 5·287

由于我们作的是 $EN/\!/GF$，而已知 $GF\perp AG$，所以有 $EN\perp AG$，这样就出现了过正方形 $ABDE$ 的顶点 E 向过它的相邻顶点

A 的一条直线 AG 所作的垂线，所以可添加绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明.由于 $EN \perp AG$，所以将 EN 绕正方形的中心顺时针旋转 90°就落在了 GA 的延长线上，于是就有延长 GA 交 CB 的延长线于 L，也就可找到这对全等三角形应是$\triangle AEN$ 和$\triangle BAL$. 全等的条件是 $AE=BA$，由$\angle EAB=90°$和 $AL \perp EN$，可得$\angle AEN=\angle BAL$，由 $AL \perp EN$ 和 $AN \perp CL$，又可得$\angle ANE=\angle BLA$. 在证明了这两个三角形全等以后，就可得 $EN=AL$.

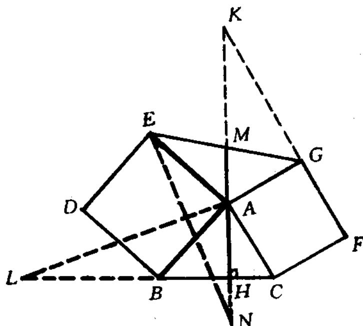


图 5·288

由于出现了与 EN 有关的等量关系，所以证明$\triangle ENM$ 和$\triangle GKM$ 全等的第三个条件就应证 $EN=GK$，也就是可转化为证 $AL=GK$. 但 $AL \perp GK$ 也是过正方形 $ACFG$ 的顶点 A 向过它的相邻顶点 G 的直线 KF 所作的垂线，所以仍然可应用绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 于是可找到这一对全等三角形应是$\triangle ALC$ 和$\triangle GKA$，全等的条件是 $AC=GA$，$\angle LAC=\angle KGA=90°$，$\angle ALC=\angle ENA=\angle GKA$，所以 $AL=GK$ 可以证明，分析也就可以完成.

在上述分析中，作出了 EN 和 GK 这一组平行线后，问题就转化成要证$\triangle EMN$ 和$\triangle GMK$ 中的一组对应边相等. 由于 EN 和 GK 是所作的两条平行线段，且过 GK 的两个端点的直线又可以看作是相交于 A 点，所以又可以添加平行线型相似三角形进行证明，于是就应将相交于 A 点的这两条直线延长到与平行线中的另一条相交，亦即延长 GA 交 EN 于 L，就可得$\triangle LNA \backsim \triangle GKA$，

$\frac{NL}{KG}=\frac{AL}{AG}$. 所以问题就可以选取证明 $KG=NE$，也就是要证明 NE 也满足上述比例关系，也即要证 $\frac{NL}{NE}=\frac{AL}{AG}$. 这是一个新的比例关系，再进行描图，可以发现 NL 和 NE 这一组相比线段又重叠在一直线上，所以仍然可以添加平行线型相似三角形进行证明，添加的方法是过端点和内分点作平行线，所以过 E 作 $EI \parallel LA$ 交 NK 于 I，就可得 $\triangle NAL \backsim \triangle NIE$，$\frac{NL}{NE}=\frac{AL}{IE}$. 比较这两个关系可发现问题进一步转化为要证 $AG=IE$. 在前述分析中，我们已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EAI$ 必定全等，所以有 $IE=AC$，也就等于 AG，所以分析可以完成.

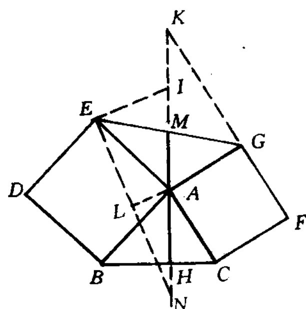


图 5・289

若平行线的方向取在与过中点 M 的直线 MH 的方向，则过两个端点所作的平行线与 MH 不相交，于是中心对称型全等三角形就不再出现，图形就转化成为三角形中位线的基本图形的应用问题. 于是过 E 作 $EK \parallel MH$，或者也就是 $EK \perp BC$ 交 GA 的延长线于 K，那末问题就转化成要证 $AK=AG$. 由条件已知 $AG=AC$，所以又应证 $AK=AC$，但这是两条具有公共端点的相等线段，且它们又互相垂直，所以它们可组成一个等腰直角三角形，或者也就是半个正方形，而条件中又给出四边形 $ABDE$ 是正方形，从而又出现了两个以 A 为公共顶点的正方形，所以又可以出现一对旋转型全等三角形，现在由 A 点发出的两组相等线段就是 AK、AC 和 AE、AB，所以可找到全等三角形应是 $\triangle AEK$ 和 $\triangle ABC$，全

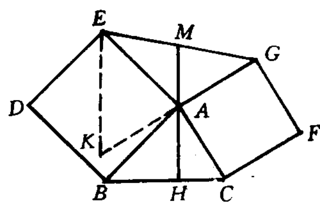


图 5・290

等的条件是 $AE=AB$, $\angle EAK=90°-\angle BAK=\angle BAC$. $\angle AEK=\angle EAM=180°-\angle BAH-90°=90°-\angle BAH=\angle ABC$,从而即可证得 $AK=AC$,分析完成.

若过两个端点 E、G 所作的 MH 的平行线不是取在与 GA 或 EA 的延长线相交,而是取在与过 A 且与 MH 垂直的直线相交,并设交点分别为 K、N,那末问题就成为一个梯形的中位线的判定问题,也就是问题可转化成要证 $AK=AN$. 由于 $AG=AC$, $\angle NAH=90°$, $\angle GAN=90°-\angle NAC=\angle CAH$, $\angle ANG=\angle NAH=\angle AHC=90°$,就可得 $\triangle AGN\cong\triangle ACH$, $AN=AH$,根据同样的道理还可以证明 $\triangle AEK\cong\triangle ABH$, $AK=AH$,所以分析可以完成.

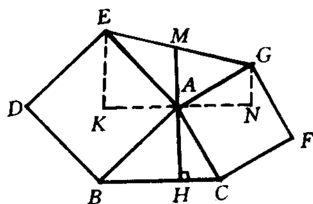


图 5・291

由于本题条件中出现了四边形 $ABDE$ 是正方形,且 $AH\perp BC$,是过正方形的一个顶点向过它的相邻顶点的一条直线所作的垂线,从而就可添加绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 由于已知 $EA\perp AB$, $MA\perp BC$,所以将 $\triangle AEM$ 绕正方形 $ABDE$ 的中心顺时针旋转 90°后,它的第三条边 EM 也必定落在过 A 而与 EM 垂直的直线上,于是过 A 作 EM 的垂线,并与 EG、BC 分别相交于 N、K,那末由 $EA=AB$, $\angle EAM=90°-\angle BAH=\angle ABK$, $\angle AEM=90°-\angle EAN=\angle BAK$,就可得 $\triangle AEM\cong\triangle BAK$, $EM=AK$. 根据同样的道理还可证明 $\triangle GMA\cong\triangle AKC$, $GM=AK$,所以分析可以完成.

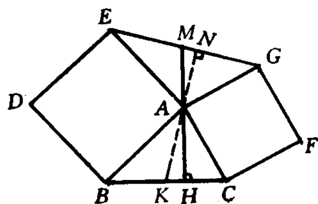


图 5・292

例 81 已知:$\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90°$,以 AB、AC 为边向外

作正方形 $ABDE$、$ACFG$，CA 的延长线交 EG 于 H. 求证：$BC=2AH$.

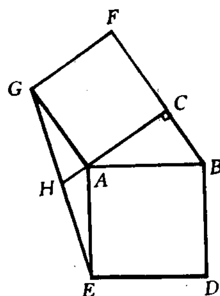


图 5・293

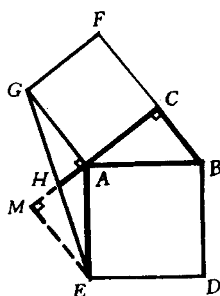


图 5・294

分析：本题的条件中出现了$\angle ACB=90°$和四边形 $ABDE$ 是正方形，所以 BC 就是由正方形 $ABDE$ 的顶点 B 向过它的相邻顶点 A 的直线 AC 所作的垂线，从而就可以添加绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 添加的方法是过 B 的对角顶点 E 向同一条直线作垂线，即过 E 作 $EM\perp AC$，交 CA 的延长线于 M，于是$\triangle ABC$ 就应和$\triangle EAM$ 全等. 全等的条件是 $AB=EA$，$\angle ACB=\angle EMA=90°$，$\angle BAC=90°-\angle EAM=\angle AEM$，也就可得 $BC=AM$，从而欲证的结论就可转化为 $AM=2AH$，即 H 是 AM 的中点. 而现在已有 AM、EG 相交于 H，所以要证明相等的两条线段 AH 和 MH 就位于一组对顶角$\angle AHG$ 和$\angle MHE$ 的两边且成一直线，所以可应用中心对称型全等三角形进行证明. 而由 $EM=AC=GA$，$\angle EMH=\angle GAH=90°$，$\angle EHM=\angle GHA$，就可证明$\triangle MHE\cong\triangle AHG$，$EH=GH$.

由于本题要证明的结论 $BC=2AH$ 是两条线段之间的倍半关系，且 H 应是 EG 的中点，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明.

若考虑将半线段 AH 取作中位线，则应添三角形的边，于是延长 GA 到 M，使 $AM=AG$，那末连结 EM 后，就应证 $AH /\!/ ME$. 由于在作出了 $AM=AG$ 后，再根据 $AG=AC$，就可得 $AM=AC$，而且 $AM \perp AC$，所以它们可组成一个等腰直角三角形，也就是半个正方形，而已知四边形 $ABDE$ 是正方形，它们有一个公共顶点 A，所以就出现一对旋转型全等三角形. 现在由公共顶点 A 发出的两组相等线段是 AC、AM 和 AB、AE，所以全等三角形应是$\triangle ABC$ 和$\triangle AEM$，全等的条件是 $AC=AM$，$AB=AE$，$\angle BAC=90°-\angle BAM=\angle EAM$，所以 $EM=BC$，$\angle EMA=\angle BCA=90°$，于是有 $AH /\!/ ME$，也就可得 $EM=2AH$，$BC=2AH$.

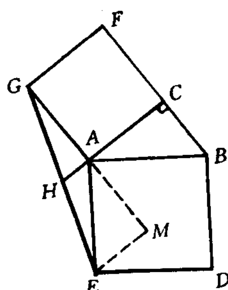


图 5・295

若考虑将倍线段 BC 取作三角形的边，则应添三角形的中位线. 这样首先应使 A 成为中点，于是延长 BA 到 K，使 $AK=AB$，并连结 CK 交 AG 于 M，则由 $AM /\!/ BC$，即可得 AM 是$\triangle KBC$ 的中位线，$BC=2AM$，因而接下来就应证 $AH=AM$.

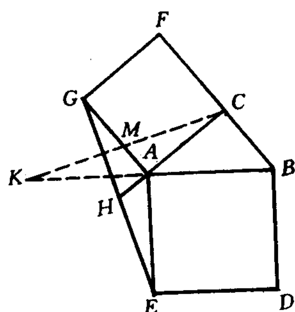


图 5・296

但由 $AK=AB=AE$，$AK \perp AE$ 可得 AK、AE 可组成一个等腰直角三角形，或半个正方形，它与已知的正方形 $ACFG$ 有一个公共的顶点 A，所以就出现了一对旋转型全等三角形. 于是由 $AE=AK$、$AG=AC$，可找到由它们两两组成的全等三角形应是$\triangle AEG$ 和$\triangle AKC$，而证明全等的第三个条件就是 $\angle EAG=90°+\angle KAG=\angle KAC$. 而要证明相等的这两条线段

AH、AM 分别是这两个全等三角形的对应线段，所以它们的相等是可以证明的. 也就是通过 $\angle ACM=\angle AGH$，$\angle CAM=\angle GAH=90°$ 和 $AC=AG$，在证明了 $\triangle ACM\cong\triangle AGH$ 后，就可以完成证明.

例 82 已知：E、F、G、H 依次是正方形 $ABCD$ 的四边上的点，且 $EG\perp FH$. 求证：$EG=FH$.

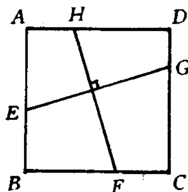


图 5・297

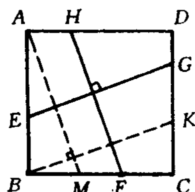


图 5・298

分析：本题条件中出现的两条垂直线段 EG 和 FH 并没有确定的位置上的要求，在画图时实际上也是任意给出的，所以这两条线段就可以分别在正方形的对边之间作平行移动，而不论移动到什么位置，其相等的性质都保持不变，所以就可以将它们分别平移到过正方形的顶点，于是分别过 A、B 作 $AM\parallel HF$，$BK\parallel EG$ 交 BC、CD 于 M、K，则由 $AM=HF$ 和 $BK=EG$，可得问题转化成要证 $AM=BK$.

由条件 $EG\perp FH$，也就可得 $AM\perp BK$，这样就出现了过正方形的顶点 A 向过它的相邻顶点 B 的一条直线 BK 所作的垂线，从而就可应用绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 也就可找到这两个全等三角形应是 $\triangle AMB$ 和 $\triangle BKC$，全等的条件就是 $\angle ABM=\angle BCK=90°$，$AB=BC$，并由 $\angle ABM=90°$ 和 $BK\perp AM$ 推得的 $\angle MAB=\angle KBC$. 所以 $AM=BK$ 就可以证明.

例 83 已知：正方形 $ABCD$ 中，AC、BD 相交于 O，E 是 BD 上的一点，$DF\perp CE$，垂足是 F 且交 AC 于 G. 求证：四边形 $BCGE$

是等腰梯形.

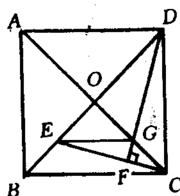


图 5・299

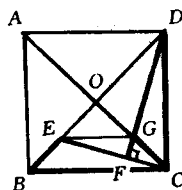


图 5・300

分析:本题条件中出现了 $DF \perp CE$,是过正方形的一个顶点 D 向过它的相邻顶点 C 的一条直线 CE 所作的垂线,所以就可应用绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 由于问题是要证 $BE=CG$,所以根据这两条线段所在的三角形就可找到这对全等三角形应是$\triangle BCE$ 和$\triangle CDG$,全等的条件应是 $BC=CD$,$\angle CBE=\angle DCG=45°$,$\angle BCE=90°-\angle ECD=\angle CDG$,从而就可证明 $BE=CG$,又因为 $OB=OC$,所以 $EG /\!/ BC$ 也就可以证明.

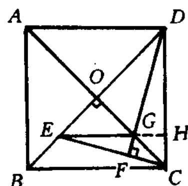


图 5・301

本题的条件中给出了 $DF \perp CE$,而由正方形的性质又可得 $CO \perp BO$,这样 DF 和 CO 就可看作是$\triangle DEC$ 的两条高,它们的交点 G 就是这个三角形的垂心. 那末根据三角形垂心的定义可知这个三角形的第三条高也必定经过 G 点,也就是 EG 应是第三条高的一部分,因此应先将第三条高添出,也就是延长 EG 交 CD 于 H,即可得 $EH \perp CD$,而已知 $BC \perp CD$,所以就有 $EG /\!/ BC$,又因为应用正方形的性质可得 $OB=OC$,所以 $BE=CG$ 也就可以证明.

例 84 已知:正方形 $ABCD$ 中,E 是 AB 上的一点,$BF \perp CE$,垂足是 G,且交 AD 于 F,AC、BD 相交于 O. 求证:$\triangle OEF$ 是等腰直角三角形.

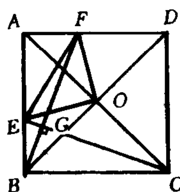


图 5・302

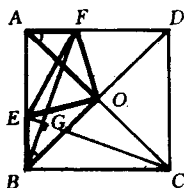


图 5・303

分析:本题要证明△OEF 是等腰直角三角形,而已知正方形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于 O,所以正方形 $ABCD$ 就被这两条对角线分成四个全等的等腰直角三角形,且它们都以 O 点为直角顶点.这样就出现了△OEF 和△OAB 是两个具有公共的直角顶点 O 的等腰直角三角形,所以也就出现了一对旋转型全等三角形.现在由 O 点发出的两组相等线段应是 OE、OF 和 OA、OB,所以它们两两组成的全等三角形就应是△OAF 和△OBE,全等的条件首先是 $OA=OB$,$\angle OAF=\angle OBE=45°$,由于 $OE=OF$ 是要证明的结论,所以还要另外证一个性质.由条件 $BF\perp CE$,出现了过正方形的一个顶点 C 向过它的相邻顶点 B 的一条直线 BF 所作的垂线,所以可应用绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明.那末由 $AB=BC$,$\angle FAB=\angle EBC=90°$和$\angle FBA=90°-\angle CBG=\angle ECB$,就可证明$\triangle ABF\cong\triangle BCE$,$AF=BE$,从而就可进一步证明$\triangle OAF\cong\triangle OBE$,$OF=OE$,$\angle FOA=\angle EOB$,而$\angle EOB+\angle EOA=90°$,所以$\angle EOF=\angle FOA+\angle EOA=90°$,就可以证明结论.

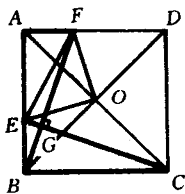


图 5・301

如我们选取△OEF 和△OAD 是两个具有公共的直角顶点 O 的等腰直角三角形,那末要证明的旋转型全等三角形就是△OAE 和△ODF,全等的条件首先也是 $OA=OD$,$\angle OAE=\angle ODF=$

$45°$，另外再由$\triangle ABF\cong\triangle BCE$，可得$AF=BE$，就可进一步推得$DF=AE$，从而也可完成分析.

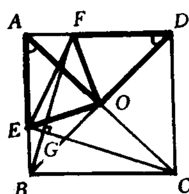


图 5・305

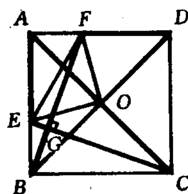


图 5・306

在上述分析中，在证明$\triangle OAE$和$\triangle ODF$全等的第三个条件，即$AE=DF$时，也可以从$CE\perp BF$出发，直接应用绕正方形的中心旋转$90°$的全等三角形来进行证明. 于是根据AE、DF绕正方形的中心旋转$90°$的位置就可找到这对全等三角形应是$\triangle ACE$和$\triangle DBF$，全等的条件是$AC=DB$，$\angle CAE=\angle BDF=45°$，且由$\angle CGB=90°$和$\angle COB=90°$可推得$\angle ACE=\angle DBF$，从而也就可得$AE=DF$，分析也可以完成.

如我们选取$\triangle OEF$和$\triangle ODC$是两个具有公共的直角顶点O的等腰直角三角形，那末要证明的全等三角形就应是$\triangle OED$和$\triangle OFC$，于是应先连结ED、FC. 在这两个三角形中首先有$OD=OC$，而在通过$\triangle ABF\cong\triangle BCE$得到$AE=DF$后，又可以证明$\triangle DEA\cong\triangle CFD$，$DE=CF$和$\angle EDA=\angle FCD$，从而可进一步推得$\angle ODE=\angle OCF$，这样也可完成分析.

如我们选取$\triangle OEF$和$\triangle OCB$是两个具有公共的直角顶点O的等腰直角三角形，那末要证明的旋转型全等三角形就是$\triangle OEC$和$\triangle OFB$，全等的条件是$OC=OB$，以及可由$\triangle ABF\cong\triangle BCE$推出的$CE=BF$，$\angle OCE=\angle OBF$，所以分析也可以完成.

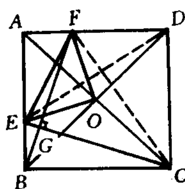


图 5・307

例 85 已知:正方形 $ABCD$ 中,$EF \parallel AC$ 且分别交 AB、CB 于 E、F,G 是 DA 的延长线上的一点,且 $AG=AD$,GE 的延长线交 DF 于 H. 求证:$AH=AD$.

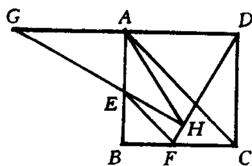


图 5・308

分析:本题要证明 $AH=AD$,而已知 $AG=AD$,所以 AH 应和 AG、AD 都相等,也就出现了三角形一边上的中线应等于这条边的一半,所以可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明. 这样要证明 $AH=AD=AG$,就可以转化为要证明它的等价性质 $\angle GHD=90°$.

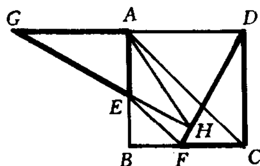


图 5・309

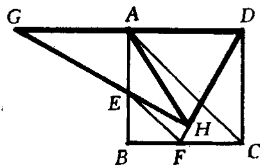


图 5・310

但 $\angle GHD=90°$ 这个性质一出现,由于 $AD=AG$,所以 GD 可以看作是以正方形 $ABCD$ 的边长的 2 倍作边长的正方形的一边,这样也就出现了过这个正方形的一个顶点 G 向过它的相邻顶点 D 的一条直线 DF 所作的垂线,从而就可应用绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 由于现在以 DG 为边长的正方形的中心应是点 B,所以就可以找到这一对全等三角形应是 $\triangle AGE$ 和 $\triangle CDF$. 全等的条件是 $AG=AD=CD$,由 $EF \parallel AC$ 和 $BA=BC$,可得 $AE=CF$,以及 $\angle GAE=\angle DCF=90°$,所以 $\angle AGE=\angle CDF$,而 $\angle CDF+\angle ADF=\angle CDA=90°$,所以就有 $\angle AGE+\angle ADF=90°$,$\angle GHD=90°$,分析就可以完成.

例 86 已知:E 是正方形 $ABCD$ 的边 BC 上的一点,过 E 作

AE 的垂线交$\angle C$ 的外角平分线于 F. 求证：$AE=FE$.

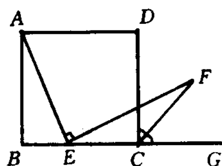


图 5·311

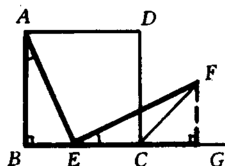


图 5·312

分析：本题要证 $AE=FE$，而已知 $AE\perp FE$，所以 AE 和 FE 就组成一个等腰直角三角形，或半个正方形. 因为条件中已给出了四边形 $ABCD$ 是正方形，$\angle ABE=90°$，所以就出现了过正方形的一个顶点 A，向过它的相邻顶点 E 的一条直线 EB 所作的垂线 AB，从而就可添加绕正方形的中心旋转 $90°$ 的全等三角形进行证明. 添加的方法是过 A 的对角顶点 F 向同一条直线 EB 作垂线，于是过 F 作 $FH\perp BC$ 交 BC 的延长线于 H，即可得$\triangle AEB$ 和$\triangle EFH$ 应是一对全等三角形. 全等的条件首先可以有$\angle ABE=\angle EHF=90°$，$\angle EAB=90°-\angle AEB=180°-90°-\angle AEB=\angle FEH$，所以还要证明一组边对应相等的条件. 由于 $AE=EF$ 是要证明的结论，不能用，所以只能考虑证 $BE=HF$，实质上也就是证 $AB=EH$. 但 $EH=EC+CH$，所以问题成为要证 AB 也等于 $EC+CH$. 于是可根据线段和的定义在 AB 上截取 $AK=EC$，那就可得 $BK=BE$，而这是两条具有公共端点的相等线段，它们可组成一个等腰三角形，于是连结 KE，而$\angle B=90°$，所以有 $\angle BKE=\angle BEK=45°$，这样，我们又可发现$\triangle AEK$ 和$\triangle EFC$ 也是一对绕正方形的中心旋转 $90°$的全等三角形，全等的条件是$\angle EAK=\angle FEC$，$AK=EC$ 和$\angle EAK=\angle FCE=135°$，所以 $EA=FE$ 可以证明. 当然由这两个三角形全等，可推得 $EK=$

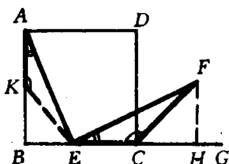


图 5·313

FC，所以 $BE=HF$，$\triangle AEB$ 和 $\triangle EFH$ 也都可以证明.

本题要证明 $AE=FE$，这是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形，于是连结 AF，成一个等腰三角形的判定问题，又因为已知 $\angle AEF=90°$，所以问题就应证 $\angle EAF=\angle EFA=45°$. 又因为 CF 是 $\angle C$ 的外角平分线，$\angle FCG=45°$，所以问题就应证 $\angle FCG=\angle EAF$，也就是要证 A、E、C、F 四点共圆. 由条件 $\angle AEF=90°$，所以应用圆周角的基本图形的性质可得连结 CA 后，应证 $\angle ACF=90°$，但 AC 是正方形的对角线，所以 $\angle ACD=45°$，又因为已知 $\angle DCF=45°$，所以 $\angle ACF=90°$ 可以证明，分析也就可以完成.

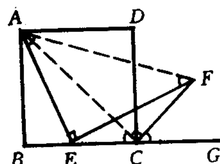


图 5・314

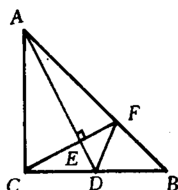


图 5・315

例 87 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，D 是 BC 的中点，$CF\perp AD$ 且分别交 AD、AB 于 E、F.

求证：$\angle ADC=\angle FDB$.

分析：本题的条件中给出了 $\triangle ABC$ 是一个等腰直角三角形、

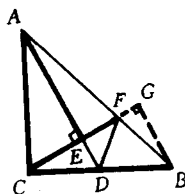


图 5・316

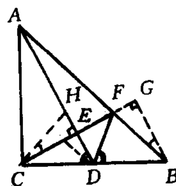


图 5・317

即半个正方形和 $CF\perp AD$，就出现了过正方形的一个顶点 A 向过它的相邻顶点 C 的一条直线所作的垂线，所以可添加绕正方形的中心旋转 $90°$ 的全等三角形进行证明. 添加的方法是过 A 的对角

顶点 B 向同一条直线 CF 作垂线，于是过 B 作 $BG\perp CF$ 交 CF 的延长线于 G. 从而就可得到$\triangle ACE$ 和$\triangle CBG$ 应是一对绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形，全等的条件是 $AC=CB$，$\angle AEC=\angle CGB=90°$和由$\angle ACD=\angle AEC=90°$推得的$\angle EAC=\angle GCB$. 于是就有 $CE=BG$，$\angle ACE=\angle CBG$.

现在结论中出现的$\angle FDB$ 是$\triangle FDB$ 的一个内角，而这个三角形的一条边 BF 是直角$\triangle BFG$ 的一条斜边，所以当$\triangle ACE$ 绕正方形的中心旋转 90°而成为$\triangle CBG$ 时，BF 也就应是$\triangle ACE$ 中的对应线段旋转 90°而得，所以又可以添加一次绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 由于$\angle CBA=45°$，所以作$\angle ACH=45°$交 AD 于 H，实际上也可以是作$\angle ACB$ 的角平分线或者是过 C 作 AB 的垂线. 于是由$\angle CEH=\angle BGF=90°$，$CE=BG$ 和由$\angle ACE=\angle CBG$，$\angle ACH=\angle CBF=45°$推得的$\angle ECH=\angle GBF$，就可证明$\triangle CEH\cong\triangle BGF$，它们也是一对绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形. 从而可得 $CH=BF$. 那末再由条件 $CD=BD$，$\angle DCH=\angle DBF=45°$，就可证明$\triangle DCH$ 和$\triangle DBF$ 是一对轴对称型全等三角形，所以$\angle ADC=\angle FDB$ 就可以证明.

本题的分析在过 B 作 $BG\perp CF$ 交 CF 的延长线于 G，并得到$\triangle ACE\cong\triangle CBG$ 后，就可得 $CE=BG$，$AE=CG$. 而由 $CD=BD$ 和 $DE\parallel BG$，又可得 $CE=EG$，所以 $CG=2BG$，也就有 $AE=2BG$. 而 AE、BG 是两条平行线段，它们的四个端点的两两的连线在 F 点相交，所以就出现了一对平行线型相似三角形，也就可得$\triangle AEF\backsim\triangle BGF$，$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{AE}{BG}=2$，从而有 $AF=2BF$. 这是两条线段之间的倍半关系，所以根据线段倍半关系的定义，取 AF 的中点 H 后，有 $AH=FH=BF$. 而条件中给出 D 是 CB 的中点，从而又

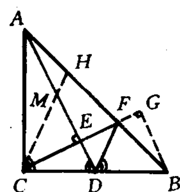


图 5 · 318

出现了多个中点，就可以应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 D、F 这两个中点所在的线段 CB、HB 具有公共端点 B，可以组成三角形，所以 DF 这两个中点的连线就是三角形的中位线，而现在图形中是有中位线但三角形不完整，所以应将三角形的边添上，也就是连结 CH，就可得 $DF \parallel CH$，$\angle FDB=\angle HCB$. 又因为 H 是 AF 的中点，且 $HC \parallel FD$，所以在 $\triangle ADF$ 中，如设 CH 与 AD 的交点为 M，就有 $AM=DM$. 这样又出现了 M 是直角 $\triangle ADC$ 的斜边的中点，所以可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质得 $MC=MD$，$\angle MCD=\angle ADC$，所以 $\angle ADC=\angle FDB$ 也就可以证明.

本题的分析在过 B 作 $BG \perp CF$ 垂足是 G，并得到 $\frac{AF}{BF}=2$ 后，由于这是线段之间的比例关系，经过描图以后又可以发现 AF、BF 这一组相比线段现在重叠在一直线上，所以可添加平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是过端点和内分点作平行线.

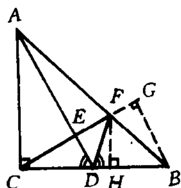


图 5·319

如取过端点 A 的线段 AC 为平行方向线段，则平行线可过内分点 F 作，于是过 F 作 $FH \parallel AC$ 交 CB 于 H. 就可得 $\triangle BFH \backsim \triangle BAC$，$\frac{BH}{BC}=\frac{FH}{AC}=\frac{BF}{BA}=\frac{1}{3}$. 而已知 D 是 BC 的中点，所以 $DH=DB-BH=DB-\frac{1}{3}BC=DB-\frac{1}{3}\cdot 2BD=\frac{1}{3}BD$，$\frac{DH}{DB}=\frac{DH}{CD}=\frac{1}{3}$，$\frac{DH}{DC}=\frac{FH}{AC}$，且 $\angle FHD=\angle ACD=90^\circ$，所以 $\triangle FHD \backsim \triangle ACD$，从而也就可以证明 $\angle ADC=\angle FDB$.

若取过内分点 F 的线段 FD 为平行方向线段，则平行线可过端点 A 作，于是过 A 作 $AH \parallel FD$ 交 BC 的延长线于 H，就可得 $\triangle BFD \backsim \triangle BAH$，$\angle FDB=\angle AHB$，$\frac{BD}{BH}=\frac{BF}{BA}=\frac{1}{3}$，而 $BC=$

$2BD$，所以$\frac{BC}{BH}=\frac{2BD}{BH}=\frac{2}{3}$，从而就有$HC=CD=BD$，但$AC\perp DH$，也就可得$\angle AHB=\angle ADC$，分析就可以完成.

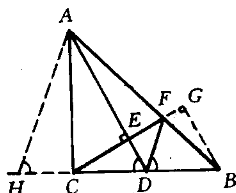


图 5・320

在取FD为平行方向线段时，平行线也可以过另一个端点B作，所以过B作$BH\parallel FD$交AD的延长线于H，即可得$\frac{AD}{DH}=\frac{AF}{BF}=2$，$AD=2DH$. $\angle FDB=\angle HBD$，而$\angle ADC=\angle HDB$，所以问题就成为要证$\angle HBD=\angle HDB$. 但由$AD=2DH$，可得根据线段倍半关系的定义，取AD的中点K后，有$AK=DK=DH$. 但现在出现了K是直角$\triangle ADC$的斜边的中点，所以可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明，于是连结CK，就可得$KC=KD$，$\angle KCD=\angle KDC$. 但由$CD=BD$，$KD=HD$和$\angle KDC=\angle HDB$，又可证得$\triangle KDC$和$\triangle HDB$是一对中心对称型的全等三角形，所以分析可以完成.

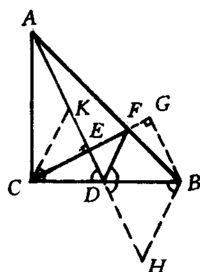


图 5・321

若取过端点B的线段BD为平行方向线段，则平行线可过另一个端点A作，并应作到与过内分点的直线相交，所以过A作$AH\parallel DB$交DF的延长线于H，就可得$\triangle AHF\backsim\triangle BDF$，$\frac{AH}{BD}=\frac{AF}{BF}=2$，所以$AH=CB$. 而由$AH\parallel CB$，又可得四边形$ACBH$是正方形，从而应先连结$BH$，那末再由$CD=BD$，就可得$\triangle ADC$和$\triangle HDB$应是一对轴对称型全等三角形，所以也可以完成分析.

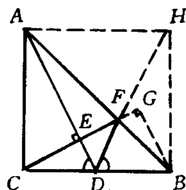


图 5・322

在取 BD 为平行方向线段时，平行线也可以过内分点 F 作，于是过 F 作 $FH /\!/ BD$ 交 AD 于 H，即可得 $\frac{DH}{DA} = \frac{BF}{BA} = \frac{1}{3}$. 但在作出 $FH /\!/ BD$ 后就可得 $\angle ADC = \angle DHF$，$\angle FDB = \angle DFH$，这样问题就转化为要证 $\angle DHF = \angle DFH$，$DF = DH$. 而由 $FH /\!/ BD$，又可得 $\triangle AFH \backsim \triangle ABD$，$\frac{FH}{BD} = \frac{AF}{AB} = \frac{2}{3}$，而 $CD = BD$，所以 $\frac{FH}{CD} = \frac{2}{3}$. 但这是两条平行线段，它们的四个端点的两两连线相交于 E，从而又可得一对平行线型相似三角形，即 $\triangle FEH \backsim \triangle CED$，所以有 $\frac{HE}{DE} = \frac{FH}{CD} = \frac{2}{3}$. 也就是如设 HE 为 2 份，则 DE 为 3 份，当然 DH 就是 5 份，但

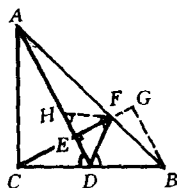


图 5 · 323

已证 $GE = BG = 2DE$ 应是 6 份，而 $\frac{GF}{EF} = \frac{1}{2}$，所以 EF 就是 4 份. 又因为 $\angle DEF = 90°$，所以这个直角三角形的斜边 DF 就可以应用勾股定理算得也是 5 份，从而就可证明 $DH = DF$.

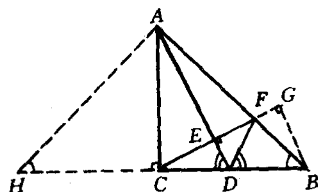


图 5 · 324

在上述分析中，我们又发现 DF 和 DA 之比也是 1 : 3，而这两条线段又分别是我们要证明相等的两个角的边，所以只要另外一组边的比也等于 $\frac{1}{3}$，就可以构成相似三角形，于是延长 DC 到 H，使 $DH = 3DB$，并连结 AH，那末问题就成为要证 $\triangle AHD \backsim \triangle FBD$. 由所作的 $DH = 3DB$ 和已知的 $CD = BD$，就可得 $HC = 2DB = BC = AC$，而 $\angle ACH = 90°$，所以又可推得 $\angle H = 45°$，$\angle H = \angle FBD$，和 $AH = AB$，$\frac{BF}{AH} = \frac{BF}{BA} = \frac{1}{3}$，$\frac{DH}{DB} = \frac{AH}{FB}$，所以 $\triangle AHD \backsim$

$\triangle FBD$ 可以证明,也就可得$\angle ADC=\angle FDB$.

由本题的条件$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形和 $CF\perp AD$,就可想到要添加绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 添加的方法是将三角形绕正方形的中心旋转 90°. 所以除了考虑将$\triangle ACE$ 绕正方形的中心旋转 90°这种可能性外,也可考虑将$\triangle ADC$ 绕正方形的中心旋转 90°. 由条件$\angle ACD=90°$和 $CE\perp AD$,应用直角三角形斜边上的高的基本图形性质可得$\angle BCF=\angle CAD$,所以将$\triangle ADC$ 绕正方形的中心逆时针旋转 90°后,AC 就成为 CB,AD 就应沿 CF 落下,而 CD 就应位于过 B 所作 CB 的垂线上,所以就应过 B 作 $BG\perp CB$ 交 CF 的延长线于 G,即可证明$\triangle ADC\cong\triangle CGB$,$CD=BG$,$\angle ADC=\angle CGB$,于是问题就成为要证$\angle CGB=\angle FDB$. 但$\angle ABC=45°$,又可得$\angle FBD=\angle FBG=45°$,由条件 $CD=BD$,又可得 $BD=BG$,且 $BF=BF$,从而可证明$\triangle FBD\cong\triangle FBG$,是一对轴对称型全等三角形,分析完成.

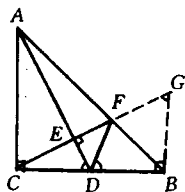


图 5・325

若在添加绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形时,考虑将$\triangle CBF$ 进行旋转,那末由$\angle B=45°$,就可得应过 C 作 AB 的垂线,或者也就是作$\angle ACB$ 的角平分线交 AD 于 G,也就可由$\angle CAG=\angle BCF$,$CA=BC$ 和$\angle ACG=\angle CBF$ 得$\triangle ACG\cong\triangle CBF$,$CG=BF$. 那末再由$\angle GCD=\angle FBD=45°$和 $CD=BD$,就可推得$\triangle GDC$ 和$\triangle FDB$ 是一对轴对称型全等三角形,分析也就可以完成.

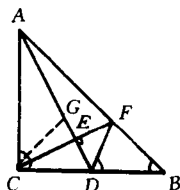


图 5・326

本题要证明$\angle ADC=\angle FDB$,而已知 $CD=BD$,所以这两个相等的角是关于 BD 的垂直平分线成轴对称的,从而就可添加轴对称型全等三角形进行证明. 由于现在图形中没有对称轴,所以首先考虑将对称轴添上,也就是过 D 作 BC 的垂线交 AB 于 G. 由于

$\angle ACB=90°$，就可得 $DG \parallel CA$，$BG=AG$. 由于现在出现了等腰三角形底边的中点，所以可添加等腰三角形中的重要线段的基本图形进行证明，于是连结 CG 且交 AD 于 H. 从而可得 $\triangle ACG$ 也是等腰直角三角形. 那末由 $GA=GC$，$\angle AGH=\angle CGF=90°$和$\angle AGC=\angle AEC=90°$推得的$\angle GAH=\angle GCF$，就可得$\triangle AGH\cong\triangle CGF$，$GH=GF$. 这样再由$\angle DGH=\angle DGF=45°$和 $DG=DG$，就可证明$\triangle DGH\cong\triangle DGF$，$\angle HDG=\angle FDG$，从而也就可证明$\angle ADC=\angle FDB$.

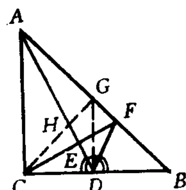


图 5・327

例 88　已知：以$\triangle ABC$ 的边 AB、AC 为边向外作正方形 $ABDE$、$ACFG$，过 BC 的中点 N 作 $MN\perp BC$ 交 DF 于 M. 求证：$DM=FM$.

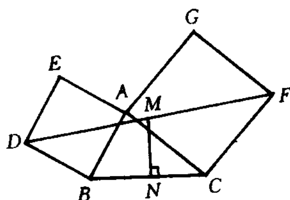


图 5・328

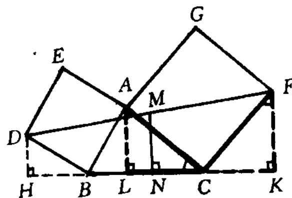


图 5・329

分析：本题的条件中出现了 $MN\perp BC$，是向过正方形 $ACFG$ 的顶点 C 的一条直线 CB 所作的垂线，所以可添加绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 添加的方法是过 C 的相邻顶点 A 和 F 向同一条直线 BC 作垂线，即作 $AL\perp BC$、$FK\perp BC$，垂足分别为 L、K. 于是由 $AC=CF$、$\angle ALC=\angle CKF=90°$和由$\angle ACL+\angle FCK=180°-90°=90°$、$\angle CFK+\angle FCK=90°$推得的$\angle ACL=\angle CFK$，就可证明$\triangle ACL\cong\triangle CFK$，$AL=CK$. 根据同样的道理，作 $DH\perp BC$ 且交 CB 的延长线于 H 后，可得$\triangle ABL\cong$

$\triangle BDH$，$AL=BH$. 于是就得 $CK=BH$. 而已知 $BN=CN$，即可得 N 是 HK 的中点，而要证明的结论是 $DM=FM$，所以由 $HN=KN$ 和 $DH /\!/ MN /\!/ FK$ 就可以完成证明.

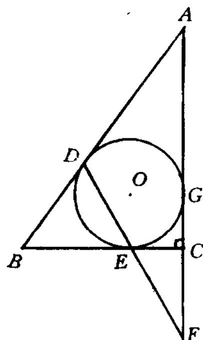


图 5・330

例 89 已知：$\odot O$ 是直角 $\triangle ABC$ 的内切圆，$\angle C=90°$，D、E、G 为切点，DE 的延长线交 AC 的延长线于 F. 求证：$CF=BD$.

分析：由 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，D、E 是切点，应用切线长定理可得 $BD=BE$，从而问题就转化为要证 $CF=EB$.

又由 CB、CA 与 $\odot O$ 相切于 E、G，所以应用切线的性质可得连结 OE、OG 后，有 $\angle OEC=\angle OGC=90°$，而已知 $\angle C=90°$，且可证得 $CE=CG$ 或 $OE=OG$，所以可得四边形 $OECG$ 是正方形. 而已知 $\angle ECF=90°$，这样就出现了 BE 可以看作是过正方形 $OECG$ 的顶点 E 向过它的相邻顶点 C 的一条直线 AF 所作的垂线，从而就可添加绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 由于 $OE=EC$，$\angle OEB=\angle ECF=90°$，而要证明的性质是 $EB=CF$，这样就可找到这一对全等三角形应是 $\triangle OBE$ 和 $\triangle EFC$. 而要证明这两个三角形全等，现在还需要再证明一个条件. 由 DF、BC 相交于 E，$\angle CEF=\angle DEB$，所以第三个条件可证 $\angle CEF=\angle EOB$，也就进一步转化为要证 $\angle DEB=\angle EOB$. 但我们已证 $\angle OEB=90°$，应用切线长定理及其推论又可得 $DE\perp BO$，所以应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，就可以证明上述性质.

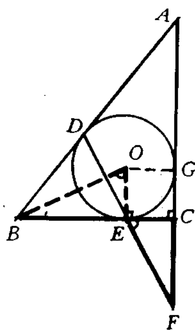


图 5・331

例 90 已知：以$\triangle ABC$的边AB、AC为边向外作正方形$ABDE$、$ACFG$，且满足$DF /\!/ BC$. 求证：$AB=AC$.

分析：本题要证明$AB=AC$，所以条件中出现的两个正方形应是大小相同的正方形，所以这个图形实质上是一个轴对称图形，

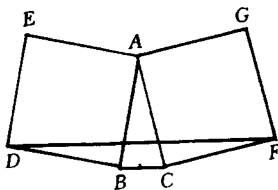


图 5・332

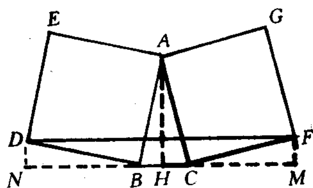


图 5・333

这样就可以添加轴对称型全等三角形进行证明. 由于现在图形中没有出现对称轴，所以可先将对称轴添上，也就是过A作$AH \perp BC$交BC于H，那末问题也就成为要证$\triangle ABH \cong \triangle ACH$.

但在作了$AH \perp BC$后，AH就成了由正方形的顶点A向过它的相邻顶点C(或B)的一条直线BC所作的垂线，于是可添加绕正方形的中心旋转$90°$的全等三角形进行证明. 添加的方法是过A的对角顶点F向同一条直线BC作垂线，即作$FM \perp BC$交BC的延长线于M，那末由$CA=FC$，$\angle AHC=\angle CMF$和$\angle ACH=90°-\angle MCF=\angle CFM$，就可证明$\triangle ACH \cong \triangle CFM$，$FM=CH$. 根据同样的道理，作$DN \perp BC$交$CB$的延长线于$N$后，又可以证明$\triangle ABH \cong \triangle BDN$，$DN=BH$，而由条件$DF /\!/ BC$，可得$FM=DN$，从而就可证明$BH=CH$. 这样再由$\angle AHB=\angle AHC=90°$，就可证明$AB=AC$.

例 91 已知：四边形$ABDC$、$CDFE$、$EFHG$是三个连续的正方形，$\angle ADB=\angle\alpha$，$\angle AFB=\angle\beta$，$\angle AHB=\angle\gamma$. 求证：$\angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma=90°$.

分析：由条件AD是正方形$ABDC$的对角线，就可得$\angle\alpha=$

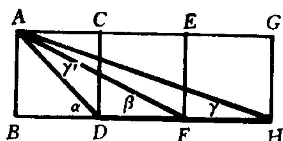


图 5・334

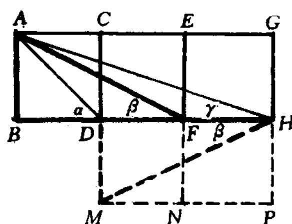


图 5・335

45°，所以问题实质上是要证明$\angle\beta+\angle\gamma=45°$. 这是一个两角和的问题，所以可根据两个角的和的定义将这两个角拼起来，也就是可将$\angle\beta$拼到$\angle\gamma$上或者将$\angle\gamma$拼到$\angle\beta$上.

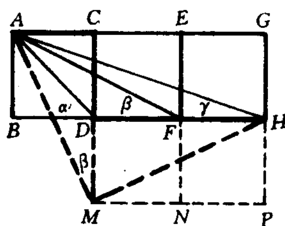


图 5・336

由于$\angle\beta$是两个连续正方形所组成的长方形的对角线与较长的一条边的夹角，所以将$\angle\beta$拼到$\angle\gamma$上去的时候，可直接应用两个连续的正方形来拼. 也就是以 DF 和 FH 为边向外再作两个连续的正方形 $DMNF$ 和 $FNPH$，这样 MH 也是两个连续的正方形所组成的长方形的对角线，于是连结 MH 后，由 $AB=MD$，$\angle ABF=\angle MDH=90°$和 $BF=DH$，可得$\triangle ABF\cong\triangle MDH$，$\angle AFB=\angle MHD=\angle\beta$. 于是问题就成为要证$\angle\beta+\angle\gamma=\angle MHA=45°$.

由于现在出现了一个 45°的特殊角，所以可添加特殊角三角形，而且是 45°角的特殊角三角形进行证明. 由于 AH 和 MH 是这个 45°角的两边，所以连结 AM，应证$\triangle MAH$ 是一个等腰直角三角形或半个正方形. 但我们已知 $HD\perp MC$，$MC\perp AC$，就出现了过正方形的一个顶点向过它的相邻顶点的一条直线所作的垂线，从而就可应用绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 于

是由 $AC=MD$，$\angle ACM=\angle MDH=90°$和 $CM=DH$，就可推得 $\triangle ACM \cong \triangle MDH$，$AM=MH$，$\angle AMC=\angle MHD$，而$\angle MHD+\angle HMD=90°$，所以$\angle AMH=\angle AMC+\angle HMD$ 也等于 90°，也就可以证明$\angle MHA=45°$.

本题要证明$\angle\beta+\angle\gamma=45°$，但已知$\angle\alpha=45°$，所以问题就是要证$\angle\alpha=\angle\beta+\angle\gamma$. 又因为 B、D、H 成一直线，$\angle\alpha$ 可以看作是$\triangle ADH$ 的一个外角，所以$\angle\alpha=\angle\beta+\angle DAF$. 令$\angle DAF=\angle\gamma'$，则$\angle\alpha=\angle\beta+\angle\gamma'$. 比较上述两个关系式，可发现现在的问题就是要证$\angle\gamma=\angle\gamma'$. 但这两个角相等的关系一出现，就出现了 AF 是$\triangle DAH$ 内过顶点 A 所作的边 AH 的逆平行线，所以可应用逆平行线型相似三角形进行证明. 于是就可找到这对相似三角形应是$\triangle DFA$ 和$\triangle DAH$，由于$\angle FDA=\angle ADH$ 是这两个三角形的公共角，所以问题就转化为证$\angle\gamma=\angle\gamma'$ 或者也就是$\angle FAD=\angle AHD$ 的等价性质 $DA^2=DF\cdot DH$，由于 DA 是正方形 $ABDC$ 的对角线，应是正方形边长的 $\sqrt{2}$ 倍，而 DF 就是正方形的边长，DH 是正方形边长的 2 倍，所以上述关系式一定成立，分析也就可以完成.

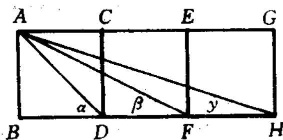


图 5・337

例 92 已知：四边形 $ABCD$、$EFGH$ 都是正方形，K、L、M、N 分别是 AE、BF、CG、DH 的中点. 求证：四边形 $KLMN$ 是正方形.

分析：由条件 K、L、M、N 分别是 AE、BF、CG、DH 的中点，出现了多个中点问题，所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 由于现在已知中点 K、L、M、N 所在的线段 AE、BF、CG、DH 没有公共的端点，不能组成三角形，所以这四个中点中每两个依次的连线 KL、LM、MN、NK 就不是三角形的中位线，从而就要增加中点，且应增加与已知中点所在的线段有公共端点的线段的中点. 如对线段 AE、BF 来说，分别取 E 和 B 为公共端点，则

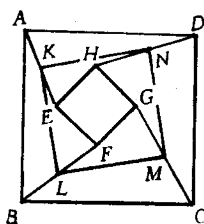


图 5 · 338

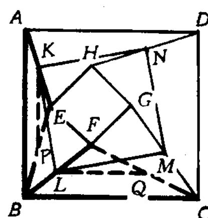


图 5 · 339

连结 BE，并取 BE 的中点 P，这样具有公共端点 E 的线段 EA、EB 就组成$\triangle ABE$，所以 KP 这两个中点的连线就是三角形的中位线，而现在图形中是有三角形而没有中位线，所以应将中位线添上，即连结 KP，就可得 $KP /\!/ AB$，$KP=\frac{1}{2}AB$. 根据同样的道理连结 PL 后又可得 $PL /\!/ EF$，$PL=\frac{1}{2}EF$.

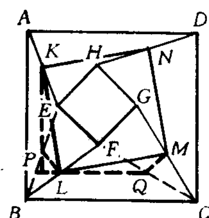


图 5 · 340

以上的分析是对已知中点 K 和 L 来进行的，那末对已知中点 L、M 也可以用同样的方法进行分析. 于是连结 CF，取 CF 的中点 Q，连结 LQ、MQ，可得 $LQ /\!/ BC$，$LQ=\frac{1}{2}BC$，$QM /\!/ FG$，$QM=\frac{1}{2}FG$. 由条件四边形 $ABCD$ 是正方形，可得 $AB \perp BC$，所以 $KP \perp LQ$. 而要证的结论是四边形 $KLMN$ 是正方形，这样就出现了过正方形的顶点 L 向过它的相邻顶点 K 的一条直线 KP 所作的垂线 LQ，所以可应用绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形进行证明. 而根据图形的旋转关系就可以找到这对全等三角形应是$\triangle KPL$ 和$\triangle LQM$. 全等的条件是 $KP=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}BC=LQ$，$PL=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}FG=QM$，以及由 $KP \perp LQ$，$PL \perp QM$ 得到的$\angle KPL=\angle LQM$. 所以 $KL=LM$，同理可证 $KL=LM=MN=NK$. 由这

两个三角形全等，还可得$\angle PKL=\angle QLM$. 而已证$LQ\perp KP$，所以根据垂线的定义延长QL交KP的延长线于T后，可得$\angle KTL=90°$，所以$\angle PKL+\angle KLT=90°$，$\angle QLM+\angle KLT=90°$，$\angle KLM=180°-90°=90°$，从而就可证明四边形$KLMN$是正方形.

例 93 已知：$\triangle ABC$内接于$\odot O$，$\angle A$的外角平分线交$\odot O$于F，$FG\perp AB$垂足是G. 求证：$AB-AC=2AG$.

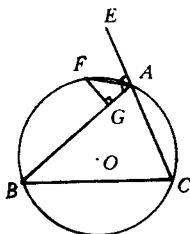


图 5・341

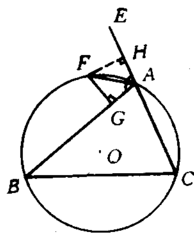


图 5・342

分析：本题的条件中出现了AF是$\angle BAE$的角平分线，且$FG\perp AB$，是角平分线上的点到角的一边的距离，所以可应用角平分线的性质，或者也就是可添加轴对称型全等三角形进行证明. 于是过F作$FH\perp AE$，垂足是H，即可得$\triangle AFG\cong\triangle AFH$，$FG=FH$，$AG=AH$.

又因为条件中给出了A、F、B、C四点共圆，所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 于是连结FB、FC后，可得$\angle FAB=\angle FCB$，而由C、A、E成一直线，又可得$\angle FAE=\angle FBC$. 而已知$\angle FAB=\angle FAE$，所以$\angle FCB=\angle FBC$，$FB=FC$.

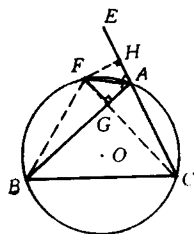


图 5・343

现在图形中就出现了由F点发出的两组相等线段，所以就可

考虑应用旋转型全等三角形进行证明. 根据由两组相等线段两两构成全等三角形的方法，就可找到这对全等三角形应是$\triangle FBG$和$\triangle FCH$，全等的条件是$FB=FC$，$FG=FH$，以及$\angle FGB=\angle FHC=90^\circ$，所以$BG=CH$. 于是就有$AB-AC=BG+AG-(CH-AH)=AG+AH=2AG$.

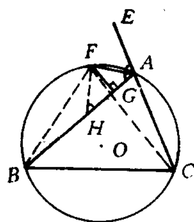


图 5・344

本题要证明$AB-AC=2AG$，所以也可根据线段和差的定义，在AB上先截取$2AG$，也就是在GB上截取$GH=AG$，那末问题就是要证$BH=CA$.

但在作出了$AG=HG$后，由于已知$FG\perp AH$，所以FG就是AH的垂直平分线，所以可应用线段垂直平分线的性质，或者也就是应用一次轴对称型全等三角形进行证明，于是连结FH，可得$\triangle FGA\cong\triangle FGH$，$FA=FH$. 另一方面，由$A$、$F$、$B$、$C$四点共圆，可知连结$FB$、$FC$后，可得$\angle FBC=\angle FCB$，$FB=FC$. 这样又出现了由$F$点发出的两组相等线段，所以可考虑应用旋转型全等三角形进行证明. 根据由两组相等线段两两组成全等三角形的方法，可找到这对全等三角形应是$\triangle FBH$和$\triangle FCA$. 全等的条件是$FB=FC$，由A、F、B、C四点共圆，得到的$\angle FBH=\angle FCA$，以及由$FH=FA$，$\angle FHA=\angle FAH=\angle FAE$推得的$\angle FHB=\angle FAC$，从而也可完成分析.

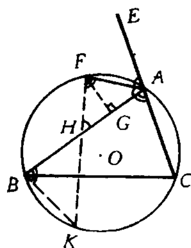


图 5・345

本题在截取$GH=GA$，并连结FH，证得$FH=FA$，$\angle FHA=\angle FAH$后，也可以进一步推得$\angle BAC=\angle HFA$.

由于$\angle HFA$也是$\odot O$的一个圆周角，所以也可以应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 但现在$\angle HFA$的一边FH还没有与$\odot O$相交，所以应延长到相交，也就是延长FH交$\odot O$于K，

并连结 BK，就可得$\angle ABK=\angle AFK$，所以$\angle ABK=\angle BAC$，进一步就可得$\overset{\frown}{BKC}=\overset{\frown}{KCA}$，$\overset{\frown}{BK}=\overset{\frown}{AC}$，$BK=AC$. 而由$\angle FHA=\angle BHK$，$B$、$K$、$A$、$F$ 四点共圆，$\angle BKF=\angle BAF$，以及$\angle FHA=\angle FAH$，又可得$\angle BHK=\angle BKH$，$BH=BK$，所以也可以证明 $BH=CA$.

例 94 已知：⊙O 中，AB 是弦，将 AB 向两方分别延长到 C、D，使 $AC=BD$，CE、DF 分别与⊙O 相切于 E、F，EF 交 AB 于 G. 求证：$AG=BG$.

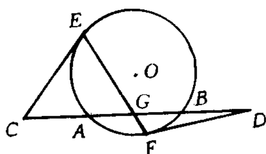


图 5・346

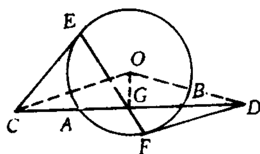


图 5・347

分析：本题要证明 $AG=BG$，出现了弦的中点，所以连结 OG，应证 $OG\perp AB$. 但由 $AC=BD$，可知在证 $AG=BG$ 时，同时也就有 $CG=DG$，从而就出现了 OG 应是 CD 的垂直平分线，于是应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质，连结 OC、OD 后，应证 $OC=OD$. 又因为 CE、DF 分别与⊙O 相切于 E、F，所以应用切线的性质，连结 OE、OF 后，可得$\angle OEC=\angle OFD=90°$，但因 $OE=OF$，所以就出现了由 O 点发出的两组相等线段，从而可考虑应用旋转型全等三角形进行证明. 根据由这两组相等线段两两组成全等三角形的方法，可知应证$\triangle OCE\cong\triangle ODF$，由于 $OE=OF$ 和$\angle OEC=\angle OFD=90°$，所以还要证明一个性质. 由条件 CE 是⊙O 的切线，CAB 是割线，应用切割线定理可得 $CE^2=CA\cdot CB$，根据同样的道理可得 $DF^2=DB\cdot DA$，而 $AC=BD$，BC

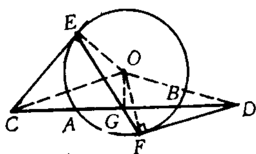


图 5・348

$=AD$，所以 $CE=DF$. 在得到了这两个三角形全等后，即得 $OC=OD$. $\angle COE=\angle DOF$，$\angle EOF=\angle COD$，也就是$\triangle OCD$ 和$\triangle OEF$ 是两个顶角相等的等腰三角形，所以它们的底角相等，也就是 $\angle ODC=\angle OFE$，就可得 O、D、F、G 四点共圆，$\angle OGD=\angle OFD=90°$，从而就可以完成分析.

本题要证明 $AG=BG$，但已知 $AC=BD$，所以应证 $CG=DG$，而 EF、CD 在 G 点相交，所以就出现了这两条要证明相等的线段在一组对顶角，即$\angle CGE$ 和$\angle DGF$ 的两边且成一直线，所以可添加中心对称型全等三角形进行证明. 于是过 C 作 $CH /\!/ FD$ 交 EF 于 H，问题就成为要证$\triangle CGH \cong \triangle DGF$. 由条件 $\angle CGH=\angle DGF$ 和由 $CH /\!/ FD$，得到的 $\angle CHG=\angle DFG$，可知还应证明一组边对应相等. 由条件 CE、DF 分别与$\odot O$ 相切于 E、F，CD 是$\odot O$ 的割线和 $AC=BD$，应用切割线定理可得 $DF=CE$，所以问题就成为要证 DF 的对应边 CH 也和 CE 相等，也就是应证$\angle CEH=\angle CHE$，但$\angle CEH$ 是弦切角，$\angle DFE$ 也是弦切角，它们所夹的两条弧之和正好是一个圆周，所以$\angle CEH+\angle DFE=180°$，而 $\angle CHE+\angle CHF=180°$，且 $\angle CHF=\angle DFE$，从而就可以证明 $\angle CEH=\angle CHE$，分析就可以完成.

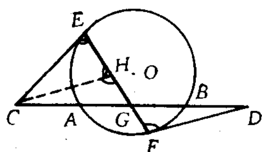


图 5・349

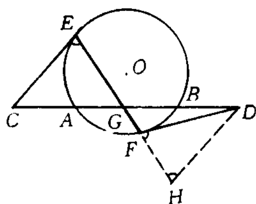


图 5・350

本题的分析在添加中心对称型的全等三角形时，平行线也可过另一个端点 D 作，也就是过 D 作 $DH /\!/ EC$ 交 EF 的延长线于 H，则也可以证明$\angle CGE=\angle DGH$，$\angle CEG=\angle DHG$，$\angle DFG+\angle CEG=180°$，$\angle DFG+\angle DFH=180°$，$\angle CEG=\angle DFH$，$\angle DFH=\angle DHF$，$DF=DH$，那末再由 $DF=CE$ 也就可完成分析.

图 5・351　　　　图 5・352

本题的分析在过端点作平行线时，如取过中点的线段 EF 为平行方向线段，则中心对称型全等三角形就不再出现，而成为三角形的中位线的基本图形的应用问题. 也就是过 D 作 $DH // FE$ 交 CE 的延长线于 H，可得四边形 $FDHE$ 是梯形，但 CH、DF 分别与⊙O 相切于 E、F，EF 是连接切点的弦，所以 $\angle DFE=\angle HEF$，四边形 $EDHE$ 是等腰梯形，$DF=EH$，而由切割线定理的应用又可得 $DF=CE$，所以 $CE=HE$，而 $EG // HD$，就可证明 $CG=DG$.

如平行线过端点 C 作，则过 C 作 $CH // EF$ 交 DF 的延长线于 H，就可以由 CE、DH 与⊙O 相切于 E、F，得 $\angle CEF=\angle HFE$，$HF=CE$，而我们可证 $CE=DF$，所以 $HF=DF$，从而再由 $HC // FG$ 也可证明 $CG=DG$，分析也就可以完成.

第四节　平移型

【分析方法导引】

如果几何问题中出现两个具有公共边的平行四边形时，就可以想到要应用平移型全等三角形进行证明. 然后可根据过公共边的两个端点的两组边分别组成的三角形就是平移型全等三角形的方法，找

到全等三角形，并进而完成分析.

例 95 已知：以▱$ABCD$ 的一组对边 AB、CD 为边向形外作

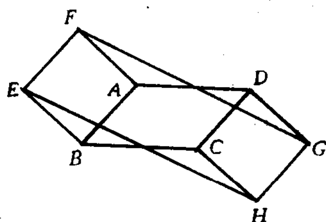


图 5・353

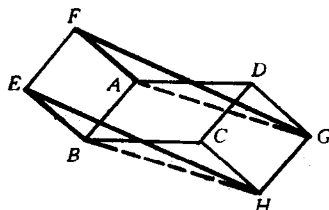


图 5・354

正方形 $ABEF$、$CDGH$. 求证：$\angle BEH=\angle AFG$.

分析：由条件▱$ABCD$ 和正方形 $CDGH$ 具有一条公共边 CD，所以必定出现一对平移型全等三角形，也就是连结 AG、BH 后，可得 $\triangle ADG\cong\triangle BCH$. 全等的条件是 $AD=BC$，$DG=CH$，$\angle ADG=\angle BCH$. 所以 $AG=BH$. 四边形 $ABHG$ 也是平行四边形. 这样又出现了▱$ABHG$ 与正方形 $ABEF$ 具有一条公共边 AB，所以又出现一对平移型全等三角形，也就是可得 $\triangle AFG\cong\triangle BEH$，全等条件是 $AF=BE$，$AG=BH$，$\angle FAG=\angle EBH$，所以结论就可以证明.

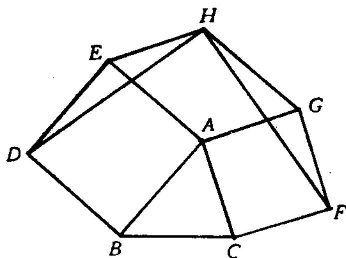


图 5・355

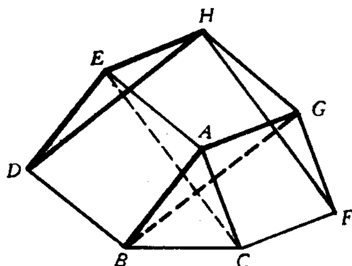


图 5・356

例 96 已知：以$\triangle ABC$的边AB、AC为边向形外作正方形$ABDE$、$ACFG$，再以AE、AG为邻边作$\square AEHG$. 求证：$HD=HF$，$HD\perp HF$.

分析：本题条件中出现了正方形$ABDE$和$\square AEHG$有一条公共边AE，所以可应用平移型全等三角形进行证明. 于是连结BG后，就可由$AB=ED$，$AG=EH$，$\angle BAG=\angle DEH$得$\triangle ABG\cong\triangle EDH$，$BG=DH$，$BG\parallel DH$. 根据同样的道理，连结$CE$后，也可证得$CE=FH$，$CE\parallel FH$.

又因为正方形$ABDE$、$ACFG$是两个具有公共顶点A的正方形，所以必定出现一对旋转型全等三角形. 于是由$AE=AB$，$AC=AG$，$\angle CAE=90°+\angle BAC=\angle GAB$，就可证明$\triangle AEC\cong\triangle ABG$，$EC=BG$，$EC\perp BG$，所以结论也就可以证明.

例 97 已知：P是$\square ABCD$内的一点，且$\angle PAB=\angle PCB$. 求证：$\angle PBA=\angle PDA$.

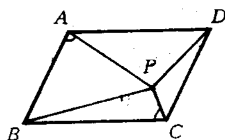


图 5・357

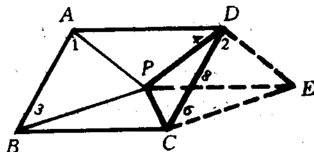


图 5・358

分析：本题条件和结论中的四个角的顶点在平行四边形的四个顶点上，不易建立它们之间的等量关系，所以应考虑改变它们的位置. 由于条件中出现了四边形$ABCD$是平行四边形，且未出现直接与圆有关的性质，所以首先应考虑将角进行平移. 从图形中我们还可以发现，将四个角中的任意一个角进行平移，其实质都是一样的，所以我们可以仅讨论其中的一种，即将$\angle PAB$（记作$\angle 1$）进行平移的情况.

由于四边形$ABCD$是平行四边形，所以将$\angle 1$进行平移时，

可以考虑两个方向，即沿 AD 或 AB 方向进行平移.

若考虑将 $\angle 1$ 沿 AD 方向平行移动到以 D 为顶点，则实质上也就是将 AP 平移到过 D 点，于是以 CD 为边，D 为顶点作 $\angle CDE=\angle 1$（将 $\angle CDE$ 记作 $\angle 5$），并取 $DE=AP$. 则因四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle 1+\angle PAD+\angle ADC=180°$，所以 $\angle 5+\angle PAD+\angle ADC=180°$，$DE/\!/AP$. 而由 DE、AP 平行且相等，可知它们可组成一平行四边形，于是连结 PE，可得四边形 $APED$ 是平行四边形，$AD/\!/PE$，那末结论中出现的 $\angle PDA$（记作 $\angle 4$）就与 $\angle DPE$（记作 $\angle 8$）相等.

但现在 $\square ABCD$ 和 $\square APED$ 具有一条公共边 AD，所以就可应用平移型全等三角形进行证明，于是连结 CE，可得 $\triangle PAB \cong \triangle EDC$，全等的条件就是 $AB=DC$，$\angle 1=\angle 5$，$AP=DE$，于是就有 $\angle ABP$（记作 $\angle 3$）$=\angle DCE$（记作 $\angle 6$），$BP=CE$. 这样又可得 $\angle 6+\angle DCB+\angle PBC=\angle 3+\angle DCB+\angle PBC=180°$，$BP/\!/CE$，四边形 $BPEC$ 也是平行四边形，这样，就又可进一步推得 $PE/\!/BC$，$\angle PCB$（记作 $\angle 2$）$=\angle CPE$（记作 $\angle 7$）. 而已知 $\angle 1=\angle 2$，所以有 $\angle 5=\angle 7$，而这两个角相等一出现，就出现了一个圆周角的基本图形，也就可得 P、C、E、D 四点共圆，$\angle 6=\angle 8$. 而我们已证明 $\angle 8=\angle 4$，$\angle 6=\angle 3$，所以就可证明结论.

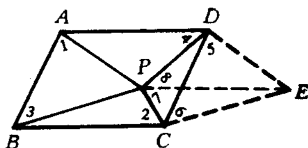


图 5・359

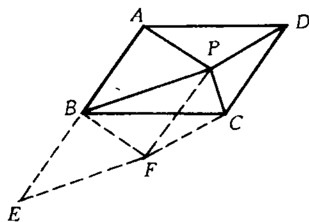


图 5・360

若考虑将 $\angle PAB$ 沿 AB 方向平移到以 B 为顶点，则延长 AB 到 E，使 $BE=AB$，过 B 作 $BF/\!/AP$，且使 $BF=AP$. 那末 $\angle PAB=\angle FBE$，连结 EF 后，即可得 $\triangle PAB$ 和 $\triangle FBE$ 是一对平移型全等

三角形. 而由 $AP \underline{\underline{\parallel}} BF$，又可得四边形 $ABFP$ 也是平行四边形，所以$\angle PAB=\angle FBE=\angle PFB$，$\angle PBA=\angle BPF$. 由于条件中给出$\angle PAB=\angle PCB$，从而就有$\angle PFB=\angle PCB$，也就可得 P、B、F、C 四点共圆，所以连结 CF 后，有$\angle BPF=\angle BCF$. 又因为四边形 $ABCD$ 和 $ABFP$ 是两个具有公共边 AB 的平行四边形，从而可证 $PF \underline{\underline{\parallel}} DC$，四边形 $PFCD$ 也是平行四边形，$PD\parallel FC$，这样又可得$\angle PDA=\angle BCF$，从而就可证明$\angle PBA=\angle PDA$.

第六章　相似三角形

第一节　平行线型

【分析方法导引】

在几何问题中，拿到一个线段之间的比例关系，则首先应进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系，从而就可确定所要应用的相似三角形的类型和相应的基本图形.

如经描图发现的是相比两线段重叠在一直线上，则应想到要应用平行线型相似三角形进行证明；如经描图发现的是相比两线段重叠在一组平行线段上，则应想到要应用平行线型相似三角形的组合图形进行证明；如经描图发现成比例的四条线段重叠在一直线上，且构成一线段的内分的比和外分的比相等时，则应想到要应用三角形的内外角平分线的性质进行证明；如经描图发现的是相乘两线段重叠在一直线上，则应想到要应用逆平行线型相似三角形进行证明；如经描图发现的是由一点发出的四条成比例线段，且它们两两交成等角时，则应想到要应用旋转型相似三角形进行证明.

如果几何问题中出现了三角形或四边形、梯形中或外的一条边的平行线段时，就可以想到要应用平行线型的相似三角形进行证明. 若直接出现三角

形内或外的一条边的平行线，则可直接根据将两条平行线与三角形的两边或它们的延长线相交的方法得到相似三角形，然后再应用平行线的基本图形和有关的比例性质来完成分析. 若出现的是四边形或梯形内或外的一条边的平行线段时，则应将问题转化到三角形中的问题来进行分析和讨论.

对于一个线段之间的比例关系，如果经描图后发现相比两线段重叠在一直线上，就应意识到可应用或添加平行线型相似三角形进行证明. 然后在图形中检查这一组相比线段是否有一个公共的端点，即是否有一个公共的端点或以内分点为它们的公共端点，若符合这一条件，就可确定或想到添加平行线型相似三角形的方法是过端点和端点、过端点和内分点作平行线. 接下来应想到的就是平行线具体应如何作？那么就应先取平行方向线段，平行方向线段可从图形中过端点和内分点的线段中选取，所以可将可作为平行方向线段的线段全部列举出来，这时就可以产生一种信念，一种自信心，正确的分析方法，可以完成证明的可能性肯定在其中，在对所列举的各种可能情况逐一进行讨论的过程中肯定可以完成证明. 接下来就可以对所列举的平行方向线段逐一选取，逐一进行讨论. 由于这时相比两线段有一个公共的端点，所以图形中必然是出现两个端点和一个内分点，所以当平行方向线段取在过其中一个点后，平行线必定有过另外两个点作的两种可能性，所以又可以逐一进行分析和讨论. 也就是当平行方向线段取在过端点时，平行线可过内分点作，也可过另一个端点作；当平行方向线段取在过内分点时，平行

线可过两个端点作.在作出的平行线与过第三个点(即余下的一个端点或内分点)的一条直线相交后，就可得平行线型相似三角形,然后再应用相似三角形的判定定理或性质就可以完成分析.在上述多种可能情况的讨论、分析过程中,可首先选取与问题的条件或结论有直接的或明显的联系的可能性进行讨论,从而可迅速找到完成证明的方法,顺利完成分析.

如果经描图后发现的是两组相比线段都重叠在一直线上,且有一个公共的端点或有一个公共的内分点,则也应想到要应用平行线型相似三角形进行证明.寻找或添加相似三角形的方法是将端点和端点、内分点和内分点分别连接起来,或者是将四个端点分两组相应地连接起来,则这两条连线必定是平行线.在找到相似三角形后,分析也就可容易地完成.

如果几何问题中出现了两条线段之间的倍半关系,则可先检查一下这个倍半关系是否是和线段的中点发生联系.如在检查中发现问题还出现了线段的中点,如半线段的一个端点已经是某一条线段的中点,或者已经出现了与倍线段有公共端点的线段的中点的情况时,就应产生、形成应用三角形中位线的基本图形进行证明的意识.接下来的分析就可以出现两种可能性:将倍线段取出三角形的边,那就应将三角形中相应的一条中位线添出,也就是分别取另两条边的中点,并将它们连接起来,那末问题就转化成这条中位线与半线段之间的等量关系的分析和

应用了. 将半线段取作三角形的中位线，那就应想到要将三角形先找出来. 这时的关键是半线段的两个端点必须成为两条有公共端点的线段的中点，可先使一个端点成为一条线段的中点，再将这条线段的一个端点与半线段的另一个端点连接后再延长一倍来实现. 然后再将对应于这条中位线也就是半线段的三角形的第三条边连接起来，在应用三角形中位线的性质后，问题也就可转化为倍线段与所添加的三角形的第三条边之间的等量关系来进行讨论了.

如果几何问题中出现了两个或两个以上的中点，即多个中点问题时，就应想到要应用三角形的中位线的基本图形进行证明. 在中点出现比较多的情况下，首先应确定哪两个中点是应用三角形的中位线的基本图形所需要的中点，这时的关键就是要抓住所出现的两个中点所在的线段要有公共的端点. 当两个已经出现的中点所在的线段有公共的端点，从而可以组成三角形时，就应想到这两个中点的连线就已经是三角形的中位线. 接下来就应看这个三角形中位线的基本图形是否已完整地出现，若这时三角形已出现，但中位线还没有，那就应将三角形的中位线添上；若这时是有中位线，而三角形还不完整，那就应将三角形的边添上. 在三角形中位线的基本图形已完整出现的条件下，分析也就可以完成. 当两个已经出现的中点所在的线段没有公共端点或者是重叠线段，因而不能组成三角形时，就应想到这两个中点的连线并不是三角形的中位线，而应再增加中点，而且应增加与已经出现的中点所在的线段有公共端点的线段的中点. 然后就可将所增加的中点

与已经出现的中点连接起来成为三角形的中位线，且在三角形不完整时，还应将三角形的边添上，这样就可以应用三角形中位线的基本图形的性质完成分析.

对于一个线段之间的比例关系，如果经描图后发现相比两线段或者是它的特殊情况，也就是相等两线段重叠在一组平行线段上时，就可以想到要应用平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 接下来就应寻找和确定过两个端点和内分点的共点三直线，一般可先找到过其中两点的两条相交直线，再将交点与第三个点连接起来构成共点三直线. 然后就应将共点三直线与两条平行线相交，构成平行线型相似三角形的组合图形，从而完成这一部分的分析. 如果这一组平行线还不足以解决问题，例如两条平行线上的线段的比都是结论中出现的性质，那就可以将平行的线段再作平移，也就是再添同与这共点三直线相交的已经出现相比或相等线段重叠的直线的平行线.

如果几何问题中出现了由一点发出的三直线和一组平行线相交时，也可以想到要应用或添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 这时如有尚未相交的部分，则应马上想到要延长到相交或者就是再作同与这共点三直线相交的平行线. 然后也就可以完成分析.

对于一个线段之间的比例关系，如果经描图后发现成比例的四条线段重叠在一直线上，且构成图

形中一条线段的内分的比和外分的比相等时，就应想到要应用三角形的内外角平分线的性质进行证明. 接下来就是应确定三角形和三角形的内外角平分线. 这时首先应确定线段的两个端点以及内分点、外分点，再从内外分点出发确定两条互相垂直的线段，如找到这两条互相垂直的线段，则它们的交点，也就是垂足就应是三角形的第三个顶点，将这个点与线段的两个端点分别连接就得到了我们所需要的三角形，而这两条互相垂直的线段就应分别是三角形的内外角平分线. 然后就应证明其中的一条是角平分线，再应用等角的余角相等的性质就可证明另一条也是角平分线，从而完成分析. 如图形中没有直接出现过内外分点的两条互相垂直的线段，则可过内分点向过外分点的直线作垂线，或过外分点向过内分点的直线作垂线，然后再用类似的方法完成分析.

如果几何问题中直接出现了三角形的内、外角平分线，那末也就可想到直接应用三角形内外角平分线的性质来完成证明.

例 1 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，以 AC、BC 为边向外作正方形 $ACDE$ 和 $BCFG$，BE、AG 交 AC、BC 于 M、N. 求证：$CM=CN$，$\frac{1}{CM}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}$.

分析：本题要证明 $CM=CN$，而由条件 $\angle ACD=\angle BCM=90°$，可证明 B、C、D 成一直线，又因为已知 B、M、E 成一直线，且由四边形 $ACDE$ 是正方形，可得 $CM\parallel DE$，这样 CM 就成为 $\triangle BDE$ 中的一条边 DE 的平行线段，从而可应用平行线型相似三角形的性质进行证明. 即由 $CM\parallel DE$ 可得 $\triangle BCM\backsim\triangle BDE$，$\frac{CM}{DE}$

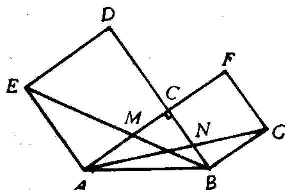


图 6·1

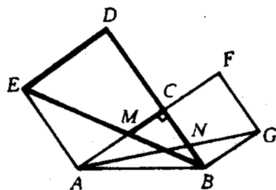


图 6·2

$=\frac{BC}{BD}$，$CM=\frac{DE\cdot BC}{BD}$，而由条件 $DE=AC$，$BD=BC+CD=BC+AC$，所以 $CM=\frac{AC\cdot BC}{AC+BC}$，用同样的方法可以证明 CN 也等于 $\frac{AC\cdot BC}{AC+BC}$，即 $CM=CN$，从而$\frac{1}{CM}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}$.

本题要证明 $CM=CN$，这是两条具有公共端点的相等线段，它们可以组成一个等腰三角形. 而由条件 $\angle ACB=90°$，这个等腰三角形就应是一个等腰直角三角形，即半个正方形，而已知四边形 $ACDE$ 也是正方形，这样就出现了两个以 C 为公共顶点的正方形，所以可应用旋转型全等三角形进行证明. 根据由公共顶点 C 发出的两组相等线段 CD、CA 和 CM、CN 两两组成全等三角形的方法，可找到这对全等三角形应是$\triangle DMC$ 和$\triangle ANC$，所以应先连结 DM. 在这两个三角形中，已有 $DC=AC$，$\angle DCM=\angle ACB=90°$，所以还要证明一个条件. 由于 $CM=CN$ 是要证明的结论，不能用，所以可考虑证$\angle MDC=\angle NAC$，

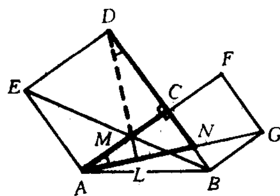


图 6·3

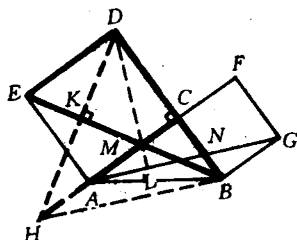


图 6·4

而已知$\angle ACN=90°$,$\angle NAC+\angle ANC=90°$,这样问题又成为要证明$\angle MDC+\angle ANC$也等于90°,也就是要证$DM\perp AG$.于是又可根据垂线的定义,将$DM$延长到与$AG$相交,并设交点为$L$,则应证$DL\perp AG$.

由于要证的是$DL\perp AG$,而已知$MC\perp DB$,所以DL和MC就可以看作是三角形的高,那么它们的交点M就应是以DL和MC为高的三角形的垂心,所以要证DL是高就应转而证M是三角形的垂心.而根据三角形垂心的定义,M应是三角形两条高的交点,而DL这条高是结论不能用,所以必须要用第三条高.由于过M点还有一线段BE,所以应将BE取作第三条高所在的直线,而要使BE成为高,就要过BD的端点D向它们作垂线,也就是过D作$DK\perp BE$,交BE于K,交CA的延长线于H.这样我们就得到BK、HC是$\triangle DHB$的高,于是应先连结BH,那末M就是$\triangle DHB$的垂心,从而可证明DM(也就是DL)$\perp BH$,这样要证明$DL\perp AG$就转化为要证$AG/\!/HB$.

由条件四边形$ACDE$是正方形,所以在作了$DK\perp EB$后,就出现了过正方形的顶点D向过它的相邻顶点E的一条直线EB所作的垂线,所以可应用绕正方形的中心旋转90°的全等三角形进行证明.而由ED、EB绕正方形的中心顺时针旋转90°后应分别与DC,DH重合,就可找到这对全等三角形是$\triangle BED$和$\triangle HDC$.全等的条件是$ED=DC$,$\angle BDE=\angle HCD=90°$以及由$\angle DKB=\angle DCH=90°$推得的$\angle EBD=\angle DHC$.从而就有$HC=BD$,而已知$CD=CA$,所以$AH=BC$,而$BC=BG$,所以$AH=GB$.同时由条件四边形$BCFG$是正方形,又可得$AH/\!/GB$,所以四边形$AHBG$是平行四边形,$AG/\!/HB$,分析完成.

例2 已知:$\triangle ABC$中,AD、BE是中线,G是重心,AH是高,$GF\perp BC$,垂足为F.求证:$BH^2-CH^2=3(BF^2-CF^2)$.

分析:本题结论中,等式两边出现的都是线段平方差的形式,

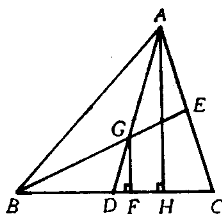


图 6·5

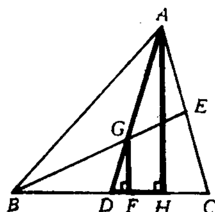


图 6·6

所以可应用公式先进行化简.于是 $BH^2-CH^2=(BH+CH)(BH-CH)$,而由 D 是 BC 的中点,可得 $BH-CH=2DH$,所以上式 $=BC\cdot 2DH$.类似地也有 $BF^2-CF^2=(BF+CF)(BF-CF)=BC\cdot 2DF$.比较这两个关系式,可以发现问题可转化为要证 $DH=3DF$.

而由 $GF\perp BC$ 和 $AH\perp BC$,又可得 $GF/\!/AH$,这样 GF 就成为$\triangle DAH$ 中一条边 AH 的平行线段,所以可应用平行线型相似三角形的性质进行证明,由 $GF/\!/AH$,可得$\triangle DGF\backsim\triangle DAH$,$\dfrac{DG}{DA}=\dfrac{DF}{DH}$,但已知 G 是$\triangle ABC$ 的重心,故 $DA=3DG$,从而 $DH=3DF$,得证.

例 3 已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$CD\perp AB$ 垂足是 D,$\angle BAC$ 的角平分线交 CB、CD 于 E、F,$\angle BCD$ 的角平分线交 BD 于 G.求证:$GF/\!/BC$.

分析:本题要证明 $GF/\!/BC$,就出现了 GF 是$\triangle DBC$ 内的一条边 BC 的平行线段,所以可应用平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明.也就是要证明 $GF/\!/BC$,就可以转化为要证 $\dfrac{DF}{CF}=\dfrac{DG}{BG}$.

根据条件 AF 是$\triangle CAD$ 中$\angle CAD$ 的角平分线,应用角平分

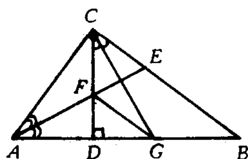


图 6·7

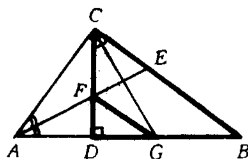


图 6·8

线的性质可得$\frac{DF}{CF}=\frac{AD}{AC}$. 根据同样的道理，由 CG 是$\angle BCD$ 的角平分线，又可得$\frac{DG}{BG}=\frac{CD}{CB}$. 这样问题就转化为应证$\frac{AD}{AC}=\frac{CD}{CB}$.

由于这是一个新的比例关系，经过描图可以发现它们两两组成$\triangle ADC$ 和$\triangle CDB$. 而由条件给出的 CD 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边上的高，所以有$\angle ADC=\angle CDB=90°$和$\angle ACD=\angle CBD$ 都等于 $90°-\angle BCD$，那末$\triangle ADC$ 和$\triangle CDB$ 就相似，上述性质就可证明.

例 4 已知：C、D、E、F 是$\angle AOB$ 的两边上的四点，且 $OC:OD=CE:DF$，CE、DF 的延长线相交于 G. 求证：$GE=GF$.

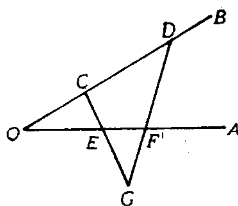


图 6·9

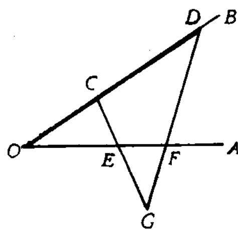


图 6·10

分析：本题的条件中出现了一个线段之间的比例关系，$\frac{OC}{OD}=\frac{CE}{DF}$，所以应首先进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系. 经过描图可以发现，OC 和 OD 这一组相比线段现在重叠在一直线上，从而可添加平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是过端点

或内分点作平行线. 于是首先应取平行方向线段.

现在图形中经过内分点 C 和端点 D、O 的线段有 CE、DF 和 OE，所以取平行方向线段就有三种可能.

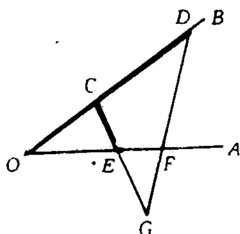


图 6·11

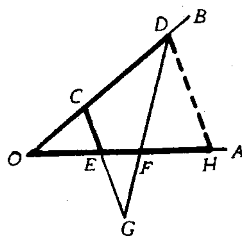


图 6·12

若取 CE 为平行方向线段，则由于平行方向线段过内分点 C，所以平行线可过端点 D 作. 即过 D 作 $DH /\!/ CE$ 交 OA 于 H，于是 $\triangle OEC \backsim \triangle OHD$，$\frac{OC}{OD}=\frac{CE}{DH}$. 而已知$\frac{OC}{OD}=\frac{CE}{DF}$，可得 $DF=DH$，$\angle DFH=\angle DHF$. 再由 $CE /\!/ DH$，$\angle GEF=\angle DHF=\angle DFH$ 和 $\angle DFH=\angle GFE$，就可证明结论.

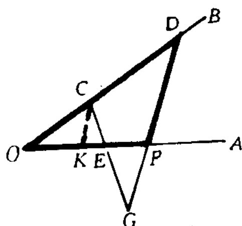


图 6·13

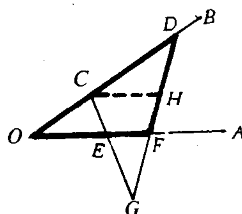


图 6·14

若取 DF 为平行方向线段，则由于平行方向线段过端点 D，所以平行线可过内分点 C 作，即过 C 作 $CK /\!/ DF$ 交 OA 于 K，也可得$\triangle OCK \backsim \triangle ODF$，$\frac{OC}{OD}=\frac{CK}{DF}$，从而可证明 $CK=CE$，那末再由

$CK /\!/ FG$,也就可证明结论.

若取 OE 为平行方向线段,则由于平行方向线段经过端点 O,所以平行线可过内分点 C 作,也就是过 C 作 $CH /\!/ OE$ 交 DF 于 H,这时实际上可以看作是取 OF 为平行方向线段.那末应用平行线截得比例线段定理就可得 $\frac{OC}{OD}=\frac{FH}{FD}$,从而可得 $FH=CE$.再根据所作的 $CH /\!/ EF$,也就可以证明 $GE=GF$.

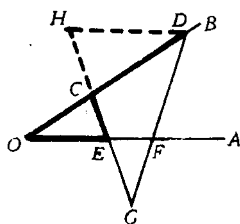


图 6・15

本题在取 OE 为平行方向线段以后,由于平行方向线段经过端点 O,所以平行线也可以过另一个端点作.也就是过 D 作 $DH /\!/ EO$,且作到与过内分点 C 的直线相交,也就是应与 EC 的延长线相交于 H.就可以由 $\angle EOC=\angle HDC$ 和 $\angle ECO=\angle HCD$,得 $\triangle COE \backsim \triangle CDH$,再应用比例性质就可得 $\frac{OC}{OD}=\frac{EC}{EH}$,而已知 $\frac{OC}{OD}=\frac{CE}{DF}$,从而得 $EH=DF$,那么再由 $DH /\!/ FE$,就可以证明 $GE=GF$.

例 5 已知:D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上的两点,$BD=CE$,DE 的延长线交 BC 的延长线于 F.求证:$\frac{FE}{FD}=\frac{AB}{AC}$.

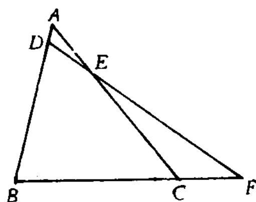


图 6・16

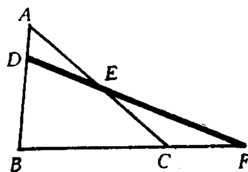


图 6・17

分析：本题要证的结论$\frac{FE}{FD}=\frac{AB}{AC}$是线段之间的比例关系，所以首先应进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系. 经过描图可以发现 FE 和 FD 这一组相比线段现在重叠在一直线上，所以可添加平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是过端点或内分点作平行线. 于是首先也应选定平行方向线段，现在图形中出现的过端点 D、F 和内分点 E 的线段有 DB、DA、FC、EC、EA，总共就有五种可能情况. 而在分析时，应首先讨论与条件或结论有联系的可能情况，由于现在 DB 和 EC 是条件中给出的线段，所以应首先讨论这两种情况.

若取 DB 为平行方向线段，则由于 DB 经过端点 D，所以平行

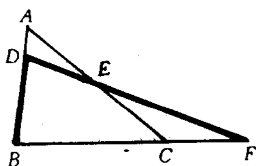


图 6・18

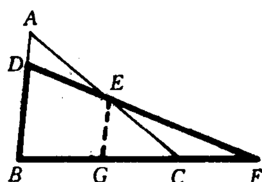


图 6・19

线可过内分点 E 作，于是过 E 作 $EG /\!/ DB$ 交 BC 于 G，即可得 $\triangle FEG \backsim \triangle FDB$，$\frac{FE}{FD}=\frac{EG}{DB}$. 由条件 $BD=CE$，那么$\frac{FE}{FD}=\frac{EG}{EC}$. 这样要证明$\frac{FE}{FD}=\frac{AB}{AC}$，就可以转而证明$\frac{EG}{EC}=\frac{AB}{AC}$. 这是一个新的比例

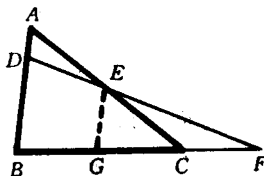


图 6・20

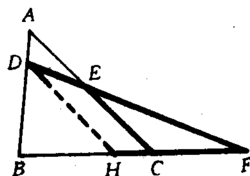


图 6・21

关系，那末首先仍然进行描图，经过描图又可以发现一组相比线段 AC 和 EC 重叠在一直线上，这时首先可以将结论改写成为 $\frac{EG}{AB}=\frac{EC}{AC}$，因此仍然可以应用平行线型相似三角形进行证明，那么由 $EG // AB$，就可得 $\triangle EGC \backsim \triangle ABC$，所以上述性质就可以证明.

若取 EC 为平行方向线段，则因为平行方向线段过内分点 E，所以平行线过端点作，于是过 D 作 $DH // EC$ 交 BC 于 H，那末也可得：$\triangle FEC \backsim \triangle FDH$，$\frac{FE}{FD}=\frac{EC}{DH}=\frac{DB}{DH}$，而由 $DH // AC$，又可得 $\triangle DBH \backsim \triangle ABC$，$\frac{DB}{DH}=\frac{AB}{AC}$，从而也可证明结论.

若取 FC 为平行方向线段，则因为平行方向线段过端点 F，且过平行方向线段两端的直线在内分点 E 相交，所以平行线可过另一个端点作，于是过 D 作 $DG // CF$ 交 AC 于 G，则由 $\angle CFE=\angle GDE$ 和 $\angle FEC=\angle DEG$，可得 $\triangle CEF \backsim \triangle GED$，应用比例性质可得 $\frac{FE}{FD}=\frac{CE}{CG}$，但 $CE=BD$，所以 $\frac{FE}{FD}=\frac{BD}{CG}$. 再由 $DG // BC$，$\triangle ADG \backsim \triangle ABC$，应用比例性质又可得 $\frac{BD}{CG}=\frac{AB}{AC}$，所以分析完成.

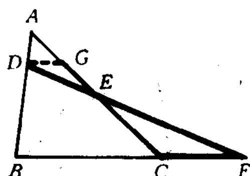


图 6・22

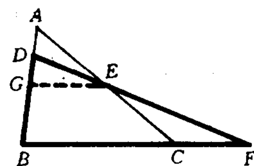


图 6・23

在取 FC 为平行方向线段时，由于 FC 过端点 F，所以平行线也可以过内分点 E 作，也就是过 E 作 $EG // FC$ 交 AB 于 G，所以这时也可以将 FB 看作是平行方向线段. 于是应用平行线截得比例线段定理可得 $\frac{FE}{FD}=\frac{BG}{BD}$，但 $BD=CE$，所以 $\frac{FE}{FD}=\frac{BG}{CE}$，

又因为 $EG /\!/ CB$，可得$\dfrac{BG}{CE}=\dfrac{AB}{AC}$，所以分析就可以完成.

例 6 已知：$\triangle ABC$ 中，D 是 CB 的延长线上的一点，E 是 AC 上一点，且 $BD=AE$，DE 交 AB 于 F. 求证：$\dfrac{DF}{EF}=\dfrac{AC}{BC}$.

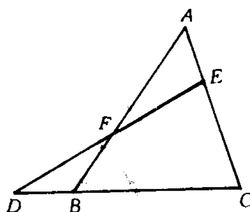


图 6・24

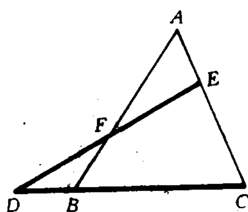


图 6・25

分析：本题要证明的结论是线段之间的比例关系，所以首先进行描图. 经过描图可以发现一组相比线段 DF 和 EF 重叠在一直

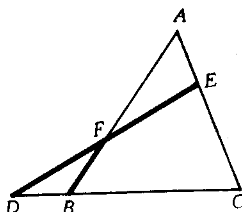


图 6・26

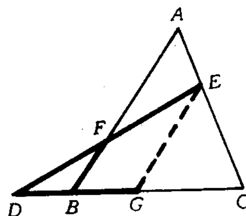


图 6・27

线上，从而可添加平行线型相似三角形进行证明，添加的方法是过端点和内分点作平行线. 于是首先应选取平行方向线段，由于图形中过端点和内分点的线段有 FB、FA、DB、EA、EC，所以平行方向线段的选取也就出现了五种可能.

若取 FB 为平行方向线段，则由于平行方向线段过内分点 F，所以平行线可过端点作.

若考虑过 E 作 FB 的平行线，则过 E 作 $EG /\!/ FB$ 交 BC 于

G,应用平行线截得比例线段定理,就可得$\frac{DF}{EF}=\frac{DB}{BG}$,但已知 $BD=AE$,所以$\frac{DF}{EF}=\frac{AE}{BG}$,这样要证$\frac{DF}{EF}=\frac{AC}{BC}$就转化成为要证$\frac{AC}{BC}=\frac{AE}{BG}$.由所作的 $EG /\!/ AB$,再应用一次平行线截得比例线段的性质就可以证明这一结论.

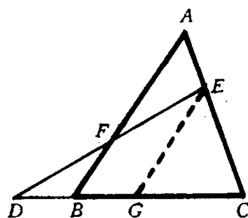


图 6・28

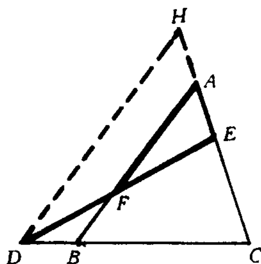


图 6・29

若考虑过 D 作 FB 的平行线,则过 D 作 $DH /\!/ FA$ 交 CA 的延长线于 H,实质上这时也可以看作是将 FA 取作平行方向线段.这样就可得$\frac{DF}{EF}=\frac{HA}{EA}$,但 $EA=DB$,所以问题就转化成要证$\frac{HA}{DB}=\frac{AC}{BC}$,那么由 $AB /\!/ HD$ 就可证明这一性质.

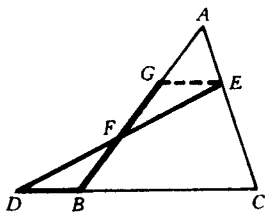


图 6・30

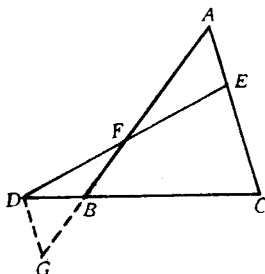


图 6・31

若取 DB 为平行方向线段,则由于过平行方向线段两端的直线在内分点 F 相交,所以平行线可过另一个端点 E 作,于是过 E 作 $EG \parallel CD$ 交 AB 于 G,即可得 $\angle DFB=\angle EFG$, $\angle FDB=\angle FEG$, $\triangle DFB \backsim \triangle EFG$, $\frac{DF}{EF}=\frac{DB}{EG}$. 但已知 $DB=EA$,所以又得 $\frac{DF}{EF}=\frac{AE}{GE}$,那末要证明 $\frac{DF}{EF}=\frac{AC}{BC}$,就转化成要证 $\frac{AE}{GE}=\frac{AC}{BC}$. 而由 $EG \parallel CB$,又可得 $\triangle AGE \backsim \triangle ABC$,所以这一性质可以证明.

若取 EA 为平行方向线段,则由于过平行方向线段两端的直线在内分点 F 相交,所以平行线也可以过另一个端点 D 作,也就是过 D 作 $DG \parallel AE$ 交 AB 的延长线于 G,则可得 $\angle DFG=\angle EFA$, $\angle FGD=\angle FAE$, $\triangle DFG \backsim \triangle EFA$, $\frac{DF}{EF}=\frac{DG}{EA}$. 但 $EA=BD$,所以 $\frac{DF}{EF}=\frac{DG}{DB}$,问题就成要证 $\frac{DG}{DB}=\frac{AC}{CB}$. 由于所作的 $DG \parallel AC$ 是一组平行线段,且它们的四个端点中两两的连线在 B 点相交,所以又可以应用平行线型相似三角形进行证明. 于是由 $\angle DBG=\angle CBA$, $\angle BDG=\angle BCA$,可得 $\triangle DBG \backsim \triangle CBA$,所以上述性质也可以证明.

例 7 已知:$\triangle ABC$ 中,直线 XY 分别交边 AB、AC 于 F、E,交边 BC 的延长线于 D. 求证:$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=1$.

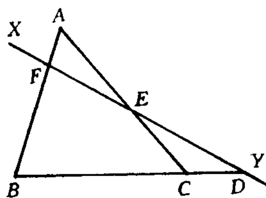


图 6・32

分析:本题要证明的结论是线段之间的比例关系,于是首先进行描图,搞清楚比例线段之间的位置关系. 经过描图可以发现 AF 和 BF, BD 和 CD, CE 和 AE 这三组相比线段都分别重叠在一直线上,从而就可添加平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是过端点和内分点作平行线,并且应首先选取平行方向线段. 由于结论中出现的相比线段

有三组，所以根据哪一组重叠线段来开始进行分析就有三种可能.

若从 AF 和 BF 这一组重叠线段出发，则平行方向线段就有 AE、FE 和 BD 三种可能性.

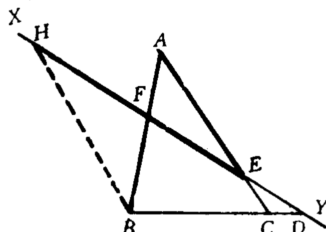


图 6・33

如取 AE 为平行方向线段，则因为过平行方向线段两端的直线在内分点 F 相交，所以平行线可过另一个端点 B 作，于是过 B 作 $BH \parallel CA$ 交 DF 的延长线于 H，则可得 $\angle AFE=\angle BFH$，$\angle FAE=\angle FBH$，$\triangle AFE \backsim \triangle BFH$，$\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{BH}$. 这样要证的结论 $\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=1$，就转化成为要证 $\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{AE}{BH}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{CE\cdot BD}{BH\cdot CD}=1$，也就是要证 $\frac{CE}{BH}=\frac{CD}{BD}$. 由所作的 $BH \parallel CE$，又可得 $\triangle DCE \backsim \triangle DBH$，也是一对平行线型相似三角形，所以上述性质可以证明.

若取 FE 为平行方向线段，则由于平行方向线段过内分点 F，所以平行线可过端点作. 于是过 B 作 $BG \parallel FE$ 交 AC 的延长线于 G. 于是应用平行线截得比例线段定理，可得 $\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{EG}$，于是问题就成为要证 $\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{AE}{EG}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{BD\cdot CE}{EG\cdot CD}=1$，也就是要证 $\frac{BD}{CD}=\frac{GE}{CE}$. 而由 $ED \parallel BG$，$\triangle EDC \backsim \triangle GBC$，$\frac{CD}{CB}=\frac{CE}{CG}$，再应用比例性质就可以完成证明.

如取 BD 为平行方向线段，则由于平行方向线段过端点，且过平行方向线段两端的直线在内分点 F 相交，所以平行线可过另一个端点作，于是过 A 作 $AG \parallel DB$ 交 DF 的延长线于 G，就可得 $\angle AFG=\angle BFD$，$\angle FAG=\angle FBD$，$\triangle AFG \backsim \triangle BFD$，$\frac{AF}{BF}=\frac{AG}{BD}$.

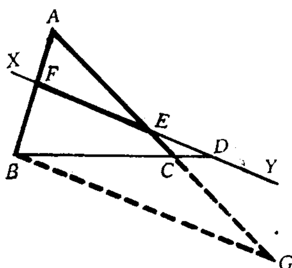


图 6・34

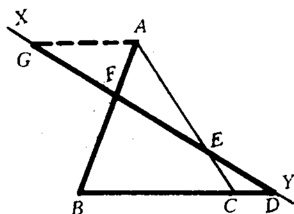


图 6・35

于是要证的结论就转化为$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{AG}{BD}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{AG}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=1$，也就是要证$\frac{AG}{CD}=\frac{AE}{CE}$. 而由 $AG /\!/ CD$，$\triangle AEG \backsim \triangle CED$，就可以完成证明.

若从 BD 和 CD 这一组重叠线段出发，则平行方向线段就有 BF、CE 和 DE 三种可能性.

若取 BF 为平行方向线段，则因为 BF 过端点 B，所以平行线就可过内分点 C 作. 也就是过 C 作 $CG /\!/ BF$ 交 DF 于 G，那末 $\triangle DCG \backsim \triangle DBF$，$\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{CG}$. 这样要证明的结论就转化为$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BF}{CG}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{AF}{CG}\cdot\frac{CE}{AE}=1$，也就是要证$\frac{AF}{CG}=\frac{AE}{CE}$. 由所作的 $CG /\!/ FA$，可得$\triangle AEF \backsim \triangle CEG$，所以上述性质可以证明.

若取 CE为平行方向线段，则平行线可过端点 B 作，由于这种可能性已经进行了讨论，所以不再重复讨论. 本书在以后的论述中，出现类似情况也同样处理，并不再另行说明.

若取 DE 为平行方向线段，则由于 DE 经过端点 D，所以平行线可过内分点 C 作，也就是过 C 作 $CG /\!/ DE$ 交 AB 于 G，这时实

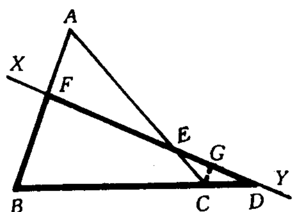


图 6・36

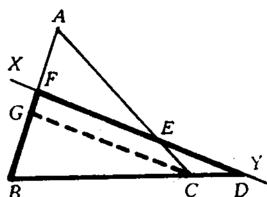


图 6・37

质上是将 DF 看作是平行方向线段. 于是可得$\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{GF}$. 要证的结论就转化为$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BF}{GF}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{AF}{GF}\cdot\frac{CE}{AE}=1$,也就是要证$\frac{AF}{GF}=\frac{AE}{CE}$,而由 $FE/\!/GC$,就可证明这一性质.

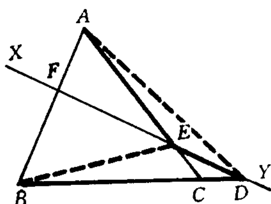


图 6・38

由于本题出现了三组相比线段分别重叠在一直线上,所以可应用三角形面积的基本图形的性质进行证明. 由于 E、D 是过内分点 F 的直线上的两点,所以应将这两点分别与线段的端点连接起来,也就是连接 DA、EB. 就可得$\frac{AF}{BF}=\frac{S_1}{S_2}$(其中 $S_1=S_{\triangle DAE}$,$S_2=S_{\triangle DBE}$). 进一步我们又可得$\frac{BD}{CD}=\frac{S_2}{S_3}$(其中 $S_3=S_{\triangle DCE}$),$\frac{CE}{AE}=\frac{S_3}{S_1}$,所以结论也可以证明.

例 8 已知:$\triangle ABC$ 中,D 是 AC 边上的一点,$\frac{AD}{CD}=\frac{1}{2}$,$E$ 是 BD 的中点,AE 的延长线交 BC 于 F. 求证:$\frac{BF}{CF}=\frac{1}{3}$.

分析:本题条件中给出了线段 AD 和 CD 的比,$BE=DE$ 实质上也可看作是 BE 和 DE 的比,其比值是 1,而结论中出现的也是线段 BF 和 CF 的比,因此都可看作是线段之间的比例关系,所以

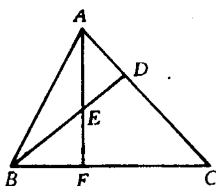


图 6・39

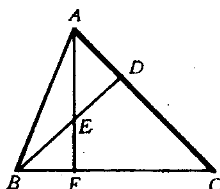


图 6・40

首先应进行描图，搞清楚比例线段之间的位置关系.

经过描图可以发现这三组相比线段都分别重叠在一直线上，所以可添加平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是过端点和内分点作平行线.

由于本题出现了三组相比线段重叠在一直线上，所以从哪一组相比线段出发进行讨论就出现了三种可能性，对此我们可分别予以讨论.

若首先讨论 AD 和 CD 这一组相比线段重叠的可能性，则首先应取平行方向线段. 而在图形中过端点 C，内分点 D 和另一个端点 A 的线段有 CF、DE、AE、AB 四条，所以平行方向线段的选取也就有 4 种可能性. 由于在重叠线段上出现的三个点中，平行方向线段必定过其中的一个点，所以平行线实际上可以过另外两个点作，这样在每取一条平行方向线段后，作平行线也都有两种可能性，这样一共就可以有 8 种可能性.

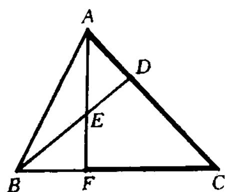


图 6・41

若取 CF 为平行方向线段，则第一种可能性是平行线过内分点 D 作，也就是过 D 作 $DH \parallel CF$ 交 AF 于 H，可得 $\triangle ADH \backsim \triangle ACF$，$\frac{DH}{CF}=\frac{AD}{AC}$，由条件 $\frac{AD}{CD}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$，$\frac{DH}{CF}=\frac{1}{3}$. 这样要证 $\frac{BF}{CF}=\frac{1}{3}$，就转化为要证 $BF=DH$. 由条件

中给出的 $BE=DE$，且 BD、AF 相交于 E，就出现了两条相等的线段 BE 和 DE 位于一组对顶角的两边且成一直线，从而可应用中

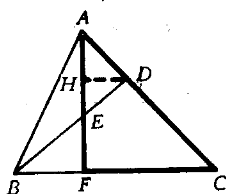


图 6・42

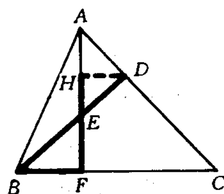


图 6・43

心对称型全等三角形进行证明，由于 DH 和 BF 是过端点 D、B 的一组平行线，所以可证明 $\triangle DEH\cong\triangle BEF$，从而也就可以证明 $BF=DH$，分析也就可以完成.

在取 CF 为平行方向线段时，另一种可能性是平行线过另一

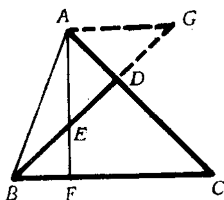


图 6・44

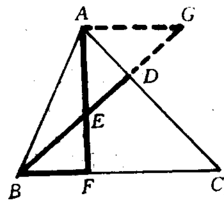


图 6・45

个端点 A 作，也就是过 A 作 $AG/\!/FC$ 交 BD 的延长线于 G，这时实质上也就是将 BC 取作平行方向线段，那末由 $\angle ADG=\angle CDB$，$\angle AGD=\angle CBD$，可得 $\triangle AGD\backsim\triangle CBD$，$\dfrac{AG}{CB}=\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{GD}{BD}=\dfrac{1}{2}$. 而已知 $BE=DE=\dfrac{1}{2}BD$，所以 $BE=DE=GD$. 由于我们得到的是 $\dfrac{AG}{CB}=\dfrac{1}{2}$，而要证明的是 $\dfrac{BF}{CF}=\dfrac{1}{3}$，也就是 $\dfrac{BF}{CB}=\dfrac{1}{4}$，所以问题就成为要证 $\dfrac{BF}{AG}=\dfrac{1}{2}$. 但这是两条平行线段，且它们的四个端点两

两的连线在 E 点相交，所以又可得$\triangle AGE$和$\triangle FBE$也是一对平行线型相似三角形，$\frac{AG}{BF}=\frac{GE}{BE}=2$，也就可以完成分析.

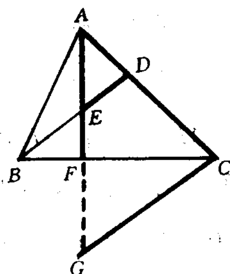


图 6・46

若取 DE 为平行方向线段，则第一种可能性是平行线过端点 C 作，即过 C 作 $CG \parallel DE$ 交 AF 的延长线于 G，那就可得$\triangle ADE \backsim \triangle ACG$，$\frac{DE}{CG}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$，而已知$BE=DE$，所以$\frac{BE}{CG}=\frac{1}{3}$. 而 BE 和 CG 又是一组平行线段，且它们的四个端点两两的连线在 F 点相交，所以又出现了一对平行线型相似三角形，即由$\angle BEF=\angle CGF$和$\angle BFE=\angle CFG$，可得$\triangle BEF \backsim \triangle CGF$，所以$\frac{BF}{CF}=\frac{BE}{CG}=\frac{1}{3}$可以证明.

在取 DE 为平行方向线段时，另一种可能性是平行线过另一个端点 A 作. 于是过 A 作 $AG \parallel DE$ 交 CE 的延长线于 G，就可得$\frac{GE}{CE}=\frac{AD}{CD}=\frac{1}{2}$. 又因为条件中给出 $BE=DE$，这样就出现了相等

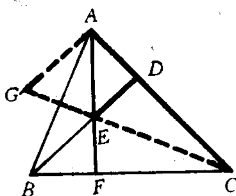


图 6・47

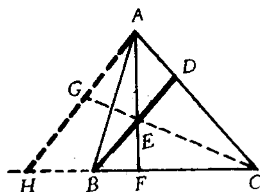


图 6・48

两线段重叠在一组平行线段上，从而可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 添加的方法是将过端点 B、D 和中点 E 的共点三直线与这一组平行线相交，由于图形中的共点三直线应是

CD、CE 和 CB，其中只有 CB 尚未与两条平行线都相交，所以应将它们先延长到相交，也就是延长 CB 交 AG 的延长线于 H，从而就可得 $\frac{HG}{AG}=\frac{BE}{DE}=1$，$HG=AG$. 这样 G 就是 AH 的中点，CG 就是 $\triangle AHC$ 的边 AH 上的中线，而已证 $\frac{GE}{CE}=\frac{1}{2}$，所以 E 就是 $\triangle AHC$ 的重心，从而又可得 AF 也是 $\triangle AHC$ 的边 HC 上的中线，F 是 HC 的中点. 而由 $BD /\!/ HA$，又可得 $\frac{BH}{BC}=\frac{DA}{DC}=\frac{1}{2}$. $BC=2BH$，$HC=3BH$，从而有 $FC=\frac{3}{2}BH$，$BF=BC-FC=2BH-\frac{3}{2}BH=\frac{1}{2}BH$，这样也就可以完成分析.

若取 AE 为平行方向线段，则第一种可能性是平行线过内分点 D 作，即过 D 作 $DG /\!/ AF$ 交 BC 于 G，这时实质上可以看作是

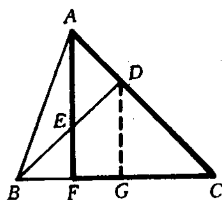


图 6・49

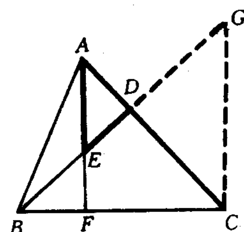


图 6・50

将 AF 取作平行方向线段. 从而可得 $\triangle CDG \backsim \triangle CAF$，$\frac{FG}{FC}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$. 而由 $BE=DE$ 和 $EF /\!/ DG$，又可得 $BF=FG$，所以 $\frac{BF}{CF}=\frac{1}{3}$.

在取 AE 为平行方向线段时，另一种可能性是平行线过另一个端点 C 作. 也就是过 C 作 $CG /\!/ EA$ 交 ED 的延长线于 G. 从而由 $\angle ADE=\angle CDG$，$\angle DAE=\angle DCG$，可得 $\triangle ADE \backsim \triangle CDG$，$\frac{DE}{DG}$

$=\frac{DA}{DC}=\frac{1}{2}$. 所以 $EG=DE+DG=3ED=3BE$. 又因为 $CG\parallel FE$，所以$\frac{BF}{CF}=\frac{BE}{EG}=\frac{1}{3}$.

若取 AB 为平行方向线段，则第一种可能性是平行线过内分

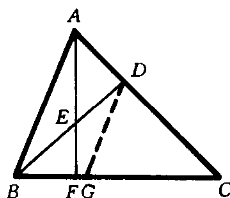


图 6・51

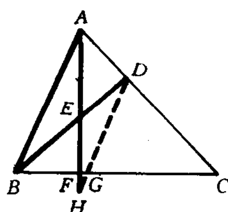


图 6・52

点 D 作. 也就是过 D 作 $DG\parallel AB$ 交 BC 于 G，从而可得$\frac{BG}{BC}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$. 由于条件中给出 $BE=DE$，且 BD、AF 相交于 E，就出现了 BE、DE 这两条相等的线段是位于一组对顶角$\angle BEA$ 和$\angle DEF$ 的两边且成一直线，所以可添加中心对称型全等三角形进行证明. 添加的方法是将过端点的一组平行线与过中点的直线相交，于是延长 DG 交 AF 的延长线于 H. 根据$\angle AEB=\angle HED$，$\angle EAB=\angle EHD$ 和 $BE=DE$，可得$\triangle AEB\cong\triangle HED$，$AB=HD$. 而由 $DG\parallel AB$，又可得$\triangle CDG\backsim\triangle CAB$，$\frac{DG}{AB}=\frac{CD}{CA}=\frac{2}{3}$. 也就是 $DG=\frac{2}{3}AB=\frac{2}{3}HD$，$HG=\frac{1}{3}HD=\frac{1}{3}AB$. 又因为 HG 和 AB 也是一组平行线段，且它们四个端点两两的连线在 F 点相交，所以又可得一对平行线型相似三角形，也就是$\triangle GHF\backsim\triangle BAF$，所以可证得$\frac{GF}{BF}=\frac{HG}{AB}=\frac{1}{3}$. $BF=3FG$，$BC=3BG=3(3FG+FG)=12FG$，从而也就可证明$\frac{BF}{FC}=\frac{1}{3}$.

在取 AB 为平行方向线段时，另一种可能性是平行线过另一个端点 C 作，也就是过 C 作 $CG /\!/ BA$ 交 BD 的延长线于 G，从而有 $\angle ADB = \angle CDG$，$\angle BAD = \angle GCD$，$\triangle ADB \backsim \triangle CDG$，$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{CG}=\frac{BD}{GD}=\frac{1}{2}$. 由条件 $BE=DE$，所以 $GD=2BD=4DE$，$\frac{BE}{GE}=\frac{1}{5}$.

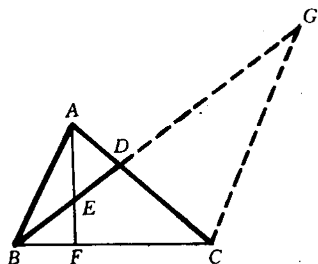


图 6·53

这是一个新的比例关系，经过描图后，可以发现 BE 和 GE 这一组相比线段仍然重叠在一直线上，所以仍然可以添加平行线型相似三角形进行证明. 由于已经出现了过端点 B、G 的一组平行线 BA 和 GC，所以添加的方法是将这一组平行线延长到与过内分点的直线相交，也就是延长 GC 交 AF 的延长线于 H. 就可得 $\angle AEB=\angle HEG$，$\angle BAE=\angle GHE$，$\triangle AEB \backsim \triangle HEG$，$\frac{AB}{HG}=\frac{BE}{GE}=\frac{1}{5}$，$HG=5AB$. 而我们已证 $CG=2AB$，所以有 $HC=3AB$，$\frac{AB}{HC}=\frac{1}{3}$. 而 AB 和 HC 是一组平行线段，它们的四个端点两两的连线在 F 点相交，所以又可以得到一对平行线型相似三角形，也就是由 $\angle AFB=\angle HFC$，$\angle BAF=\angle CHF$，$\triangle AFB \backsim \triangle HFC$，就可证明 $\frac{BF}{CF}=\frac{AB}{HC}=\frac{1}{3}$.

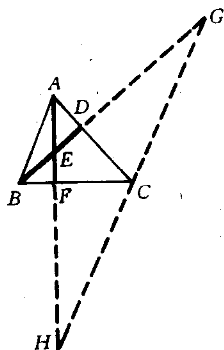


图 6·54

接下来我们讨论 BE 和 DE 这一组相比线段重叠的可能性. 这时平行方向线段就有 DC（或 DA）、EF（或 EA）、BC 和 BA 四种

可能性.而在每一种可能性中，添加辅助线也都有两种位置可以讨论，所以也有8种情况可以进行分析.

若取 DC 为平行方向线段，则第一种可能性是平行线过内分点 E 作，也就是过 E 作 $EG /\!/ DC$ 交 BC 于 G. 那末由 $\triangle BEG \backsim \triangle BDC$，可得 $\frac{EG}{DC}=\frac{BE}{BD}=\frac{1}{2}$，而 $\frac{AD}{DC}=\frac{1}{2}$. 所以 $EG=AD$，$\frac{EG}{AC}=\frac{1}{3}$. 而由 $EG /\!/ AC$，又可得 $\triangle FEG \backsim \triangle FAC$，$\frac{FG}{FC}=\frac{EG}{AC}=\frac{1}{3}$，那末再由 $BG=CG$ 和 $FG=\frac{1}{2}CG$，就可证明 $BF=FG$，所以 $\frac{BF}{CF}=\frac{1}{3}$ 就可以证明.

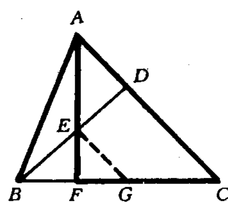


图 6・55

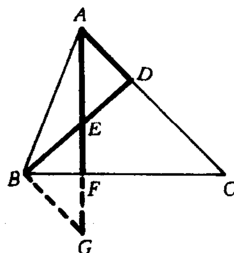


图 6・56

在取 DC 为平行方向线段时，另一种可能性就是平行线过另一个端点 B 作，这时实际上也可以看作是将 DA 取作为是平行方向线段，于是过 B 作 $BG /\!/ AD$ 交 AF 的延长线于 G. 这样由 $\angle BEG=\angle DEA$，$\angle BGE=\angle DAE$ 和 $BE=DE$，可得 $\triangle BEG \cong \triangle DEA$，$BG=DA$，从而就有 $\frac{BG}{AC}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$. 而 BG、AC 是两条平行线段，且它们四个端点两两的连线在 F 点相交，所以又可得到一对平行线型相似三角形，也即可证 $\triangle BFG \backsim \triangle CFA$，所以 $\frac{BF}{CF}=\frac{BG}{CA}=\frac{1}{3}$.

若取 EF 为平行方向线段，则平行线可过端点 B 作，也就是过 B 作 $BG /\!/ EA$ 交 CA 的延长线于 G，这时实质上是将 EA 取作平行方向线段. 于是由 $BE=DE$ 和 $BG /\!/ EA$ 可得 $AG=AD$，所以

$\frac{AG}{AC}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$. 又因 $FA \parallel BG$，所以$\frac{BF}{CF}=\frac{GA}{CA}=\frac{1}{3}$.

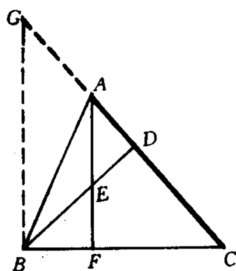


图 6・57

若取 BC 为平行方向线段，则平行线可过内分点 E 作，也就是过 E 作 $EG \parallel BC$ 交 CD 于 G，则由 $BE=DE$，就可得 $DG=CG$，$EG=\frac{1}{2}BC$. 又因 $AD=\frac{1}{2}CD$，所以 $AD=DG=CG$，于是由 $EG \parallel FC$ 又可得 $\triangle AEG \backsim \triangle AFC$，$\frac{EG}{FC}=\frac{AG}{AC}=\frac{2}{3}$，$EG=\frac{2}{3}FC$，从而可得 $FC=\frac{3}{4}BC$，$BF=\frac{1}{4}BC$，分析也就可以完成.

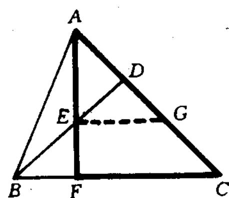


图 6・58

在这一分析过程中我们还可得到另一个性质，即$\frac{AE}{FE}=\frac{AG}{CG}=2$.

若取 BA 为平行方向线段，则平行线可过内分点 E 作，也就是过 E 作 $EG \parallel BA$ 交 AD 于 G，即可由 $BE=DE$，推得 $AG=DG$，$EG=\frac{1}{2}AB$. 再由 $AD=\frac{1}{2}CD$，可得$\frac{AG}{AC}=\frac{1}{6}$. 这又是线段之间的比例关系，经过描图以后，可发现 AG、AC 这一组相比线段仍然重叠在一直线上，所以仍然可添加平行线型相似三角形进行证明. 由于过内分点 G 已有边 AB 的平行线，所以应将这条平行线延长到与三角形的边相交，于是延长 GE 交 BC 于 H. 就可得$\triangle CGH \backsim \triangle CAB$，$\frac{GH}{AB}=\frac{CG}{CA}=\frac{5}{6}$. 但 $EG=\frac{1}{2}AB$，所以 $EH=\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)\cdot AB=\frac{1}{3}AB$. 又因为 EH 是$\triangle FAB$ 内边 AB 的平行线段，所以$\triangle FEH \backsim \triangle FAB$，$\frac{FH}{FB}=\frac{EH}{AB}=\frac{1}{3}$，$BF=3FH$.

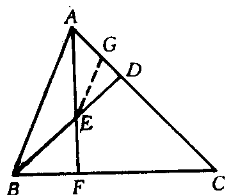


图 6・59

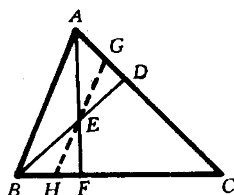


图 6・60

由 $GH /\!/ AB$，还可得$\frac{BH}{BC}=\frac{AG}{AC}=\frac{1}{6}$，$BC=6BH=12FH$，所以 $CF=9FH$，也就可以完成分析.

最后我们就可以讨论 BF 和 CF 这一组相比线段重叠的可能性. 这时平行方向线段就有 CD、FE、BE 和 BA 四种可能性.

若取 CD 为平行方向线段，则平行线可过内分点 F 作，于是过 F 作 $FG /\!/ CD$ 交 BD 于 G. 就可得$\triangle BFG \backsim \triangle BCD$，$\frac{GF}{DC}=\frac{BG}{BD}$. 而由 $GF /\!/ AD$，GD、AF 相交于 E，又可得$\triangle GFE \backsim \triangle DAE$，$\frac{GF}{AD}=\frac{GE}{DE}$. 由条件 $CD=2AD$，可得$\frac{GF}{DC}=\frac{GF}{2AD}=\frac{BG}{BD}$，$\frac{GF}{AD}=\frac{2BG}{BD}$. 又因为 $DE=\frac{1}{2}BD$，所以$\frac{GF}{AD}=\frac{GE}{DE}=\frac{GE}{\frac{1}{2}BD}=\frac{2GE}{BD}$，由此可得 $BG=EG$，$DG=3\,BG$. 而由所作 $FG /\!/ CD$. 所以就可证明$\frac{BF}{CF}=\frac{BG}{DG}=\frac{1}{3}$.

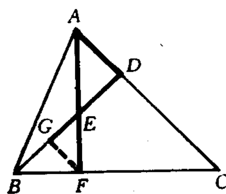


图 6・61

若取 BE 为平行方向线段，则平行线可过内分点 F 作，也就是过 F 作 $FG /\!/ BD$ 交 AC 于 G，那末$\frac{BF}{CF}=\frac{DG}{CG}$，这样问题就转化成

要证$\frac{DG}{CG}=\frac{1}{3}$，$CG=3DG$，$CD=4DG$. 但已知$CD=2AD$，这样问题就成为要证$AD=2DG$，但由所作的$FG/\!/ED$，和已证的$\frac{AE}{FE}=2$，就可证明$\frac{AD}{DG}=2$.

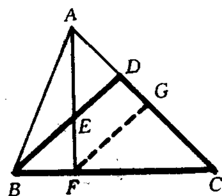


图 6・62

如果我们在分析中不是直接应用$\frac{AE}{FE}=$

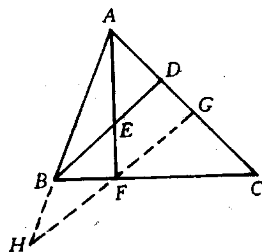


图 6・63

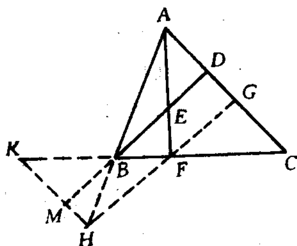


图 6・64

2 的性质，那末现在的问题是要证$\frac{DG}{CG}=\frac{1}{3}$. 由于条件中给出$BE=DE$，且$BD/\!/FG$，就出现了相等两线段$BE$和$DE$重叠在一组平行线段上，从而可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 叠加的方法是将共点三直线与这一组平行线相交，于是延长GF交AB的延长线于H，就可得$\frac{HF}{GF}=\frac{BE}{DE}$，$HF=GF$. 又因为$HG$、$BC$相交于$F$，又出现$HF$、$GF$这一组相等线段在一组对顶角$\angle BFH$和$\angle CFG$的两边且成一直线，所以可添加中心对称型全等三角形进行证明. 于是过H作$HK/\!/CA$交CB的延长线于K，就可证明$\triangle HFK\cong\triangle GFC$，$KH=CG$. 又因为已知$\frac{AD}{CD}=\frac{1}{2}$，这一组相比线段重叠，且过两端点$A$、$C$和内分点$D$的三直线共点于$B$，从而仍然可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 于

是延长 DB 交 HK 于 M，就可得 $\frac{HM}{HK}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$，$\frac{HM}{CG}=\frac{1}{3}$，从而问题只要证 $HM=DG$，而由 $DM // GH$，$DG // MH$，这可以证明这一性质.

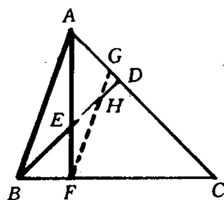


图 6·65

若取 BA 为平行方向线段，则平行线可过内分点 F 作，也就是过 F 作 $FG // BA$ 交 AC、BD 于 G、H. 则可得 $\triangle ABE \backsim \triangle FHE$，$\frac{BE}{HE}=\frac{AE}{FE}=2$，而 $BE=DE$，所以 $\frac{EH}{ED}=\frac{1}{2}$，$EH=DH$. 而由 $HG // BA$，就可得 $\frac{DG}{DA}=\frac{DH}{DB}=\frac{1}{4}$，而 $AD=\frac{1}{2}CD$，所以 $AG=\frac{3}{4}AD=\frac{3}{8}CD$，而 $CG=CD+DG=\frac{9}{8}CD$，所以 $\frac{AG}{CG}=\frac{1}{3}$，这样再由 $AB // GF$，也就可证明 $\frac{BF}{CF}=\frac{AG}{CG}=\frac{1}{3}$.

在上述分析中作出 $FG // BA$ 交 AC、BD 于 G、H 后，如不考虑直接应用 $\frac{AF}{FE}=2$，那末由 $\frac{BF}{CF}=\frac{AG}{CG}$，可知问题应转化为证 $\frac{AG}{CG}=\frac{1}{3}$. 而已知 $\frac{AD}{CD}=\frac{1}{2}$，所以实质性的问题就是要解决 DG 和 AC 的关系. 但由 $GH // AB$，可得 $\triangle DGH \backsim \triangle DAB$，$\frac{DG}{DA}=\frac{GH}{AB}$，$\frac{GH}{AB}=\frac{DG}{\frac{1}{3}AC}=\frac{3DG}{AC}$. 同时由 $FH // BA$，又可得 $\triangle EFH \backsim \triangle EAB$，$\frac{FH}{AB}=\frac{EH}{EB}$. 这样由 $\frac{GH}{AB}+\frac{FH}{AB}=\frac{GF}{AB}$，就可得 $\frac{GF}{AB}=\frac{3DG}{AC}+\frac{EH}{EB}$. 另一方

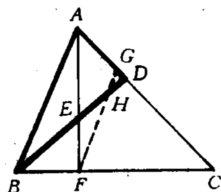


图 6·66

面由 $GF \parallel AB$，还可得$\triangle CGF \backsim \triangle CAB$，

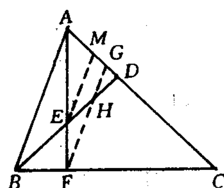


图 6・67

$\frac{GF}{AB}=\frac{CG}{AC}=\frac{DG+CD}{AC}=\frac{DG+\frac{2}{3}AC}{AC}=2.$ $\frac{3DG+2AC}{3AC}$. 比较这两个关系，可知应将 $\frac{EH}{EB}$ 也转化成 DG 和 AC 的关系，于是由 EH 和 EB 这一组相比线段重叠，可知也应添加平行线型相似三角形进行证明. 于是过 E 作 $EM \parallel BA$ 交 AD 于 M. 就可得 $AB \parallel ME \parallel GF$，$\frac{EH}{EB}=\frac{GM}{AM}$. 而由 $BE=DE$，可得 $AM=DM=\frac{1}{6}AC$，所以 $\frac{EH}{EB}=\frac{DM-DG}{AM}=\frac{\frac{1}{6}AC-DG}{\frac{1}{6}AC}=\frac{AC-6DG}{AC}$. 就可推得 $\frac{3DG}{AC}+\frac{AC-6DG}{AC}=\frac{3DG+2AC}{3AC}$，$\frac{AC-3DG}{AC}=\frac{3DG+2AC}{3AC}$，$3AC-9DG=3DG+2AC$，$DG=\frac{1}{12}AC$. 而 $AD=\frac{1}{3}AC$，所以 $\frac{DG}{AD}=\frac{1}{4}$，也就可得 $\frac{AG}{CG}=\frac{1}{3}$，分析就可以完成.

由于本题出现了 AD、CD 这一组相比线段重叠在一直线上，且过两端点 A、C 和内分点 D 的三直线 BA、BC、BD 共点于 B. 所以也可直接添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 添加的方法是作同与这共点三直线相交的 AC 的平行线.

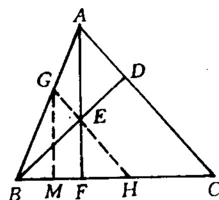


图 6・68

若平行线过 E 点作，则过 E 作 $GH \parallel AC$，且分别交 BA、BC 于 G、H，就可得 $\frac{GE}{HE}=\frac{AD}{CD}=\frac{1}{2}$. 同时由 $BE=DE$，又可得 $BG=AG$，$BH=CH$. 再由 GE 和 HE 这一组相比线段重叠，仍可添加

平行线型相似三角形进行证明，于是过 G 作 $GM /\!/ AF$ 交 BC 于 M，可得$\frac{MF}{HF}=\frac{GE}{HE}=\frac{1}{2}$，而由 $BG=AG$，又可得 $BM=FM$，那末再应用 $BH=CH$，就可证明结论.

若平行线过 F 点作，则过 F 作 $FG /\!/ CA$ 交 BD、BA 于 H、G，就可得$\frac{GH}{FH}=\frac{AD}{CD}=\frac{1}{2}$，而由 $FH /\!/ DA$，又可得$\triangle EFH \backsim \triangle EAD$，$\frac{FH}{AD}=\frac{FE}{AE}=\frac{1}{2}$，所以 $GH=\frac{1}{4}AD$. 从而由 $GH /\!/ AD$，可得$\triangle BGH \backsim \triangle BAD$，$\frac{BG}{BA}=\frac{GH}{AD}=\frac{1}{4}$，也就可证明$\frac{BF}{CF}=\frac{1}{3}$.

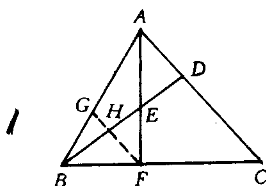


图 6・69

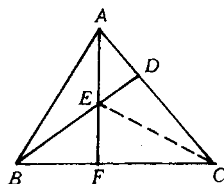


图 6・70

本题要证的结论是$\frac{BF}{CF}=\frac{1}{3}$，经过描图可发现这一组相比线段重叠在一直线上，所以也可以用面积的方法来进行证明. 由于过内分点 F 的线段 AF 上已经出现了两点 A、E，所以应将这两点分别与端点 B、C 连结起来，也就是连结 CE，即可得 $BF : CF=S_{\triangle ABE} : S_{\triangle ACE}=S_1 : S_2$（可先设 $S_{\triangle ABE}=S_1$，$S_{\triangle ACE}=S_2$）. 而由 $BE=DE$，可得 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADE}$，而在设 $S_{\triangle ADE}=S_3$ 后，就可得 $S_1=S_3$. 再由$\frac{AD}{CD}=\frac{1}{2}$，又可得 $AD : CD=S_{\triangle ADE} : S_{\triangle CDE}=S_3 : S_4=1 : 2$（可设 $S_{\triangle CDE}=S_4$），$S_4=2S_3$，$S_2=S_3+S_4=3S_3=3S_1$，即可证得 $BF : CF=S_1 : S_2=1 : 3$.

例 9 已知：$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，E 是 AD 的中点，

CE 的延长线交 AB 于 F. 求证：$AF=\frac{1}{2}BF$.

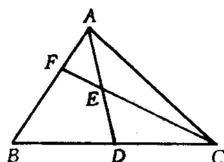


图 6・71

分析：本题条件中出现的 D、E 分别是 BC、AD 的中点，和结论中出现的 $AF=\frac{1}{2}BF$，在经过描图以后，都可以看出是出现了相比两线段重叠在一直线上，所以可添加平行线型相似三角形进行证明.

若从 BD 和 CD 这一组相比线段重叠出发，则第一种可能性是取 BF 为平行方向线段，平行线就可过内分点 D 作，也就是过 D 作 $DG /\!/ BF$ 交 CF 于 G，就可得 $DG=\frac{1}{2}BF$. 又因为 $AE=DE$，且 $DG /\!/ FA$，所以可证明$\triangle AEF \cong \triangle DEG$，$AF=DG$，分析就可以完成.

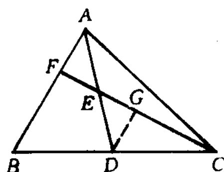


图 6・72

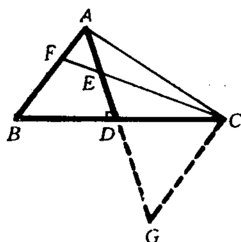


图 6・73

在取 BF 是平行方向线段时，平行线也可过另一个端点 C 作，也就是过 C 作 $CG /\!/ AB$ 交 AD 的延长线于 G，那末再由 $BD=CD$，就可以推得$\triangle ADB \cong \triangle GDC$，$AB=CG$，$AD=GD$. 而已知 $AE=DE$，所以 $EG=3AE$. 再由 $AF /\!/ CG$，又可证明$\triangle AEF \backsim \triangle GEC$，所以$\frac{AF}{GC}=\frac{AE}{GE}=\frac{1}{3}$，从而完成分析.

第二种可能性是取 DE 为平行方向线段，平行线就可以过端

点 B 作，也就是过 B 作 $BG // DE$ 交 CF 的延长线于 G，就可得 $DE=\frac{1}{2}BG$，$AE=\frac{1}{2}BG$. 而由 $BG // EA$，又可证 $\triangle AEF \backsim \triangle BGF$，从而就有 $\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{BG}=\frac{1}{2}$.

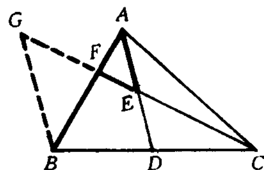


图 6・71

在取 DE 为平行方向线段时，平行线也可过另一个端点 C 作，也就是过 C 作 $CG // DE$ 交 BA 的延长线于 G. 就可得 $BA=GA$，$\frac{AD}{CG}=\frac{1}{2}$，而 $AE=DE$，所以 $\frac{AE}{GC}=\frac{1}{4}$，再由 $AE // GC$，可得 $\frac{AF}{AG}=\frac{1}{3}$，也可完成分析.

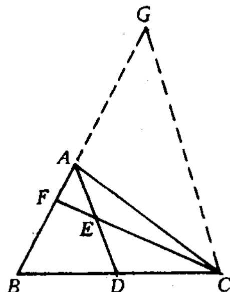


图 6・75

第三种可能性是取 CE 为平行方向线段，平行线就可以过内分点 D 作，也就是过 D 作 $DG // CE$ 交 AB 于 G，就可得 $BG=GF$. 而由 $AE=DE$ 和 $EF // DG$，又可得 $AF=GF$，所以也可证得 $AF=\frac{1}{2}BF$.

在取 CE 为平行方向线段时，平行线也可以过另一个端点 B 作，也就是过 B 作 $BG // EC$ 交 AD 的延长线于 G，则由 $BD=CD$ 就可证明 $\triangle CED \cong \triangle BGD$，$DE=DG$. 而已知 $AE=DE$，所以 $AE=\frac{1}{2}GE$，那末再由 $BG // FE$，就可以完成证明.

第四种可能性是取 CA 为平行方向线段，平行线就可以过内分点 D 作，也就是过 D 作 $DG // CA$ 交 AB 于 G，就可得 $BG=AG$，$DG=\frac{1}{2}CA$. 又因为 $AE=DE$，出现了相等两线段在一组对顶角的两边且成一直线，所以可应用中心对称型全等三角形进行证明. 于

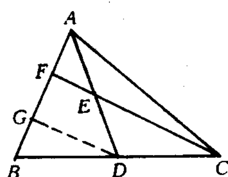


图 6・76

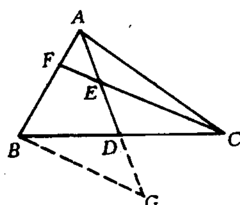


图 6・77

是延长 DG 交 CF 的延长线于 H，即可证明$\triangle ACE\cong\triangle DHE$，$AC=DH$，$DG=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}DH$，$GH=\frac{1}{2}AC$. 这样又可进一步证明$\triangle GHF\backsim\triangle ACF$，$\frac{GF}{AF}=\frac{GH}{AC}=\frac{1}{2}$，那么再由 $BG=AG$，就可以完成分析.

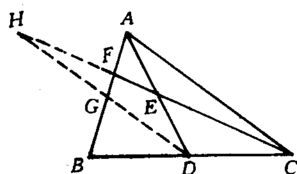


图 6・78

在取 CA 为平行方向线段时，平行线也可以过另一个端点 B 作，也就是过 B 作 $BG/\!/AC$ 交 AD 的延长线于 G，就可得$\triangle ACD\cong\triangle GBD$，$AC=GB$，$AD=GD$. 但 $AE=DE$，所以 $AE=\frac{1}{3}EG$. 而这一组相比线段又重叠在一直线上，所以又可应用平行线型相似三角形进行证明，于是延长 GB 交 CF 的延长线于 H，可得$\triangle ACE\backsim\triangle GHE$，$\frac{AE}{GE}=\frac{AC}{GH}=\frac{1}{3}$，$GH=3AC$，$BH=2AC$. 那末再由$\triangle ACF\backsim\triangle BHF$，就可以完成分析.

上述分析在得到 $AE=\frac{1}{3}EG$ 和应继续添加平行线型相似三角形进行证明后，也可以过 G 作 EF 的平行线，也就是过 G 作 $GH/\!/EF$ 交 AB 的延长线于 H. 就可得$\frac{AF}{HF}=\frac{AE}{GE}=\frac{1}{3}$，这样问题就成为要证 $AF=BH$，而由 $AC=BG$，$\angle FAC=\angle HBG$，以及$\angle AFC=\angle BHG$，就可证得$\triangle ACF$ 和$\triangle BGH$ 是一对平移型全等三等

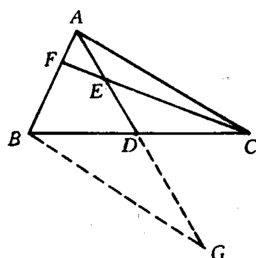


图 6・79

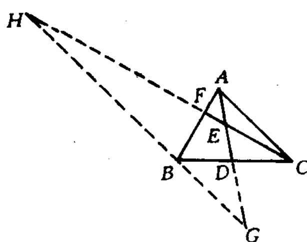


图 6・80

形，所以分析可以完成.

若从 AE 和 DE 这一组相比线段重叠出发，则第一种可能性是取 DB 或 DC 为平行方向线段，平行线可以过内分点 E 作，于是过 E 作 $EG /\!/ DB$ 交 AB 于 G，即可得 $AG=BG$，$EG=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}CD$，$EG=\frac{1}{4}BC$，而由 $EG /\!/ CB$，又可得 $\triangle FEG \backsim \triangle FCB$，所以 $\frac{FG}{FB}=\frac{EG}{CB}=\frac{1}{4}$，那么再由 $AG=BG$，就可以证明结论.

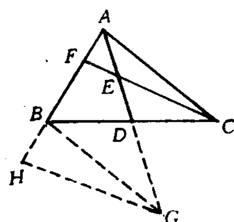


图 6・81

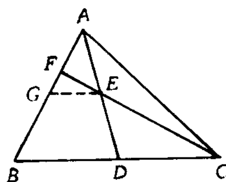


图 6・82

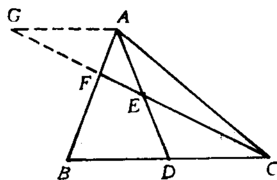


图 6・83

在取 DC 为平行方向线段时，平行线也可以过另一个端点 A 作，也就是过 A 作 $AG /\!/ CB$ 交 CF 的延长线于 G，即可由 $AE=$

DE，证得$\triangle AGE \cong \triangle DCE$，$AG=DC=\frac{1}{2}BC$. 那末再由 $AG /\!/ CB$，$\triangle AGF \backsim \triangle BCF$，就可以完成分析.

第二种可能性是取 AB 为平行方向线段，则平行线可过内分点 E 作，也就是过 E 作 $EG /\!/ AB$ 交 BC 于 G，则由 $AE=DE$，就可得 $BG=DG$，$EG=\frac{1}{2}AB$. 而由 $EG /\!/ FB$，又可得$\triangle CEG \backsim \triangle CFB$，$\frac{EG}{FB}=\frac{CG}{CB}=\frac{3}{4}$，$FB=\frac{4}{3}EG=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}AB=\frac{2}{3}AB$，从而完成分析.

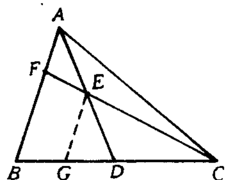


图 6・84

第三种可能性是取 AC 为平行方向线段，则平行线可过内分点 E 作，也就是过 E 作 $EG /\!/ AC$ 交 BC 于 G，就可得 $DG=CG$，$EG=\frac{1}{2}AC$. 再由 $BD=CD$，可得 $CG=\frac{1}{3}BG$. 这样又出现了这一组相比线段重叠在一直线上，可继续添加平行线型相似三角形进行证明. 于是延长 GE 交 AB 于 H，可得$\triangle BGH \backsim \triangle BCA$，$\frac{BH}{BA}=\frac{HG}{AC}=\frac{BG}{BC}=\frac{3}{4}$，所以 $EH=\frac{1}{4}AC$. 而由 $EH /\!/ CA$，又可得$\triangle FEH \backsim \triangle FCA$，$\frac{FH}{FA}=\frac{HE}{AC}=\frac{1}{4}$，从而也可以完成分析.

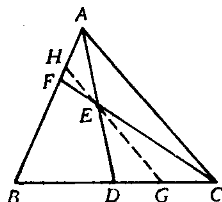


图 6・85

第四种可能性是取 EF 或 EC 为平行方向线段，则平行线可过端点 A 作，也就是过 A 作 $AG /\!/ FC$ 交 BC 的延长线于 G，即可得 $DC=GC$，$BC=2CG$. 那末再由 $CF /\!/ GA$，就可证明 $AF=\frac{1}{2}BF$.

若从 AF 和 BF 这一组相比线段重叠出发，则第一种可能性

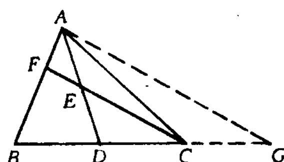


图 6・86

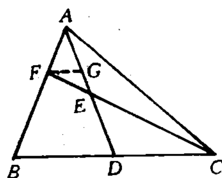


图 6・87

是取 BD 为平行方向线段，平行线过内分点 F 作，也就是过 F 作 $FG /\!/ BD$ 交 AD 于 G. 就可得$\triangle AFG \backsim \triangle ABD$，$\frac{FG}{BD}=\frac{AG}{AD}$. 而由 $FG /\!/ DC$ 又可得$\triangle FGE \backsim \triangle CDE$，$\frac{FG}{CD}=\frac{EG}{ED}$，而 $BD=CD$，$AD=2ED$，所以$\frac{AG}{2ED}=\frac{EG}{ED}$，$AG=2EG$，从而可完成分析.

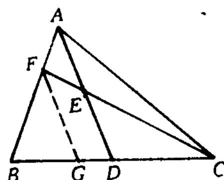


图 6・88

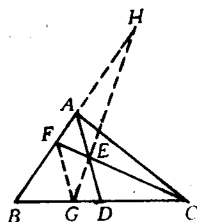


图 6・89

第二种可能性是取 AD 为平行方向线段，平行线过内分点 F 作，也就是过 F 作 $FG /\!/ AD$ 交 BC 于 G. 于是由 $FG /\!/ ED$，可得$\triangle CED \backsim \triangle CFG$，$\frac{DE}{GF}=\frac{CD}{CG}$. 而已知 $AE=DE$，AE 和 FG 也是一组平行线段，这样也就可以添加平行线型相似三角形进行证明，于是连结 GE，并延长 GE 交 BA 的延长线于 H，就可得$\triangle HAE \backsim \triangle HFG$，$\frac{AE}{FG}=\frac{HE}{HG}$. 这样又可证得$\frac{HE}{HG}=\frac{CD}{CG}$，经过描图可以发现这两组相比线段都重叠在一直线上，且有一公共的端点 G，所以仍

然可添加平行线型相似三角形进行证明，于是连结 CH，即可得 $CH /\!/ DE, CH /\!/ DA$. 又因为 $BD=CD$，所以 $BA=HA, AD=\frac{1}{2}HC$. $AE=\frac{1}{4}HC, AF=\frac{1}{4}HF$，而 $BA=HA$，所以结论可以证明.

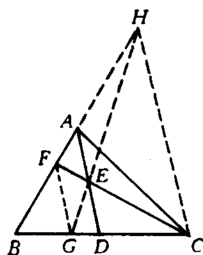


图 6・90

第三种可能性是取 AC 为平行方向线段，平行线过内分点 F 作，也就是过 F 作 $FG /\!/ AC$ 交 BC、AD 于 G、H，就可得 $\triangle BFG \backsim \triangle BAC, \frac{FG}{AC}=\frac{BG}{BC}$. 而由 $HG /\!/ AC$，又可得 $\triangle DGH \backsim \triangle DCA, \frac{GH}{CA}=\frac{GD}{CD}$. 再由 $FH /\!/ AC$，又可得 $\triangle FHE \backsim \triangle CAE, \frac{FH}{CA}=\frac{FE}{CE}$. 由于 FE 和 CE 这一组相比线段也重叠在一直线上，所以仍然可添加平行线型的相似三角形进行证明，于是过 E 作 $EK /\!/ AC /\!/ FG$ 交 BC 于 K，可得 $\frac{FE}{CE}=\frac{GK}{CK}$，而由 $AE=DE$ 也可得 $DK=CK$. 这样由 $FG=FH+GH$，就可得 $\frac{FG}{AC}=\frac{FH+GH}{AC}=\frac{FH}{AC}+\frac{GH}{AC}=\frac{GK}{CK}+\frac{GD}{CD}=\frac{DK-DG}{CK}+\frac{GD}{CD}=\frac{DC-2DG}{DC}+\frac{GD}{CD}=\frac{DC-DG}{CD}$，根据 $\frac{FG}{AC}=\frac{BG}{BC}=\frac{CD+DG}{2CD}$，可得 $CD+DG=2CD-2DG, DG=\frac{1}{3}CD, CG=\frac{1}{2}BG$，从而完成分析.

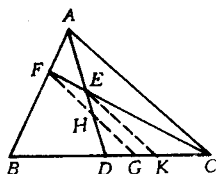


图 6・91

由于本题条件中出现 BD 和 CD 这一组相等线段重叠在一直线上，且过两个端点 B、C 和中点 D 的三直线 BA、CA、DA 共点于 A，所以可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明，添加的方法是作同与共点三直线相交的 BC 的平行线，所以过 E 作 GH

$/\!/ BC$ 交 AB、AC 于 G、H，就可得 $\frac{EG}{EH}=\frac{DB}{DC}$，而已知 $BD=CD$，所以 $EG=EH$. 又因为已知 $AE=DE$，出现了两组相等线段在一组对顶角的两边且成一直线，所以可添加中心对称型全等三角形进行证明，也就是连结 DH 后可得 $\triangle AEG \cong \triangle DEH$，$HD /\!/ AB$. 而由 C 点发出的三直线 CA、CF、CB 又都和这一组平行线相交，也可得平行线型相似三角形的组合图形，于是 $\frac{AF}{BF}=\frac{HK}{DK}$，问题就成为要证 $\frac{HK}{DK}=\frac{1}{2}$. 而由 $EH /\!/ DC$，又可得 $\triangle EHK \backsim \triangle CDK$，$\frac{HK}{DK}=\frac{EH}{CD}$，又因为 $AE=DE$，$EH /\!/ DC$，可得 $\frac{EH}{CD}=\frac{1}{2}$，所以分析完成.

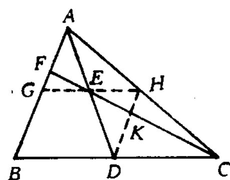


图 6・92

如从 AF 和 BF 这一组相比线段重叠，且过 A、B 两端点和内分点 F 的三直线共点于 C 来进行分析，则也可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明，且也应添加同与 CA、CF、CB 相交的 AB 的平行线. 于是过 E 作 $GH /\!/ BA$ 交 CB、CA 于 G、H，就可得 $\frac{AF}{BF}=\frac{HE}{GE}$，所以问题就成为要证 $\frac{HE}{GE}=\frac{1}{2}$，而由 $AE=DE$，又可证明 $BG=DG$，$EG=\frac{1}{2}AB$. 再由 $BD=CD$，$GH /\!/ BA$，可得 $\triangle CHG \backsim \triangle CAB$，$\frac{GH}{BA}=\frac{CG}{CB}=\frac{3}{4}$，$GH=\frac{3}{4}AB$，$EH=\frac{1}{4}AB$，所以分析完成.

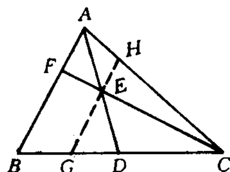


图 6・93

由于本题出现 AF 和 BF 这一组相比线段重叠在一直线上，所以也可以应用面积的方法来进行证明. 由于现在 E、C 是过内分

点 F 的直线上的两点，所以应将这两点分别与两端点连结起来，也就是连结 BE，就可得 $AF:BF=S_{\triangle ACE}:S_{\triangle BCE}=S_1:S_2$（先设 $S_{\triangle ACE}=S_1$，$S_{\triangle BCE}=S_2$）. 而由 $AE=DE$，可得 $S_{\triangle CDE}=S_{\triangle ACE}=S_1$，再由 $BD=CD$，又可得 $S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDE}=S_1$，所以 $S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BDE}+S_{\triangle CDE}$，$S_2=2S_1$，从而也可完成分析.

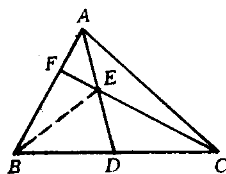


图 6・91

例 10 已知：$\triangle ABC$ 中，D、E 分别是 AB、AC 上的点，且 $\frac{AD}{BD}=\frac{3}{4}$，$\frac{CE}{AE}=\frac{2}{3}$，$DE$ 的延长线交 BC 的延长线于 F.

求证：$\frac{EF}{DF}=\frac{7}{10}$.

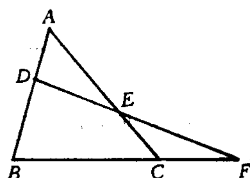


图 6・95

分析：本题的条件和结论中出现的都是线段之间的比例关系，经过描图可以发现这三组相比线段都重叠在一直线上，所以可添加平行线型相似三角形进行证明.

若首先讨论 AD 和 BD 这一组相比线段重叠的情况，则平行方向线段可取 BC、DE 或 AE.

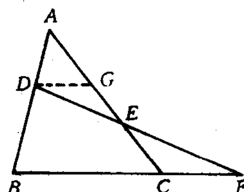


图 6・96

如取 BC 为平行方向线段，则平行线可过内分点 D 作，也就是过 D 作 $DG\parallel BC$ 交 AC 于 G. 就可得 $\frac{AG}{CG}=\frac{AD}{BD}=\frac{3}{4}$，而 $\frac{AE}{CE}=\frac{3}{2}$，亦即 $AG=\frac{3}{7}AC$，$CG=\frac{4}{7}AC$，$CE=\frac{2}{5}AC$. 而由 $DG\parallel BC$，又可得 $\triangle DGE\backsim\triangle FCE$，所以就有 $\frac{EF}{DF}=\frac{EC}{GC}=\frac{7}{10}$.

在取 BC 为平行方向线段时，平行线也可以过另一个端点 A

作，即过 A 作 $AG /\!/ FB$ 交 FD 的延长线于 G，就可得$\triangle AGD \backsim \triangle BFD$，$\frac{DG}{DF}=\frac{AD}{BD}=\frac{3}{4}$，$DG=\frac{3}{7}GF$. 根据同样的道理还可得$\triangle GAE \backsim \triangle FCE$，$\frac{GE}{FE}=\frac{AE}{CE}=\frac{3}{2}$，$EF=\frac{2}{5}GF$. 所以 $DF=GF-DG=\frac{4}{7}GF$，也就可证明$\frac{EF}{DF}=\frac{7}{10}$.

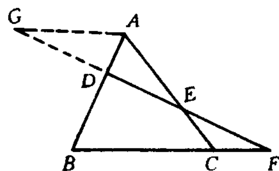


图 6・97

如取 DE 为平行方向线段，则平行线可过端点 B 作，也就是过 B 作 $BG /\!/ DE$ 交 AC 的延长线于 G. 就可得$\frac{DE}{BG}=\frac{AE}{AG}=\frac{AD}{AB}=\frac{3}{7}$，$DE=\frac{3}{7}BG$，$AE=\frac{3}{4}EG$，所以 $CE=\frac{2}{3}AE=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}EG=\frac{1}{2}EG$，$C$ 就是 EG 的中点，这样就可得$\triangle EFC$ 和$\triangle GBC$ 是一对中心对称型全等三角形，$BG=EF$，$\frac{DE}{EF}=\frac{3}{7}$，所以可证明$\frac{EF}{DF}=\frac{7}{10}$.

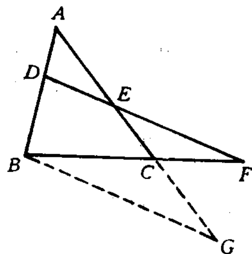


图 6・98

在取 DE 为平行方向线段时，平行线还可以过端点 A 作，也就是过 A 作 $AG /\!/ DE$ 交 BF 的延长线于 G. 就可得$\triangle BDF \backsim \triangle BAG$，$\frac{DF}{AG}=\frac{BD}{BA}=\frac{4}{7}$. 而由 $EF /\!/ AG$，又可得$\triangle CEF \backsim \triangle CAG$，$\frac{EF}{AG}=\frac{CE}{CA}=\frac{2}{5}$，从而也可以证明结论.

如取 AE 为平行方向线段，则平行线可过内分点 D 作，即作 $DG /\!/ AC$ 交 BC 于 G，就可得$\triangle BDG \backsim \triangle BAC$，$\frac{DG}{AC}=\frac{BD}{BA}=\frac{4}{7}$. 而

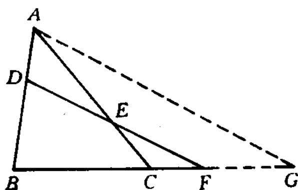


图 6・99

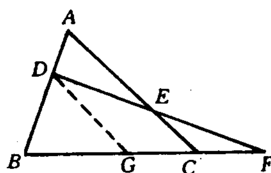


图 6・100

由 $CE=\frac{2}{5}AC$，就可得$\frac{CE}{DG}=\frac{7}{10}$，再由 $EC\parallel DG$，可得$\triangle FEC\backsim\triangle FDG$，$\frac{EF}{DF}=\frac{CE}{DG}$，所以分析可以完成.

在取 AE 为平行方向线段时，平行线也可过另一端点 B 作，于是过 B 作 $BG\parallel CA$ 交 FD 的延长线于 G，就可得$\triangle AED\backsim\triangle BGD$，$\frac{AE}{BG}=\frac{AD}{BD}=\frac{ED}{GD}=\frac{3}{4}$，而由 $EC=\frac{2}{3}AE$ 又可得 $EC=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}BG=\frac{1}{2}BG$，于是再由 $CF\parallel BG$，得$\triangle FEC\backsim\triangle FGB$，$\frac{FE}{FG}=\frac{EC}{GB}=\frac{1}{2}$，$FE=GE$，从而也可证明$\frac{EF}{DF}=\frac{7}{10}$.

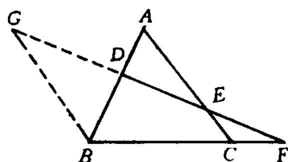


图 6・101

若我们的分析是从 AE 和 CE 这一组相比线段重叠出发，则平行方向线段可取 CB、ED 或 AB.

若取 CB 为平行方向线段，则平行线可过内分点 E 作，也就是过 E 作 $EG\parallel CB$ 交 AB 于 G，就可得$\frac{BG}{AG}=\frac{CE}{AE}=\frac{2}{3}$，$BG=\frac{2}{5}AB$，而 $BD=\frac{4}{7}AB$，所以再由 $GE\parallel BF$，$\frac{EF}{DF}=\frac{BG}{BD}$就可以证明结论.

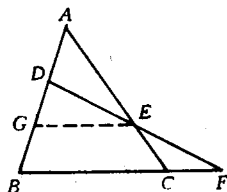


图 6・102

若取 ED 为平行方向线段，则平行线可过端点 C 作，也就是过 C 作 $CG /\!/ ED$ 交 AB 于 G，就可得 $\frac{DG}{DA}=\frac{EC}{EA}=\frac{2}{3}$，而已知 $\frac{DB}{DA}=\frac{4}{3}$，所以 $\frac{DG}{DB}=\frac{1}{2}$，$G$ 是 BD 的中点. 再由 $GC /\!/ DF$，可得 $DF=2GC$. 而由 $\triangle ADE \backsim \triangle AGC$ 还可得 $\frac{DE}{GC}=\frac{AE}{AC}=\frac{3}{5}$，$DE=\frac{3}{5}GC$，$FE=DF-DE=\frac{7}{5}GC$，从而也可证明 $\frac{EF}{DF}=\frac{7}{10}$.

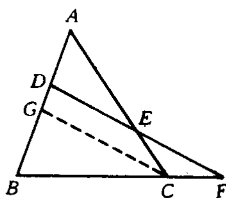


图 6 · 103

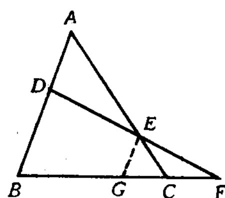


图 6 · 104

若取 AB 为平行方向线段，则平行线可过内分点 E 作，也就是过 E 作 $EG /\!/ AB$ 交 BF 于 G，就可得 $\triangle CEG \backsim \triangle CAB$，$\frac{EG}{AB}=\frac{EC}{AC}=\frac{2}{5}$，$EG=\frac{2}{5}AB$，而 $BD=\frac{4}{7}AB$，所以再由 $EG /\!/ DB$，就可证明 $\frac{EF}{DF}=\frac{EG}{DB}=\frac{7}{10}$.

在取 AB 为平行方向线段时，平行线也可以过另一个端点 C 作，也就是过 C 作 $CG /\!/ BA$ 交 DF 于 G，就可得 $\triangle CGE \backsim \triangle ADE$，$\frac{EG}{ED}=\frac{CG}{AD}=\frac{CE}{AE}=\frac{2}{3}$，而 $\frac{BD}{AD}=\frac{4}{3}$，所以 $BD=2CG$. 那么再由 $CG /\!/ BD$，$\triangle FGC \backsim \triangle FDB$，可得 $\frac{FG}{FD}=\frac{CG}{BD}=\frac{1}{2}$，$G$ 是 DF 的中点，$EG : ED : FG = 2 : 3 : 5$，所以分析可以完成.

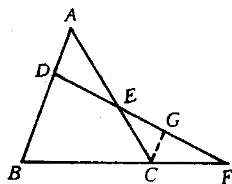


图 6 · 105

若我们的分析是从 EF 和 DF 这一组相比线段重叠出发，则平行方向线段可取 FC(或 FB)、EC(或 EA)、DB(或 DA).

如取 EC 为平行方向线段，则平行线可过端点 F 作，也就是过 F 作 $FG \parallel CA$ 交 BA 的延长线于 G，就可得 $\triangle DAE \backsim \triangle DGF$，这样要证明 $\frac{EF}{DF}=\frac{7}{10}$，就转化为要证 $\frac{GF}{AE}=\frac{10}{3}$，而 $\frac{AE}{CE}=\frac{3}{2}$，所以就应证 $\frac{GF}{AC}=\frac{10}{5}=2$，也就是要证 C 是 BF 的中点，而这个性质我们已经证明，所以分析可以完成.

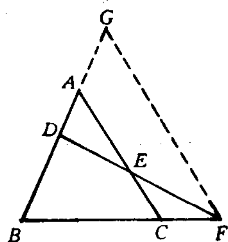


图 6・106

如取 DA 为平行方向线段，则平行线可过端点 F 作，也就是过 F 作 $FG \parallel AD$ 交 AC 的延长线于 G，则由 $\triangle ADE \backsim \triangle GFE$，可知问题应转化为证 $\frac{GF}{AD}=\frac{FE}{DE}=\frac{7}{3}$，而已知 $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{7}$，从而又应证 $GF=AB$，但这两条线段平行，从而可应用中心对称型全等三角形进行证明，也就是要证 $\triangle ABC \cong \triangle GFC$，这样问题又成为要证 $BC=FC$，由于这个性质可以证明，所以分析可以完成.

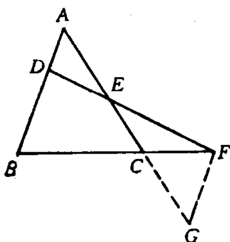


图 6・107

本题由于出现的是三组相比线段重叠，所以也可以用面积的方法进行证明. 由于 E、F 是过内分点 D 的直线上的两点，所以连结 BE、AF，可得 $S_{\triangle AFE} : S_{\triangle BFE}=AD : BD=3:4$，$S_{\triangle AFE} : S_{\triangle CFE}=AE : CE=3:2$，所以 $S_{\triangle CFE}=\frac{1}{2}S_{\triangle BFE}$，$S_{\triangle CFE}=$

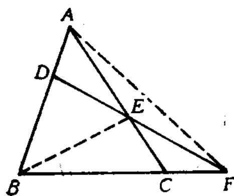


图 6・108

$S_{\triangle BCE}$，从而可进一步推得 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AFE}$. 但 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABE}=AD:AB=3:7$，所以 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle AFE}=DE:FE=3:7$，从而也可以完成分析.

例 11 已知：□$ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，F 是 AD 上的一点，$AF=\frac{1}{2}DF$，EF 交 AC 于 G.

求证：$AG=\frac{1}{5}AC$.

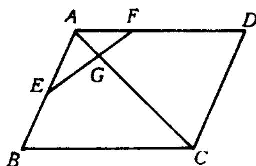


图 6・109

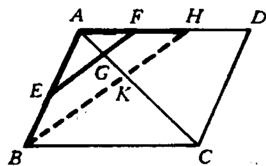


图 6・110

分析：本题的条件和结论中，都出现了线段之间的比例关系，经过描图可以发现三组相比线段都重叠在一直线上，于是可应用或添加平行线型相似三角形进行证明.

如果我们从 AE 和 AB 这一组相比线段重叠出发进行分析，那么平行方向线段就可以取 EF、BC、AC、AD.

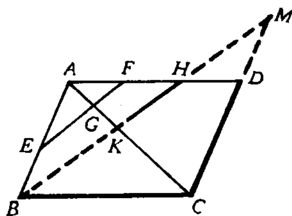


图 6・111

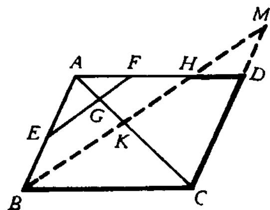


图 6・112

若取 EF 为平行方向线段，则平行线可过端点 B 作，也就是过 B 作 $BH/\!/EF$ 交 AC、AD 于 K、H. 就可得 $\triangle AEF\backsim\triangle ABH$，$\frac{EF}{BH}$

$=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$，$AG=GK$，$AF=FH$. 这样要证明 $AG=\frac{1}{5}AC$，就可转化成为要证 $AK=\frac{2}{5}AC$，$AK=\frac{2}{3}CK$. 这样又出现了 AK 和 CK 这一组相比线段重叠在一直线上，所以仍然应添加平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是将过端点的平行线与过内分点的直线相交，所以延长 CD 交 BH 的延长线于 M，就可得$\triangle ABK\backsim\triangle CMK$，$\frac{AK}{CK}=\frac{AB}{CM}$，这样问题就成为要证$\frac{AB}{CM}=\frac{2}{3}$，而已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AB=CD$，所以问题又应证$\frac{CD}{CM}=\frac{2}{3}$或$\frac{DM}{CM}=\frac{1}{3}$，现在这一组相比线段 DM 和 CM 仍然重叠在一直线上，所以又可以应用平行线型相似三角形进行证明. 由于 $DH\parallel CB$，所以$\triangle MDH\backsim\triangle MCB$，$\frac{DM}{CM}=\frac{DH}{CB}$，从而问题又应证$\frac{DH}{CB}=\frac{1}{3}$，$\frac{DH}{DA}=\frac{1}{3}$. 由条件 $AE=BE$，$BH\parallel EF$，可得 $AF=FH$，那末再由 $AF=\frac{1}{2}DF$，就可以证明上述性质，从而完成分析.

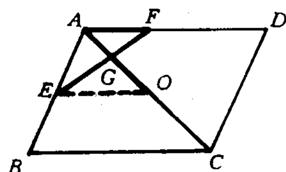


图 6・113

若取 BC 为平行方向线段，则平行线可过内分点 E 作，也就是过 E 作 $EO\parallel BC$ 交 AC 于 O，则由 $AE=BE$，可推得 $AO=CO=\frac{1}{2}AC$，$EO=\frac{1}{2}BC$. 而由 $AF\parallel EO$，又可得$\triangle AFG\backsim\triangle OEG$，所以

$$\frac{AG}{OG}=\frac{AF}{EO}=\frac{\frac{1}{3}AD}{\frac{1}{2}AD}=\frac{2}{3},\frac{AG}{AO}=\frac{2}{5}，从而可证明\frac{AG}{AC}=\frac{1}{5}.$$

若取 AC 为平行方向线段，则平行线可过内分点 E 作，也就是过 E 作 $EH\parallel AC$ 交 BC 于 H. 可得 H 是 BC 的中点，$EH=\frac{1}{2}$

AC. 于是由 $AF=\frac{1}{3}AD$ 和 $CH=\frac{1}{2}BC$，$AD=BC$，可得$\frac{AF}{CH}=\frac{2}{3}$. 又因为 AF 和 CH 是一组平行线段，所以仍可添加平行线型相似三角形进行证明，于是过 H 作 $HK/\!/EF$ 交 AC 于 K，就可得$\triangle AFG\backsim\triangle CHK$，$\frac{AG}{CK}=\frac{AF}{CH}=\frac{2}{3}$，$CK=\frac{3}{2}AG$，从而有 $AC=AG+GK+CK=AG+\frac{1}{2}AC+\frac{3}{2}AG$，$\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}AG$，即可证得结论.

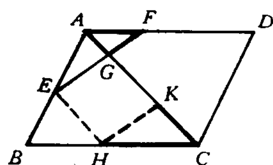


图 6・114

本题在上述分析中，在得到$\frac{AF}{CH}=\frac{2}{3}$后，由于这是一组平行线段，所以也可以将它们的端点两两连结来组成平行线型相似三角形，所以连结 FH 交 AC 于 K，就可得$\triangle AFK\backsim\triangle CHK$，$\frac{AK}{CK}=\frac{FK}{HK}=\frac{AF}{CH}=\frac{2}{3}$，$AK=\frac{2}{5}AC$. 由 $GK/\!/EH$，又可得$\triangle FGK\backsim\triangle FEH$，$\frac{GK}{EH}=\frac{FK}{FH}=\frac{2}{5}$，$GK=\frac{2}{5}EH=\frac{1}{5}AC$，从而也就可以证明 $AG=\frac{1}{5}AC$.

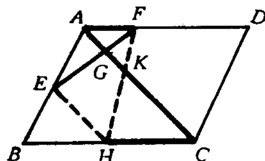


图 6・115

如果我们从 AF 和 DF 这一组相比线段重叠出发进行分析，那么第一种可能性是取 DC 为平行方向线段，平行线可过内分点 F 作，也就是过 F 作 $FH/\!/DC$ 交 AC 于 H，就可得$\triangle AFH\backsim\triangle ADC$，$\frac{AH}{AC}=\frac{FH}{DC}=\frac{AF}{AD}$

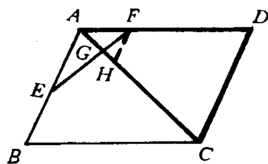


图 6・116

$=\frac{1}{3}$，而 $AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD$，所以 $\frac{FH}{AE}=\frac{2}{3}$，而 $FH /\!/ AE$，$\triangle FHG \backsim \triangle EAG$，$\frac{GH}{GA}=\frac{FH}{EA}=\frac{2}{3}$，所以 $AG=\frac{3}{5}AH=\frac{1}{5}AC$.

第二种可能性是取 FE 为平行方向线段，平行线过端点 D 作，也就是过 D 作 $DH /\!/ FE$ 交 AC 于 H，则可得 $\triangle AFG \backsim \triangle ADH$，$\frac{AG}{AH}=\frac{AF}{AD}=\frac{1}{3}$. 而由 $AE /\!/ DC$，$EG /\!/ HD$，又可得 $\triangle AEG \backsim \triangle CDH$，$\frac{AG}{CH}=\frac{AE}{CD}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{AG}{AC}=\frac{1}{5}$ 就可以证明.

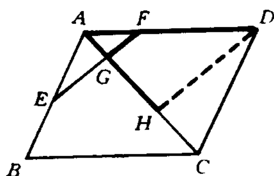


图 6・117

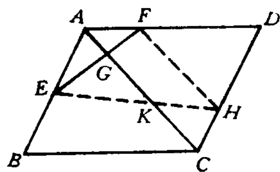


图 6・118

第三种可能性是取 AC 为平行方向线段，则平行线可过内分点 F 作，也就是过 F 作 $FH /\!/ AC$ 交 CD 于 H，就可得 $\frac{CH}{CD}=\frac{AF}{AD}=\frac{1}{3}$，$\frac{FH}{AC}=\frac{FD}{AD}=\frac{2}{3}$. 那么再由 $AE=\frac{1}{2}AB$，可得 $\frac{CH}{AE}=\frac{2}{3}$，而 CH 和 AE 是两条平行线段，从而又可以添加平行线型相似三角形进行证明，于是连结 EH 交 AC 于 K，可得 $\triangle AEK \backsim \triangle CHK$. $\frac{AK}{CK}=\frac{AE}{CH}=\frac{3}{2}$，$CK=\frac{2}{5}AC$，又因 $GK /\!/ FH$，$\triangle EGK \backsim \triangle EFH$，$\frac{GK}{FH}=\frac{EK}{EH}=\frac{3}{5}$，$GK=\frac{3}{5}FH=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}AC=\frac{2}{5}AC$，所以 $AG=\frac{1}{5}AC$ 可以证明.

例 12 已知：任意六边形 $ABCDEF$ 中，G_1、G_2、G_3、G_4 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle DEF$、$\triangle EFA$ 的重心. 求证：四边形 $G_1G_2G_3G_4$

是平行四边形.

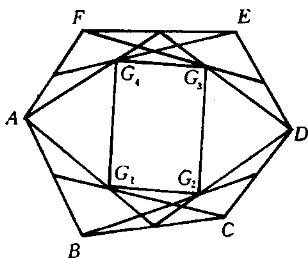


图 6・119

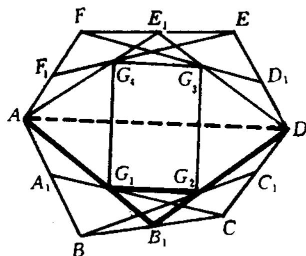


图 6・120

分析:设 A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1 分别是六边形各边的中点,则 G_1 是 AB_1、CA_1 的交点,$\frac{B_1G_1}{B_1A}=\frac{1}{3}$,根据同样的道理又可得$\frac{B_1G_2}{B_1D}=\frac{1}{3}$,从而$\frac{B_1G_1}{B_1A}=\frac{B_1G_2}{B_1D}$. 这是线段之间的比例关系,经过描图可以发现,两组相比线段都重叠在一直线上,且有一公共端点 B_1,所以可添加平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是将内分点和内分点、端点和端点分别连结起来,也就是连结 AD,可得$\triangle B_1G_1G_2 \backsim \triangle B_1AD$,$G_1G_2 /\!/ AD$,且$\frac{G_1G_2}{AD}=\frac{1}{3}$. 用同样的方法,又可得 $G_3G_4 /\!/ AD$,且$\frac{G_3G_4}{AD}=\frac{1}{3}$. 从而可证明结论.

例 13 已知:$\triangle ABC$ 中,D 是 BC 的中点,E 是 AD 上的任一点,CE 的延长线交 AB 于 F. 求证:$\frac{AE}{DE}=\frac{2AF}{BF}$.

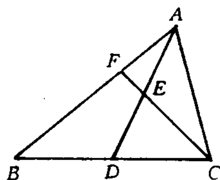


图 6・121

分析:本题要证明的结论是线段之间的比例关系,经过描图可以发现 AE 和 DE,AF 和 BF 这两组相比线段都重叠在一直线上,所以可添加平行线型相似三角

形进行证明.

如从 AE 和 DE 这一组相比线段出发进行分析,则可取过端点 D 的线段 DC 为平行方向线段,平行线就可以过另一个端点 A 作,于是过 A 作 $AG/\!/CD$ 交 CF 的延长线于 G,就可得$\triangle AGE\backsim\triangle DCE$,$\frac{AE}{DE}=\frac{AG}{DC}$. 而由 $AG/\!/CB$,又可得$\triangle AGF\backsim\triangle BCF$,$\frac{AF}{BF}=\frac{AG}{BC}$,但已知 $BC=2DC$,所以$\frac{AE}{DE}=\frac{2AF}{BF}$就可证明.

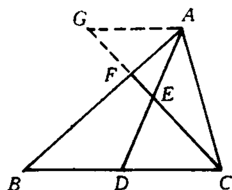


图 6・122

若取过内分点的 FE 为平行方向线段,则平行线可过端点 D 作,也就是过 D 作 $DG/\!/EF$ 交 AB 于 G,就可得$\frac{AE}{DE}=\frac{AF}{GF}$. 而由 $BD=CD$,又可推得 $BG=GF=\frac{1}{2}BF$,所以结论可以证明.

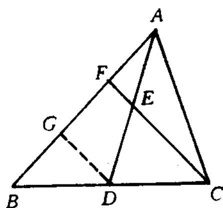


图 6・123

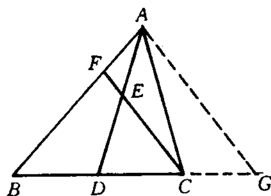


图 6・124

在取 FE 为平行方向线段时,平行线也可以过另一个端点 A 作,也就是过 A 作 $AG/\!/FC$ 交 BC 的延长线于 G,就可得$\frac{AE}{DE}=\frac{GC}{DC}$,$\frac{AF}{BF}=\frac{GC}{BC}$. 而 $BC=2DC$,所以结论可证明.

若取过端点 A 的线段 AC 为平行方向线段,则平行线可过内分点 E 作,也就是过 E 作 $EG/\!/AC$ 交 BC 于 G,就可得$\frac{AE}{DE}=\frac{CG}{DG}$. 另一方面,由于 AF、BF 这一组相比线段也重叠在一直线上,且过

端点 A、B 和内分点 F 的三直线共点于 C，所以可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明，于是过 E 作 $KH /\!/ AB$ 交 AC、BC 于 K、H，就可得 $\frac{AF}{BF}=\frac{KE}{HE}$，而 $EG /\!/ KC$，所以 $\frac{KE}{HE}=\frac{CG}{HG}$. 而由 $EH /\!/ AB$，又可得 $\frac{DE}{DA}=\frac{DH}{DB}=\frac{DG}{DC}$，而 $BD=CD$，所以 $HD=GD$，$HG=2DG$，所以结论就可证明.

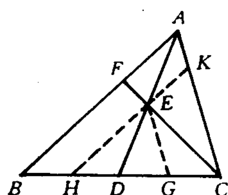


图 6·125

在取 AC 为平行方向线段后，平行线也可以过另一个端点 D 作，也就是过 D 作 $DG /\!/ CA$ 交 CF 的延长线于 G，交 AB 于 H，就可得 $\triangle ACE \backsim \triangle DGE$，$\frac{AE}{DE}=\frac{AC}{DG}$. 同时又可得 $\triangle ACF \backsim \triangle HGF$，$\frac{AF}{HF}=\frac{AC}{HG}$. 又因为 $BD=DC$，所以有 $BH=AH$，$DH=\frac{1}{2}AC$，那末 $BF=BH+HF=2HF+AF$，从而就有 $\frac{AF}{BF}=\frac{AF}{2HF+AF}=\frac{AC}{2HG+AC}=\frac{AC}{2\left(HG+\frac{1}{2}AC\right)}=\frac{AC}{2(HG+HD)}=\frac{AC}{2DG}$，从而完成分析.

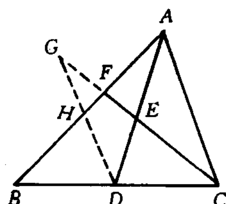


图 6·126

若取过端点 A 的线段 AB 为平行方向线段，则平行线可过另一端点 D 作，也就是过 D 作 $DG /\!/ BA$ 交 CF 于 G，就可得 $\triangle AFE \backsim \triangle DGE$，$\frac{AE}{DE}=\frac{AF}{DG}$. 又因 $BD=CD$，所以又可得 $FG=CG$，$DG=\frac{1}{2}BF$，这样分析也可以完成.

本题的分析在取 DC 或 DB 为平行方向线段后，平行线也可

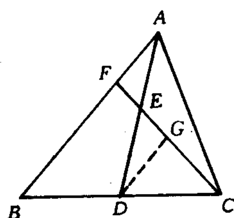


图 6・127

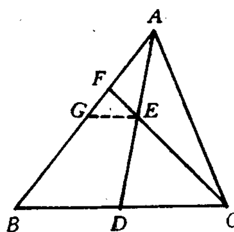


图 6・128

以过内分点 E 作，也就是过 E 作 $EG /\!/ DB$ 交 AB 于 G，就可得$\frac{AE}{DE}=\frac{AG}{BG}$. 但在作了 $EG /\!/ BC$ 后，条件中给出的 BD 和 CD 这两条相等线段就重叠在一组平行线段上，从而就可添加平行线型相似三

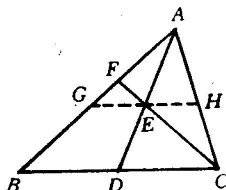


图 6・129

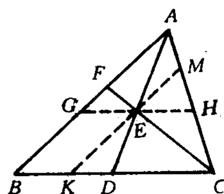


图 6・130

角形的组合图形进行证明. 由于现在过端点 B、C 和中点 D 的共点三直线是 AB、AC 和 AD，所以延长 GE 交 AC 于 H，可得$\frac{GE}{BD}=\frac{HE}{CD}$，$GE=HE$. 又因为经过描图可发现结论中出现的另一组相比线段 AF、BF 也重叠在一直线上，且过端点 A、B 和内分点 F 的三直线也共点于 C，所以仍可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明，于是过 E 作 $MK /\!/ AB$ 交 CA、CB 于 M、K，就可得$\frac{AF}{BF}=\frac{ME}{KE}$. 但由四边形 $BKEG$ 是平行四边形，可得 $BG=KE$. 由 GE

$=HE$，$EM /\!/ GA$，又可得 $AG=2ME$，所以$\frac{AG}{BG}=\frac{2ME}{KE}=\frac{2AF}{BF}$，分析就可以完成.

本题的分析如从 AF 和 BF 这一组相比线段重叠出发，则平行方向线段也可取过端点的线段 BD，那么平行线就可以过内分点 F 作，也就是过 F 作 $FG /\!/ BD$ 交 AD 于 G，就可得$\frac{AF}{BF}=\frac{AG}{DG}$. 于是$\frac{AE}{DE}=\frac{AG+EG}{DG-EG}=\left(\frac{AG}{DG}+\frac{EG}{DG}\right):\left(1-\frac{EG}{DG}\right)$，从而就要解决$\frac{EG}{DG}$的关系. 而由 $FG /\!/ DC$，可得$\triangle FGE \backsim \triangle CDE$，$\frac{EG}{DG}=\frac{FG}{DC+FG}=\frac{FG}{BD+FG}=\frac{AF}{AB+AF}=\frac{AF}{BF+2AF}$，这样代入上式后就可得$\frac{AE}{DE}=\left(\frac{AF}{BF}+\frac{AF}{BF+2AF}\right):\left(1-\frac{AF}{BF+2AF}\right)=\left(\frac{AF\cdot BF+2AF^2+AF\cdot BF}{BF(BF+2AF)}\right):\left(\frac{BF+2AF-AF}{BF+2AF}\right)=\frac{2AF(AF+BF)}{BF(AF+BF)}$，也就可证明结论.

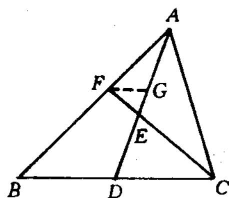


图 6・131

如取过内分点 F 的 EF 为平行方向线段，则平行线可过端点 B 作，即过 B 作 $BG /\!/ FE$ 交 AD 的延长线于 G，就可得$\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{EG}$，而我们要证明$\frac{AE}{DE}=\frac{2AF}{BF}$，也就是要证$\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{2DE}$，从而问题就成为要证 $EG=2DE$，D 是 EG 的中点. 由条件 $BD=CD$，$BG /\!/ EC$，所以$\triangle CED$ 和$\triangle BGD$ 是一对中心对称型全等三角形，所以分析可以完成.

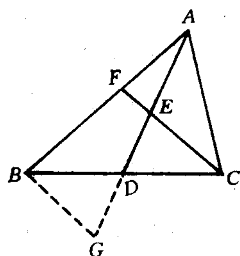


图 6・132

如取过端点 A 的 AE 为平行方向线段，则平行线可过另一个

端点 B 作，也就是过 B 作 $BG \parallel EA$ 交 CF 的延长线于 G，就可得 $\triangle AEF \backsim \triangle BGF$，$\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{BG}$. 又因为 $BD=CD$，$DE \parallel BG$，所以 $BG=2DE$，也就可以完成分析.

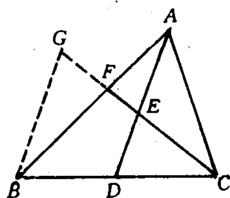


图 6・133

在取 AE 为平行方向线段时，平行线也可过内分点 F 作，也就是过 F 作 $FG \parallel AD$ 交 BC 于 G，就可得 $\frac{AF}{BF}=\frac{DG}{BG}$. 但在作出了 $FG \parallel AD$ 后，就出

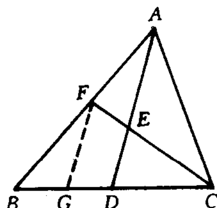


图 6・134

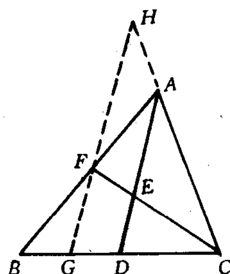


图 6・135

现了 AE 和 DE 这一组相比线段重叠在一组平行线段上，且过端点 A、D 和内分点 E 的三直线 AC、DC、EC 是共点于 C 的，从而可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 于是延长 GF 交 CA 的延长线于 H，可得 $\frac{AE}{DE}=\frac{HF}{GF}$，这样问题就成为要证 $\frac{HF}{GF}=\frac{2DG}{BG}$. 由于 HF 和 GF 这一组相比线段仍然重叠在一直线上，所以仍然应添加平行线型相似三角形进行证明，于是过 F 作 $FM \parallel GC$ 交 AC 于 M，就可得 $\frac{HF}{GF}=\frac{HM}{CM}$，但 HM 和 CM 这一组相比线段还是重叠在一直线上，所以可再一次应用平行线型相似三角形进行证明，从而过 M 作 $MN \parallel HG$ 交 BC 于 N，就可得 $\frac{HM}{CM}=$

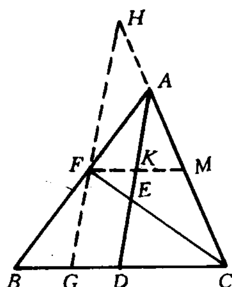


图 6・136

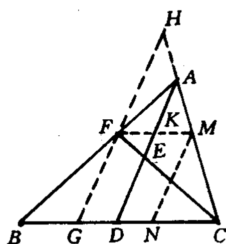


图 6・137

$\frac{GN}{CN}$,这样问题就成为要证$\frac{GN}{CN}=\frac{2DG}{BG}$. 由条件 $BD=CD$,且过端点 B、C 和中点 D 的三直线 BA、CA、DA 共点于 A,所以可应用平行线型相似三角形的组合图形进行证明,于是由 $FM/\!/BC$,就可得在设 FM 交 AD 于 K 后有$\frac{FK}{BD}=\frac{MK}{CD}$,$FK=MK$,而由 $FG/\!/KD/\!/MN$ 和 $FM/\!/GN$,又可得 $GD=DN$,$GN=2DG$ 和 $BG=CN$,所以分析完成.

如取过端点 A 的 AC 为平行方向线段,则平行线可过另一端点 B 作,也就是过 B 作 $BG/\!/CA$ 交 CF 的延长线于 G,就可得$\triangle ACF\backsim\triangle BGF$,$\frac{AF}{BF}=\frac{AC}{BG}$. 根据同样的道理,过 D 作 $DH/\!/CA$ 交 CG 于 H 后,可得 $\triangle ACE\backsim\triangle DHE$,$\frac{AE}{DE}=\frac{AC}{DH}$. 但 $BD=CD$,$DH/\!/CA/\!/BG$,所以 $GH=CH$,$BG=2DH$,分析完成.

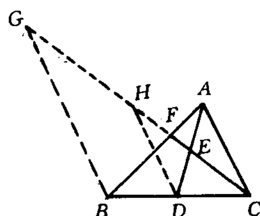


图 6・138

本题在过 B 作 CA 的平行线时,也可以直接和 CF、AD 的延长线分别相交于 G、H,从而可得$\frac{AF}{BF}=\frac{AC}{BG}$,$\frac{AE}{HE}=\frac{AC}{HG}$. 而由 $BD=$

CD 和 $BH /\!/ AC$，又可得$\triangle BHD$ 和$\triangle CAD$ 是一对中心对称型全等三角形，所以 $BH=AC$，$HD=AD$，从而就有$\frac{AE}{HE}=\frac{AE}{2DE+AE}=\frac{AC}{BH+BG}=\frac{AC}{BG+AC}$，就可得$\frac{AE}{2DE}=\frac{AC}{BG}$，从而完成分析.

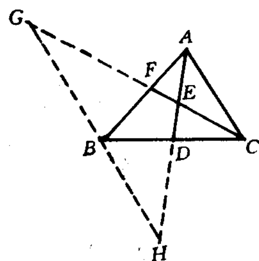


图 6・139

在取 AC 为平行方向线段后，也可以过内分点 F 作平行线，也就是过 F 作 $FG /\!/ AC$ 交 BC 于 G，就可得$\frac{AF}{BF}=\frac{CG}{BG}$. 又因为 AE、DE 这一组相比线段也重叠在一直线上，且过端点 A、D 和内分点 E 的三直线共点于 C，所以可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明，于是过 F 作 $HK /\!/ AD$ 交 BC 于 H，交 CA 的延长线于 K，就可得$\frac{AE}{DE}=\frac{KF}{HF}$，而由 $FG /\!/ KC$，又可得$\frac{KF}{HF}=\frac{CG}{HG}$，这样问题就成为应证$\frac{CG}{HG}=\frac{2CG}{BG}$，$HG=\frac{1}{2}BG$. H 是 BG 的中点，但已知 D 是 BC 的中点，所以又应证 $DH=\frac{1}{2}CG$. 由$\frac{DH}{DB}=\frac{AF}{AB}=\frac{CG}{BC}=\frac{CG}{2DB}$，就可以证明上述性质.

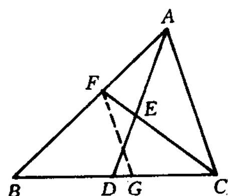


图 6・140

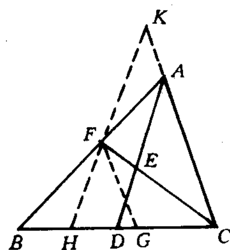


图 6・141

本题的分析如从 BD、CD 这一组相等线段重叠在一直线上出发，则平行方向线段可取过端点 B 的 BA，那末平行线可过另一端点 C 作，也就是过 C 作 $CG /\!/ AB$ 交 AD 的延长线于 G，可得$\triangle ABD$ 和$\triangle GCD$ 是一对中心对称型全等三角形

形，$AB=GC$，$AD=GD$. 而由 $AF/\!/CG$，又可得$\triangle AFE\backsim\triangle GCE$，$\frac{AF}{GC}=\frac{AE}{GE}$，$\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{GE}$. 所以$\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{GE-AE}=\frac{AE}{2DE}$，分析完成.

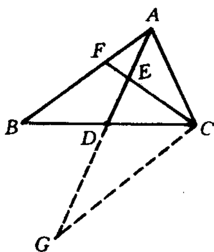


图 6・142

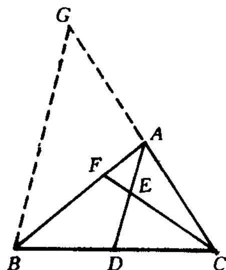


图 6・143

若取过中点 D 的线段 DA 为平行方向线段，则平行线可过端点 B 作，也就是过 B 作 $BG/\!/DA$ 交 CA 的延长线于 G，就可得 $CA=GA$. 而在作出 $BG/\!/DA$ 后，AE 和 DE 这一组相比线段就重叠在平行线段上，所以可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明，于是延长 CF 交 BG 于 H，可得$\frac{AE}{DE}=\frac{GH}{BH}$. 而 GH、BH 这一组相比线段仍然重叠在一直线上，所以仍然可添加平行线型相似三角形进行证明，于是过 G 作 $GK/\!/HK$ 交 BA 的延长线于 K，就可得$\frac{GH}{BH}=\frac{KF}{BF}$，从而问题成为要证 $KF=2AF$. 而由 $GK/\!/FC$ 和 $GA=CA$，可得$\triangle GKA$ 和$\triangle CFA$ 是一对中心对称型全等三角形，$KA=FA$，所以上述性质可以证明.

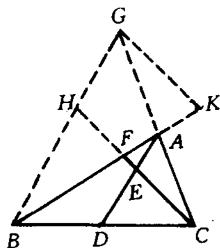


图 6・111

在取 DA 为平行方向线段时，平行线也可以过另一端点 C 作，也就是过 C 作 $CG/\!/DA$ 交 BA 的延长线于 G，就可得 $AB=AG$，$AD=\frac{1}{2}CG$. 而由 $AE/\!/GC$，又可得$\frac{AF}{AG}=\frac{AE}{CG-AE}$，$\frac{AF}{AB}=$

$\frac{AE}{2AD-AE}$，$\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{2AD-2AE}=\frac{AE}{2DE}$，从而可完成分析.

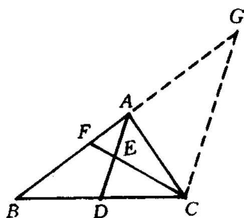


图 6·145

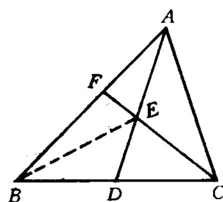


图 6·146

由于本题出现了三组相比线段重叠在一直线上，所以也可以用面积的方法来进行证明. 由 E、C 是过内分点 F 的直线上的两点，所以连接 BE 后，有 $AF:BF=S_{\triangle ACE}:S_{\triangle BCE}=S_1:S_2$（可令 $S_{\triangle ACE}=S_1$，$S_{\triangle BCE}=S_2$）. 而 $AE:DE=S_{\triangle ACE}:S_{\triangle DCE}=S_1:S_3$（令 $S_{\triangle DCE}=S_3$），又因 $BD=CD$，$S_2=2S_3$，从而就可得 $\frac{AE}{DE}=\frac{S_1}{S_3}=\frac{S_1}{\frac{1}{2}S_2}$

$=\frac{2S_1}{S_2}=\frac{2AF}{BF}$.

例 14 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$.

求证：$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{BC}$.

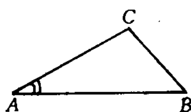


图 6·147

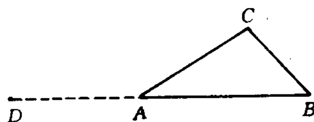


图 6·148

分析：本题的结论中出现了线段倒数和的关系，实质上也就是线段之间的比例关系，它可以变形为 $BC=\frac{AB\cdot AC}{AB+AC}$. 在这个关系

式中出现了线段 $AB+AC$，所以可根据线段和的定义，将这两条线段接起来，也就是延长 BA 到 D，使 $AD=AC$，则 BD 就等于 $AB+AC$. 另一方面条件中给出了 $\angle B=2\angle A$，是两个角之间的倍半关系，所以可根据角的倍半关系的定义，作出 $\angle BAC$ 的 2 倍，也就

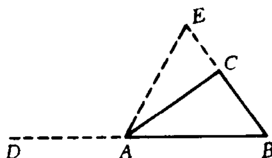


图 6・149

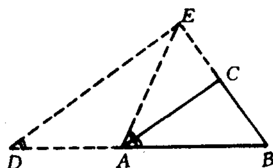


图 6・150

是以 AC 为边、A 为顶点，在 $\triangle ABC$ 的外面作 $\angle CAE=\angle BAC$ 交 BC 的延长线于 E，那末 $\angle BAE=2\angle BAC=\angle B$，$EA=EB$. 又因为 $\angle BCA=4\angle BAC$，$\angle ECA=\angle B+\angle BAC=3\angle BAC$. 且 $\angle BCA=\angle BEA+\angle CAE$，$\angle BEA=\angle BCA-\angle CAE=4\angle BAC-\angle BAC=3\angle BAC$，所以 $\angle ECA=\angle CEA$，$AE=AC$，从而又可得 $AC=EB$，$AE=AD$. 这样要证明的结论 $\frac{BC}{AC}=\frac{AB}{DB}$，就可转化为要证 $\frac{BC}{BE}=\frac{BA}{BD}$. 经过描图可以发现这两组相比线段都重叠在一直线上，且有一公共的端点 B，所以可添加平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是连结 DE 后，应证 $DE\parallel AC$. 而由 $AE=AD$，D、A、B 成一直线，可得 $\angle BAE=2\angle D$，而 $\angle BAE=2\angle BAC$，所以 $\angle D=\angle BAC$，$DE\parallel AC$，分析就可以完成.

本题在根据线段和的定义进行分析时，也可以将 AC 接到 AB 的延长线上，也就是延长 AB 到 D 使 $BD=AC$，那么就有 $AD=AB+AC$，要证的结论就成为 $\frac{BC}{AC}=\frac{AB}{AD}$. 经过描图就可以发现 AB、AD 这一组相比线段重叠在一直线上，从而可添加平行线型相似三角形进行证明. 若取结论中出现的过内分点 B 的线段 BC

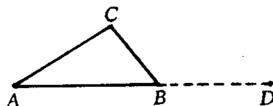


图 6・151

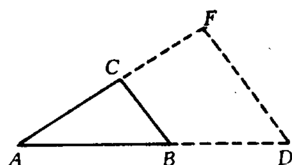


图 6・152

为平行方向线段，则平行线可过端点 D 作，也就是过 D 作 $DF /\!/ BC$ 交 AC 的延长线于 F，就有 $\triangle ABC \backsim \triangle ADF$，$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DF}$，这样问题就成为要证 $DF=AC$.

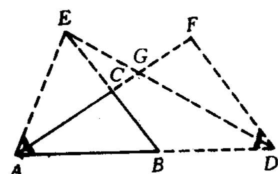


图 6・153

然后再根据角的倍半关系的定义，作 $\angle CAE=\angle BAC$ 交 BC 的延长线于 E 后，可得 $EA=EB=AC$，所以有 $EB=DB$，而这是两条具有公共端点 B 的相等线段，它们可组成等腰三角形，于是连接 DE 交 AF 于 G，并根据 A、B、D 成一直线，可得 $\angle BDE=\frac{1}{2}\angle ABC=\angle BAG$，所以 $GA=GD$. 进一步还可得 $\angle GAE=\angle GDF$，$\triangle GAE$ 和 $\triangle GDF$ 是一对轴对称型全等三角形，$DF=AE=AC$，分析完成.

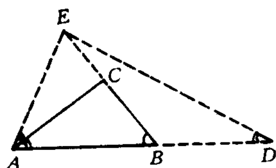


图 6・154

本题在延长 AB 到 D 使 $BD=AC$，并将问题转化为证 $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{AC}$ 后，也可直接根据角的倍半关系的定义作出 $\angle CAE=\angle BAC$ 交 BC 的延长线于 E，就可得 $EA=EB=AC=BD$，于是连结 ED，可得 $\angle BED=\angle D=\frac{1}{2}\angle ABC=\angle BAC$，于是在 $\triangle ABC$ 和

$\triangle DAE$ 中，有$\angle BAC=\angle ADE$，$\angle ABC=\angle DAE=2\angle BAC$，所以$\triangle ABC\backsim\triangle DAE$，也就有$\dfrac{AB}{DA}=\dfrac{BC}{AE}=\dfrac{BC}{AC}$，分析完成.

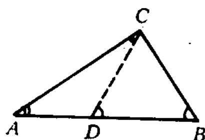


图 6・155

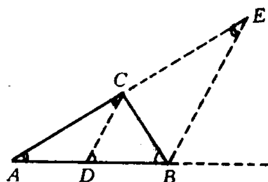


图 6・156

本题的条件中给出$\angle BCA=4\angle A$，所以也可根据角的和差关系或倍半关系的定义，作$\angle ACD=\angle BAC$交 AB 于 D，那末就有 $DC=DA$，$\angle BDC=2\angle BAC=\angle ABC$，$CD=CB$，所以 $AD=BC$. 这样问题就成为要证$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AC}{AB+AC}$. 现在 AD、AB 这一组相比线段又重叠在一直线上，所以又可添加平行线型相似三角形进行证明，现在可取过内分点 D 的线段 DC 为平行方向线段，则平行线可过端点 B 作，也就是过 B 作 $BE/\!/DC$ 交 AC 的延长线于 E，就可得$\triangle ACD\backsim\triangle AEB$，$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AC}{AE}$，从而应证 $AE=AB+AC$，$CE=AB$. 但由 $BE/\!/DC$，可得 $BE=BA$，所以又应证 $CE=BE$，$\angle ECB=\angle EBC$. 由 E、C、A 成一直线，可得$\angle ECB=\angle BAC+\angle ABC=3\angle BAC$，$\angle EBC=180°-\angle E-\angle A-\angle ABC=180°-4\angle BAC=3\angle BAC$，分析完成.

在上述分析中，在取 DC 为平行方向线段后，平行线也可以过另一个端点 A 作，也就是过 A 作 $AE/\!/DC$ 交 BC 的延长线于 E，由于图形中没有出现 $AB+AC$ 这条线段，所以可应用比例性质，将结论$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AC}{AB+AC}$变形为

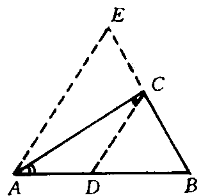


图 6・157

$\frac{AD}{AB-AD}=\frac{AC}{AB}$，也就是$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{AB}$. 由于 $AD=DC$，在作出 $AE /\!/ DC$，$\angle CAE=\angle ACD=\angle BAC$ 后，可证明 $AE=AC$，那末由 $\triangle BDC \backsim \triangle BAE$，$\frac{DC}{AE}=\frac{BD}{BA}$，完成分析.

本题的分析在作出$\angle ACD=\angle BAC$ 交 AB 于 D 后，可得 DA

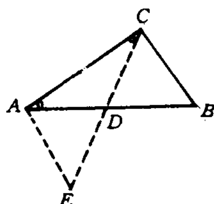


图 6・158

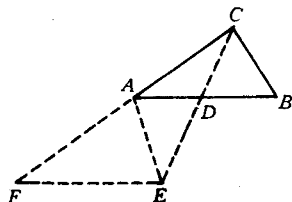


图 6・159

$=DC=BC$，这时这两个相等的角和 DA、DC 这两条相等的线段都位于等腰$\triangle DAC$ 的轴对称部分，所以可添加轴对称型全等三角形进行证明. 也就是延长 CD 到 E，使 $CE=AB$，就可得$\triangle CAB \cong \triangle ACE$，$\angle CBA=\angle AEC=2\angle BAC$，$\angle ACB=\angle CAE=4\angle BAC$. 问题也就成为要证$\frac{CD}{CE}=\frac{AC}{AB+AC}$，这时又出现 CD、CE 这一组相比线段重叠在一直线上，从而又可添加平行线型相似三角形进行证明，现在可取过内分点 D 的 DA 为平行方向线段，所以过 E 作 $EF /\!/ DA$ 交 CA 的延长线于 F，就可得$\triangle CAD \backsim \triangle CFE$，$\frac{CD}{CE}=\frac{CA}{CF}$，从而就应证 $CF=AB+AC$，$AF=AB=CE$，但由 $EF /\!/ DA$ 和 $DA=DC$，可得 $EF=EC$，所以问题应证 $AF=EF$，而由 $EF /\!/ BA$，可得$\angle FEA=\angle EAB=3\angle BAC$，而$\angle FAE=180^\circ-\angle CAE=180^\circ-4\angle BAC=3\angle BAC$，分析完成.

在上述分析中，当我们取 DA 为平行方向线段后，平行线也可以过端点 C 作，也就是过 C 作 $CF /\!/ DA$ 交 EA 的延长线于 F. 可

得$\triangle EDA \backsim \triangle ECF$. $\frac{CD}{CE}=\frac{FA}{FE}$. 问题就成为要证$\frac{FA}{FE}=\frac{AC}{AB+AC}$，由于图形中未出现 $AB+AC$ 这条线段，所以可转化为证$\frac{FA}{FE-FA}=\frac{AC}{AB}$. $\frac{FA}{AE}=\frac{AC}{AB}$，由于$\angle BAE=3\angle BAC$，$\angle CAF=180°-\angle BAC-\angle BAE=3\angle BAC$，所以$\angle CAF=\angle BAE$，也就是这四条成比例线段成对应的两两的夹角相等，所以它们两两构成相似三角形，于是连结 BE，应证$\triangle CAF \backsim \triangle BAE$. 由于$\angle CAF=\angle BAE=3\angle BAC$，$\angle CFA=\angle BAE$ 以及由 $DE=DB$，$\angle ADC=\angle EDB$ 推得的$\angle DBE=\angle BAC$，$\angle BEA=3\angle BAC$，$\angle CFA=\angle BEA$，就可以完成分析.

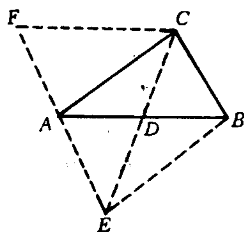


图 6・160

在上述分析中，在将问题转化到要证$\frac{FA}{AE}=\frac{AC}{AB}$后，由于$\angle CAF=\angle CFA=3\angle BAC$. 所以 FA 和 AC 就成为顶角为$\angle BAC$ 的等腰三角形的底和腰，这样 AE 和 AB 也就应成为顶角为$\angle BAC$ 的等腰三角形的底和腰，所以在 AC 的延长线上取一点 G，使 $AG=AB$，并连结 BG，即可得$\triangle CFA \backsim \triangle AGB$，$\frac{FA}{BG}=\frac{CA}{AB}$. 这样问题就成为要证 $AE=BG=BC$，$\angle BGC=\angle BCG$，由于这两个角也都可以证明是$3\angle BAC$，分析完成.

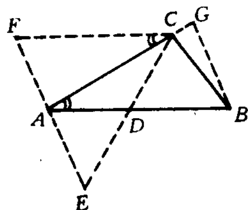


图 6・161

本题在作出$\angle ACD=\angle BAC$ 交 AB 于 D，并延长 CD 到 E 使 $CE=AB$ 后，就可证明 $DC=DA$，$DE=DB$，而它们的夹角$\angle ADC$ 和$\angle BDE$ 是对顶角当然相等，所以又可应用平行线型相似三角形进行证明，于是连结 EB，可得$\triangle ADC \backsim \triangle BDE$，$\frac{CD}{ED}=\frac{AC}{BE}$. 这样问

题就成为要证 $BE=BA$，由于我们可以证明 $\angle BAE=\angle BEA=3\angle BAC$，完成分析.

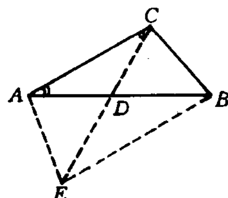


图 6・162

本题在作出 $\angle ACD=\angle BAC$ 交 AB 于 D，并得到 $DA=DC=BC$ 后，问题就成为要证 $\frac{BC}{AB}=\frac{AC}{AB+AC}$，$\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AB}$. 另一方面由条件可得 $\angle ACB=2\angle ABC=4\angle BAC$，这是两个角之间的倍半关系，所以可根据角的倍半关系的定义，作 $\angle ABC$ 的两倍，也就是作 $\angle CBE=\angle ABC$ 交 AC 的延长线于 E 后，就可得 $\angle ABE=\angle ACB$，而这两个角相等一出现，就出现了 BC 是 $\triangle ABE$ 内过顶点 B 的 BE 的逆平行线，从而可应用逆平行线型相似三角形进行证明，也就可得 $\triangle ABC\backsim\triangle AEB$，$\frac{BC}{EB}=\frac{AC}{AB}$. 这样问题就成为应证 $BD=BE$. 而在作出 $\angle EBC=\angle DBC=2\angle BAC$ 后，又可证明 $\angle BCE=\angle BCD=3\angle BAC$，且 $BC=BC$，所以 $\triangle BCE$ 和 $\triangle BCD$ 是一对轴对称型全等三角形，分析完成.

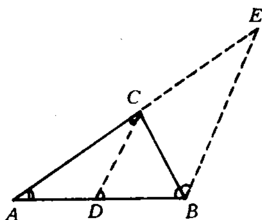


图 6・163

在上述分析中，在根据角的倍半关系的定义进行分析时，另一种可能性是将倍角两等分，也就是作 $\angle ACB$ 的角平分线交 AB 于 E，再作 $\angle ACE$ 的平分线交 AE 于 D，那就可得 $\angle BCE=\angle ABC=\angle BDC=2\angle BAC$，$\triangle EBC$ 和 $\triangle CBD$ 是一对逆平行线型相似三角形，$\frac{CE}{BC}=\frac{BC}{BD}$，那末问题就成为要证 $\frac{CE}{BC}=\frac{AC}{AB}$，而 $BC=CD$，又因为 $\angle ECD=\angle CAB$，$\angle EDC=\angle CBA$，所以 $\triangle ECD\backsim\triangle CAB$，这样分析完成.

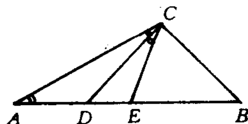


图 6・164

本题的分析也可以直接从 $\angle ACB$ 和 $\angle ABC$ 的倍半关系出

发，那末作$\angle ACB$的角平分线交AB于D，就可得$\angle ACD=\angle BCD=\angle ABC=2\angle BAC$. 而现在的问题是要证$\frac{BC}{AC}=\frac{AB}{AB+AC}$，也就是要证$\frac{BC}{AC-BC}=\frac{AB}{AC}$. 于是根据线段的差的定义在$AC$上截取$CE=CB$，则就有$AE=AC-BC$，问题就要证$\frac{BC}{AE}=\frac{AB}{AC}$. 由于在作出$\angle ACD=\angle ABC$后，就可得$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，是一对逆平行线型相似三角形，所以$\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BC}$. 而由$CE=CB$，$\angle ECD=\angle BCD$，$CD=CD$，又可得$\triangle ECD$和$\triangle BCD$是一对轴对称型全等三角形，$\angle DEC=\angle DBC=2\angle BAC=\angle DCE$，$CD=ED$，并可进一步推得$\angle EDA=\angle BAC$，$ED=AE$，所以$\frac{BC}{AE}=\frac{AB}{AC}$就可以证明.

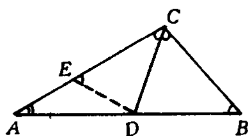


图 6・165

本题的分析也可以直接从$\angle ABC$和$\angle BAC$的倍半关系出发，那么作$\angle ABC$的角平分线交AC于E，就有$\angle EBA=\angle BAC$，$EA=EB$. 且应用角平分线的性质可得$\frac{CE}{BC}=\frac{AE}{AB}$，而由$\angle BAC=\angle EBC$，可得$\triangle ABC\backsim\triangle BEC$是一对逆平行线型相似三角形，$\frac{EC}{BC}=\frac{BE}{AB}=\frac{BC}{AC}$. 那么要证的结论$\frac{BC}{AC}=\frac{AB}{AB+AC}$就转化为要证$\frac{BE}{AB}=\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AB+AC}$，$\frac{AE}{AB-AE}=\frac{AB}{AC}$. 于是在$AB$上截取$AD=AE$，就应证$\frac{AE}{BD}=\frac{BE}{BD}=\frac{AB}{AC}$，而由$\angle AED=\angle ADE=3\angle BAC$，可得$\angle BDE=4\angle BAC=\angle ACB$，且$\angle EBD=\angle BAC$，所以$\triangle BED\backsim\triangle ABC$，从而就可证明上述性质.

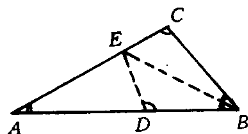


图 6・166

本题在应用角的倍半关系的定义进行分析时，也可以从$\angle ACB=4\angle BAC$出发，而作$\angle BAD=4\angle BAC$交BC的延长线

于 D,则由$\angle BAD=\angle BCA$可得$\triangle BAC$和$\triangle BDA$是一对逆平行线型相似三角形,就可得$\frac{BC}{BA}=\frac{BA}{BD}$. 这样要证$\frac{BC}{AB}=\frac{AC}{AB+AC}$,就可以转化为证$\frac{BA}{BD}=\frac{AC}{AB+AC}$,$\frac{BA}{BD-BA}=\frac{AC}{AB}$. 另一方面,由$\angle DAC=3\angle BAC=3\angle ADC$,也可根据角的和的定义,作$\angle DAE=\angle ADC$交 DB 于 E,则 $ED=EA$. 而由

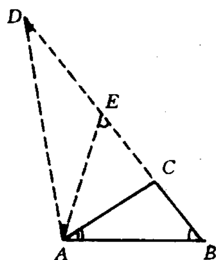


图 6・167

D、E、B 成一直线,又可得$\angle AEB=2\angle ADC=2\angle BAC=\angle ABE$,所以 $AB=AE$,$BE=BD-BA$,这样问题就成为要证$\frac{BA}{BE}=\frac{AC}{AB}$. 那么再由$\angle CAE=2\angle BAC=\angle ABE$,可得$\triangle EAC$和$\triangle EBA$是一对逆平行线型的相似的等腰三角形,$\frac{BA}{BE}=\frac{AC}{AE}$,所以分析可以完成.

在上述分析中,在得到$\triangle BAC\backsim\triangle BDA$后,也可得$\frac{BC}{AC}=\frac{BA}{DA}$,那末要证$\frac{BC}{AC}=\frac{AB}{AB+AC}$,就成为要证 $DA=AB+AC$. 而由$\angle DAC=\angle DCA=3\angle BAC$,可得 $DC=DA$,从而再根据线段和的定义在 CD 上截取 $CE=CA$,可得$\triangle CAE$是等腰三角形,于是应先连结 AE,得$\angle CEA=\angle CAE=\frac{1}{2}(180^\circ-3\angle BAC)=2\angle BAC$. 从而就可证明 $ED=EA=AB$,从而完成分析.

例 15 已知:$\triangle ABC$中,AD 是中线,$MN\parallel AC$ 交 AB、BC、AD 于 M、N、O,且$\frac{MO}{NO}=3$. 求证:$\frac{DO}{AO}=\frac{1}{6}$.

分析:本题的条件中给出$\frac{MO}{NO}=3$,就出现了相比两线段重叠,所以可添加平行线型相似三角形进行证明.

如取过端点 N 的线段 ND 为平行方向线段,则平行线可过另

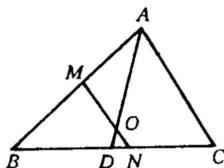


图 6・168

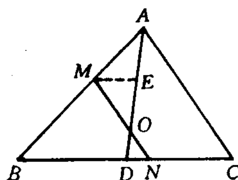


图 6・169

一个端点 M 作，于是过 M 作 $ME /\!/ BN$ 交 AD 于 E，就可得$\triangle MEO \backsim \triangle NDO$，$\frac{ME}{ND}=\frac{MO}{NO}=3$. 又因为条件给出 $BD=CD$，因此在作出了 $ME /\!/ BC$ 后，就出现了相等的两线段重叠在一组平行线段上，从而可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明，于是

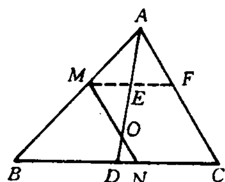


图 6・170

延长 ME 交 AC 于 F，就可得$\frac{ME}{BD}=\frac{FE}{CD}$，$ME=FE$，$\frac{MF}{ND}=6$. 又因为 $MN /\!/ FC$，可得四边形 $MNCF$ 是平行四边形 $MF=NC$，$NC=6ND$，那末再由 $ON /\!/ AC$，就可推得$\frac{DO}{AO}=\frac{DN}{CN}=\frac{1}{6}$.

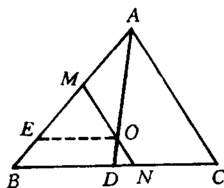


图 6・171

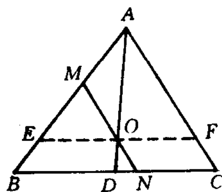


图 6・172

在取 NB 为平行方向线段时，平行线也可以过内分点 O 作，则过 O 作 $OE /\!/ NB$ 交 AB 于 E，就可得$\triangle MEO \backsim \triangle MBN$，$\frac{EO}{BN}=$

$\frac{MO}{MN}=\frac{3}{4}$. 又因为 $BD=CD$，$EO/\!/BN$，所以可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明，于是延长 EO 交 AC 于 F，就可得 $\frac{EO}{BD}=\frac{FO}{CD}$，$FO=EO=\frac{3}{4}BN$. 又因为四边形 $ONCF$ 是平行四边形，所以 $NC=OF=\frac{3}{4}BN=\frac{3}{7}BC$. 而 $CD=\frac{1}{2}BC$，所以 $\frac{DN}{CN}=\frac{1}{6}$，分析完成.

如取过内分点 O 的线段 OD 为平行方向线段，则平行线可过端点 M 作，即过 M 作 $ME/\!/AD$ 交 BC 于 E，就可得 $\triangle NOD\backsim\triangle NME$，$\frac{OD}{ME}=\frac{ON}{MN}=\frac{1}{4}$. 同时又可得 $\triangle BME\backsim\triangle BAD$，$\frac{DE}{BD}=\frac{AD-ME}{AD}=\frac{AD-4OD}{AD}=1-4\frac{OD}{AD}$. 另一方面，由 $BD=CD$，可得 $\frac{DE}{BD}=\frac{DE}{CD}$，这一组相比线段仍然重叠在一直线上，所以仍可添加平行线型相似三角形进行证明，由于已有 $EM/\!/DA$，所以延长 EM 交 CA 的延长线于 F，可得 $\frac{ED}{CD}=\frac{FA}{AC}$. 而由 $MN/\!/AC$，又可得 $\triangle BMN\backsim\triangle BAC$，$\frac{MN}{AC}=\frac{BN}{BC}$，代入上式后就可得 $\frac{ED}{CD}=\frac{FA}{MN}\cdot\frac{BN}{BC}$，而由四边形 $MOAF$ 是平行四边形，可得 $AF=MO=\frac{3}{4}MN$，所以 $\frac{ED}{CD}=\frac{3}{4}\cdot\frac{BD+DN}{2CD}=\frac{3}{8}\left(1+\frac{DN}{CD}\right)=\frac{3}{8}\left(1+\frac{OD}{AD}\right)$，从而有 $\frac{3}{8}\left(1+\frac{OD}{AD}\right)=1-4\frac{OD}{AD}$，就可推得 $\frac{OD}{AD}=\frac{1}{7}$，分析完成.

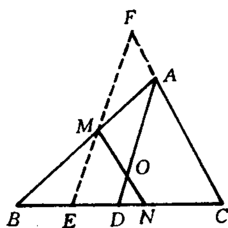


图 6・173

在取 OA 为平行方向线段时，平行线也可过另一个端点 N 作，也就是过 N 作 $NF/\!/OA$ 交 AC 于 E，交 BA 的延长线于 F，就可得 $\triangle MAO\backsim\triangle MFN$. $\frac{AO}{FN}=\frac{MO}{MN}=\frac{3}{4}$. 而由 $NO/\!/CA$，又可得

$\frac{DN}{DC}=\frac{DO}{DA}$. 由 $DA \mathbin{/\mkern-5mu/} NF$，可得 $\frac{DN}{BD}=\frac{NF-DA}{DA}$，于是在 NF 上截取 $NG=DA$，可得 $\frac{DN}{BD}=\frac{FG}{DA}$，而 $BD=CD$，所以 $DO=FG$. 由此就可得 $AO=AD-OD=\frac{3}{4}FN=\frac{3}{4}(NG+FG)=\frac{3}{4}(AD+OD)$，就可推得 $AD=7OD$，分析完成.

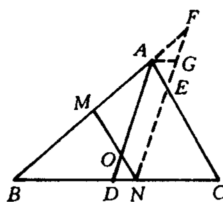


图 6・174

如取过端点 M 的线段 MB 为平行方向线段，则平行线可过内分点 O 作，也就是过 O 作 $OE \mathbin{/\mkern-5mu/} AB$ 交 BC 于 E，则可得 $\triangle NOE \backsim \triangle NMB$，$\frac{NE}{NB}=\frac{NO}{NM}=\frac{1}{4}$. 而由 $NO \mathbin{/\mkern-5mu/} CA$，可得 $\frac{DN}{DC}=\frac{DO}{DA}$，再由 $OE \mathbin{/\mkern-5mu/} AB$，又可得 $\frac{DE}{DB}=\frac{DO}{DA}$，所以 $\frac{DN}{DC}=\frac{DE}{DB}$，由于 $DB=DC$，就可得 $DN=DE=\frac{1}{2}EN$，$\frac{DN}{CN}=\frac{1}{6}$，就可证得 $\frac{DO}{AO}=\frac{1}{6}$.

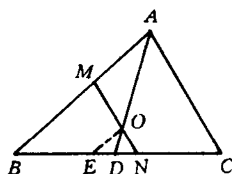


图 6・175

在取 MA 为平行方向线段时，平行线也可过另一个端点 N 作，也就是过 N 作 $NE \mathbin{/\mkern-5mu/} AB$ 交 AD 的延长线于 E，就可得 $\triangle ONE \backsim \triangle OMA$，$\frac{EN}{AM}=\frac{ON}{OM}=\frac{OE}{OA}=\frac{1}{3}$. 而由 $EN \mathbin{/\mkern-5mu/} BA$，又可得 $\triangle EDN \backsim \triangle ADB$，$\frac{DN}{DB}=\frac{DE}{DA}$. 由 $ON \mathbin{/\mkern-5mu/} AC$，又可得 $\triangle DON \backsim \triangle DAC$，$\frac{DN}{DC}=\frac{DO}{DA}$，而 $DB=DC$，所以 DE

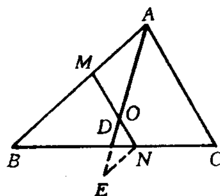


图 6・176

$=DO=\frac{1}{2}OE$，也就可得$\frac{OD}{OA}=\frac{1}{6}$.

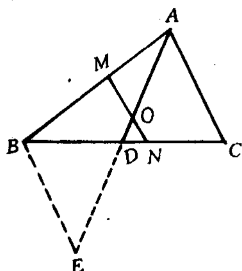


图 6・177

如果从 BD 和 CD 这一组相比（等）线段重叠在一直线上出发进行分析. 若取 AC 为平行方向线段，则平行线段可过端点 B 作，也就是过 B 作 $BE\parallel AC$ 交 AD 的延长线于 E，就可得$\triangle BDE$ 和$\triangle CDA$ 是一对中心对称型全等三角形，$BE=AC$. 那末由 $NO\parallel CA$，可得$\triangle DON\backsim\triangle DAC$，$\frac{DO}{DA}=\frac{ON}{AC}$，由 $MN\parallel BE$，可得$\triangle AMO\backsim\triangle ABE$，$\frac{MO}{BE}=\frac{AO}{AE}$，而 $AD=ED$，从而有$\frac{AO}{2AD}=\frac{3ON}{BE}=\frac{3DO}{AD}$，就可以证明结论.

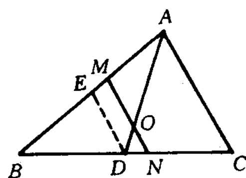


图 6・178

在取 CA 为平行方向线段时，平行线也可过内分点 D 作，于是过 D 作 $DE\parallel CA$ 交 AB 于 E，就可得 $BE=AE$，$DE=\frac{1}{2}AC$，于是由 $MO\parallel ED$，可得$\frac{MO}{ED}=\frac{AO}{AD}$，由 $ON\parallel AC$，可得$\frac{ON}{AC}=\frac{DO}{DA}$，而已知 $MO=3ON$，所以有$\frac{AO}{AD}=\frac{MO}{ED}=\frac{3ON}{\frac{1}{2}AC}=\frac{6ON}{AC}=\frac{6DO}{DA}$，也就可证明结论.

如取过中点 D 的 DA 为平行方向线段，则平行线可过端点 B 作，也就是过 B 作 $BE\parallel DA$ 交 CA 的延长线于 E，就可得 $EA=CA$. 现在由于这两条相等线段重叠在一直线上，且过端点和内分点的三直线共点于 B，所以可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明，从而可延长 NM 交 BE 于 F，就可得$\frac{NM}{CA}=\frac{FM}{EA}$，$FM$

$=NM$. 由条件 $OM=3ON$，所以 $\frac{OM}{FM}=\frac{OM}{NM}=\frac{3}{4}$. 而由 $AO // FB$，又可得 $\triangle AOM \backsim \triangle BFM$，$\frac{AM}{BM}=\frac{OM}{FM}=\frac{3}{4}$，$\frac{CN}{BN}=\frac{AM}{BM}=\frac{3}{4}$，而 D 是 BC 的中点，所以 $\frac{DN}{CN}=\frac{1}{6}$，就可以证明结论.

图 6・179

在取 DA 为平行方向线段后，平行线也可以过端点 C 作，也就是过 C 作 $CE // DA$ 交 BA 的延长线于 E，就可得 $BA=AE$，$CE=2AD$. 再由 $MO // AC$，可得 $\triangle AMO \backsim \triangle EAC$，$\frac{AO}{EC}=\frac{MO}{AC}$，而由 $ON // AC$，也可得 $\triangle DON \backsim \triangle DAC$，$\frac{OD}{AD}=\frac{ON}{AC}$，而 $MO=3NO$，所以 $\frac{AO}{CE}=\frac{3NO}{AC}=\frac{3OD}{AD}$，$\frac{AO}{2AD}=\frac{3OD}{AD}$，就可以证明 $AO=6OD$.

图 6・180

如取过端点 B 的线段 BA 为平行方向线段，则平行线可过内分点 D 作，也就是过 D 作 $DF // BA$ 交 MN、AC 于 E、F，就可得 $AF=CF$. 又因为过 A、C 和 F 的三线共点于 D，所以可应用平行线型相似三角形的组合图形进行证明，于是可得 $\frac{OE}{AF}=\frac{NE}{CF}$，$OE=NE=\frac{1}{2}ON$. 那么再由 $DE // MA$，$\triangle ODE \backsim \triangle OAM$，$\frac{OD}{OA}=\frac{OE}{OM}=\frac{OE}{3ON}=\frac{OE}{6OE}$，就可以证明结论.

图 6・181

在取 BA 为平行方向线段后，平行线也可以过另一个端点 C

作，也就是过 C 作 $CE /\!/ AB$ 交 AD 的延长线于 E，就可得$\triangle ABD$ 和$\triangle ECD$ 是一对中心对称型全等三角形，所以 $ED=AD$. 而由 $ON /\!/ AC$，可得 $\triangle DON \backsim \triangle DAC$，$\frac{DO}{DA}=\frac{ON}{AC}$，而由 $AM /\!/ CE$，$MO /\!/ AC$ 又可得$\triangle AMO \backsim \triangle ECA$，$\frac{AO}{EA}=\frac{MO}{CA}$，$\frac{AO}{2DA}=\frac{3ON}{AC}$，也就可以证明结论.

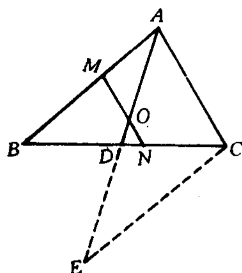


图 6・182

例 16　已知：以$\triangle ABC$ 的一边 BC 为直径作$\odot O$，AD 是$\odot O$ 的切线，E 是 AB 上的一点，且 $AE=AD$，过 E 作 AB 的垂线交 AC 的延长线于 F. 求证：$\frac{AB}{AE}=\frac{AF}{AC}$.

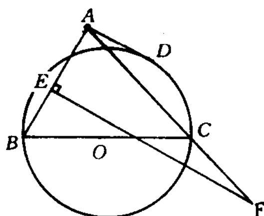


图 6・183

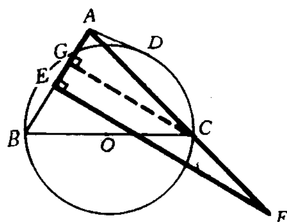


图 6・184

分析：本题条件中出现 BC 是$\odot O$ 的直径，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明. 如设 AB 与$\odot O$ 的交点为 G，则图形中出现了直径和半圆上的点 G，但没有圆周角，所以应将圆周角添上，也就是连结 CG，可得$\angle CGB=90°$. 而已知 $EF\perp AB$，所以 $GC /\!/ EF$，GC 就成为$\triangle AEF$ 内的边 EF 的平行线段，所以可应用平行线型相似三角形进行证明，也就可得$\triangle AGC \backsim \triangle AEF$，$\frac{AC}{AF}=\frac{AG}{AE}$，这样问题就成为要证$\frac{AB}{AE}=\frac{AE}{AG}$，$AB\cdot AG=$

AE^2，但 $AE=AD$，也就是要 $AD^2=AB\cdot AG$，而 AD 是⊙O 的切线，AGB 是割线，应用切割线定理就可完成证明.

例 17 已知：PA 与⊙O 相切于 A，割线 PBC 交⊙O 于 B、C，D 是 AB 的中点，PD 的延长线交 AC 于 E. 求证：$\frac{PA^2}{PC^2}=\frac{AE}{CE}$.

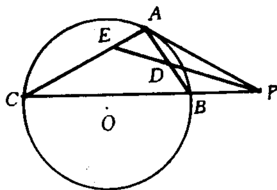


图 6・185

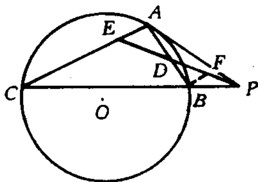


图 6・186

分析：本题的条件中出现了 PA 是⊙O 的切线，而 PBC 是圆的割线，所以可应用切割线定理得 $PA^2=PB\cdot PC$，$\frac{PA^2}{PC^2}=\frac{PB\cdot PC}{PC^2}=\frac{PB}{PC}$. 这样问题就转化为应证$\frac{PB}{PC}=\frac{AE}{CE}$. 这是一个新的比例关系，经过描图可以发现 PB 和 PC 这一组相比线段重叠在一直线上，所以可添加平行线型相似三角形进行证明. 若取过端点 C 的线段 CE 为平行方向线段，则平行线可过内分点 B 作，也就是过 B 作 $BF/\!/CE$ 交 PE 于 F，即可得△PBF∽△PCE，$\frac{PB}{PC}=\frac{BF}{CE}$. 这样问题就成为要证 $AE=BF$. 由条件 $AD=BD$，$\angle ADE=\angle BDF$ 是一组对顶角，且 $AE/\!/FB$，所以△ADE 和△BDF 是一对中心对称型全等三角形，那就可以完成分析.

如取过内分点 B 的线段 BD 为平行方向线段，则平行线可过端点 C 作，也就是过 C 作 $CF/\!/BA$ 交 PE 的延长线于 F，就可得△PBD∽△PCF，$\frac{PB}{PC}=\frac{BD}{CF}$. 那末问题就成为要证$\frac{BD}{CF}=\frac{AE}{CE}$. 这是一个新的比例关系，经过描图可以发现 AE、CE 这一组相比线段

也重叠在一直线上，所以仍可以应用平行线型相似三角形进行证明．于是由 $AD \parallel FC$，可得$\triangle ADE \backsim \triangle CFE$，$\frac{AE}{CE}=\frac{AD}{CF}$，而 $AD=BD$ 是给出的条件，所以$\frac{BD}{CF}=\frac{AE}{CE}$就可以证明．

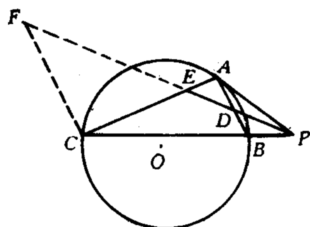


图 6・187

例 18　已知：PA 与$\odot O$ 相切于 A，割线 PBC 过 O 且与$\odot O$ 相交于 B、C，$AD \perp BC$．求证：$\frac{PO}{PC}=\frac{OB}{CD}$．

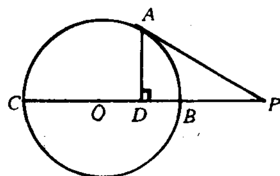


图 6・188

分析：本题要证明的结论是线段之间的比例关系，经过描图可以发现，PO 和 PC 这一组相比线段重叠在一直线上，从而可添加平行线型相似三角形进行证明．添加的方法是过端点和内分点作平行线．由于图形中过端点 C 和内分点 O 还没有线段，所以要先作出线段后才能取作为平行方向线段．因为 PA 与$\odot O$ 相切于 A，所以可应用切线的

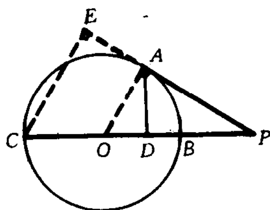


图 6・189

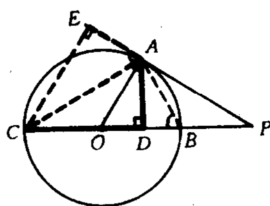


图 6・190

性质，连结 OA 后得 $OA \perp PA$．从而可取 OA 为平行方向线段，那末平行线就可过端点 C 作，即过 C 作 $CE \parallel OA$ 交 PA 的延长线于 E，就可得$\triangle PAO \backsim \triangle PEC$，$\frac{PO}{PC}=\frac{OA}{CE}$．而 $OA=OB$，所以问题转化

为应证 $CE=CD$. 由条件 $CD\perp DA$，且 $CE\perp AE$，所以 CE 和 CD 就成为 C 到 $\angle EAD$ 两边的距离，也就是 CE 和 CD 这两条线段是关于 $\angle EAD$ 的平分线成轴对称的，从而可通过添加轴对称型的全等三角形进行证明. 于是应先将对称轴添上，即连结 AC，问题就成为应证 $\triangle CAE\cong\triangle CAD$. 由 $CA=CA$ 和 $\angle CEA=\angle CDA=90°$，所以还应证明 $\angle EAC=\angle DAC$. 由于 BC 是 $\odot O$ 的直径，$\angle BAC=90°$，所以 AD 就成为直角 $\triangle ABC$ 的斜边上的高，$\angle DAC=\angle ABC$. 又因为 $\angle EAC$ 是弦切角，$\angle EAC=\angle ABC$，所以 $\angle EAC=\angle DAC$ 就能得到证明.

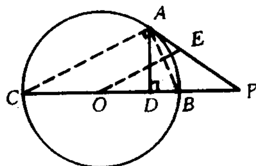


图 6・191

本题由于条件中出现了 BC 是 $\odot O$ 的直径，所以应用半圆上的圆周角的基本图形的性质，连结 AC、BC 后可得 $\angle BAC=90°$，现在就可取过端点 C 的线段 CA 为平行方向线段，平行线就可以

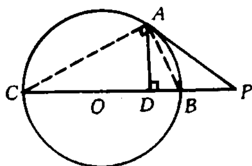


图 6・192

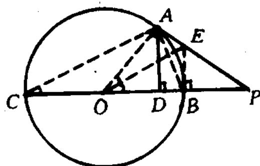


图 6・193

过内分点 O 作，于是过 O 作 $OE\parallel CA$ 交 PA 于 E，就可得 $\triangle PEO\backsim\triangle PAC$，$\dfrac{PO}{PC}=\dfrac{PE}{PA}$. 由于 PE 和 PA 这一组相比线段还是重叠在一直线上，所以仍可添加平行线型相似三角形进行证明，这时可取过端点的 AD 为平行方向线段，平行线就可过内分点 E 作，即过 E 作 $EB'\parallel AD$ 交 PD 于 B'，从图形中马上就可发现要解决 B' 和 B

的关系. 由条件 PA 与⊙O 相切于 A,所以应用切线的性质,连结 OA 后有$\angle OAP=90°$,而$\angle OB'E$ 也等于 90°,同时由 $OE/\!/CA$,又可得$\angle EOA=\angle OAC=\angle OCA=\angle EOB'$,且 $OE=OE$,所以$\triangle OEA$ 和$\triangle OEB'$ 是一对轴对称型全等三角形,就有 $OB'=OA=OB$. B' 与 B 重合. 所以 EB' 实际上就是 EB 的连线. 又因为 $EB/\!/AD$,所以$\triangle PEB\backsim\triangle PAD$,$\dfrac{PE}{PA}=\dfrac{BE}{DA}$,这样问题又转化成要证 $\dfrac{BE}{DA}=\dfrac{OB}{CD}$,但这四条线段两两可组成$\triangle OEB$ 和$\triangle CAD$,由$\angle EOB=\angle ACD$ 和$\angle EBO=\angle ADC=90°$,可证明这两个三角形相似,分析完成.

本题要证明的性质也可以变形为 $\dfrac{PO}{OB}=\dfrac{PC}{CD}$,那末 PO 和 OB 这一组相比线段就重叠在一直线上,从而可添加平行线型相似三角形进行证明,添加的方法也是过端点和内分点作平行线. 由 PA 与⊙O 相切于 A,可得连结 OA 后有$\angle PAO=90°$,于是可将 OA 取作平行方向线段,则平行线可过内分点 B 作,也就是过 B 作 $BE/\!/OA$ 交 PA 于 E,就可得$\triangle PEB\backsim\triangle PAO$,$\dfrac{PO}{OB}=\dfrac{PA}{AE}$,问题就转化成要证 $\dfrac{PA}{AE}=\dfrac{PC}{CD}$. 这是一个新的比例关系,经过描图可以发现 PA、AE 和 PC、CD 这两组相比线段都重叠在一直线上,且有一个公共端点 P,所以仍然可添加平行线型相似三角形进行证明,于是连结 AC、ED,问题就成为应证这两条连线平行,即要证 $AC/\!/ED$. 由 PA 与⊙O 相切于 A,应用弦切角的基本图形的性质,可得连结 AB 后,有$\angle PAB=\angle ACB$. 又因为 $OA\perp PA$,$OA/\!/BE$,所以$\angle AEB=90°$,而已知$\angle ADB=90°$,所以 A、D、B、E 四点共圆,$\angle EAB=$

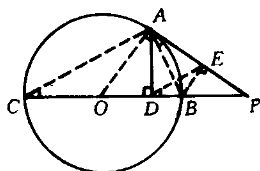


图 6・194

$\angle EDB$，所以 $\angle ACB=\angle EDB$，从而完成分析.

本题在变形为要证 $\frac{PO}{OB}=\frac{PC}{CD}$ 后，经过描图可以发现 PC 和 CD 这一组相比线段也重叠在一直线上，所以也可以添加平行线型相似三角形进行证明. 如取过内分点的线段 DA 为平行方向线段，则平行线可过端点 C 作，也就是过 C 作 $CE /\!/ DA$ 交 PA 的延长线于 E，就可得 $\triangle PAD \backsim \triangle PEC$，$\frac{PC}{CD}=\frac{PE}{EA}$. 又因为 $AD \perp PC$，所以 $EC \perp PC$，而 BC 是 $\odot O$ 的直径，就可得 EC 与 $\odot O$ 相切于 C，而 EA 与 $\odot O$ 相切于 A，所以可应用切线长定理得 $EA=EC$，那末 $\frac{PC}{CD}$ 就等于 $\frac{PE}{EC}$. 又因为 PA 与 $\odot O$ 相切于 A，应用切线的性质连结 OA 后，有 $\angle PAO=90°=\angle PCE$，从而又可得 $\triangle POA$ 和 $\triangle PEC$ 是一对逆平行线型相似三角形，$\frac{PE}{EC}=\frac{PO}{OA}$，而 $OA=OB$，从而完成分析.

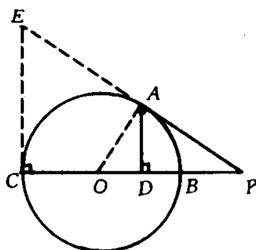


图 6・195

在取 DA 为平行方向线段时，平行线也可过另一个端点 P 作，也就是过 P 作 $PE /\!/ DA$ 交 CA 的延长线于 E，就可得 $\triangle CAD \backsim \triangle CEP$，$\frac{CD}{CP}=\frac{AD}{EP}$. 问题就转化为要证 $\frac{PE}{DA}=\frac{PO}{OB}$. 由 BC 是 $\odot O$ 的直径，A 是半圆上的点可得连结 AB 后，$\angle BAC=90°$，而 $\angle BPE=90°$，所以 $\angle OBA=\angle E$. 另一方面由 PA 与 $\odot O$ 相切于 A，可得连接 OA 后，有 $\angle PAO=90°$，所以 $\angle PAE=\angle OAB$，而 $\angle OAB=\angle OBA$，从而就得 $\angle E=$

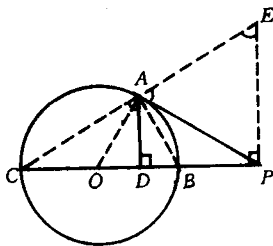


图 6・196

$\angle PAE$，$PE=PA$. 问题又成为要证$\frac{PA}{DA}=\frac{PO}{OB}$. 由于现在 AD 是 $Rt\triangle POA$ 的斜边上的高，$\angle PAD=\angle POA$，可证得$\triangle PAD\backsim\triangle POA$，是一对逆平行线型相似三角形，所以$\frac{PA}{DA}=\frac{PO}{AO}$，而 $AO=OB$，所以分析完成.

本题的条件中出现了 BC 是$\odot O$ 的直径，A 是半圆上的点，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明，也就是连结 AC、BC 后可得$\angle BAC=90°$，又因为 $AD\perp BC$，所以应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质可得$\angle BAD=\angle BCA$. 又因为 PA 与$\odot O$ 相切于 A，BA 是过切点的弦，所以应用弦切角的基本图形的性质，可得$\angle BAP=\angle PCA$，所以$\angle BAD=\angle BAP$，AB 是$\triangle PAD$ 的一条内角平分线，而 $CA\perp AB$，所以 AC 是一条外角平分线，那末应用三角形外角平分线的性质就可得$\frac{PC}{CD}=\frac{PA}{AD}$. 而由 PA 与$\odot O$ 相切于 A，连结 OA 后可得$\angle PAO=90°$，就可得$\triangle PAD\backsim\triangle POA$，$\frac{PA}{AD}=\frac{PO}{OA}=\frac{PO}{OB}$，所以分析可以完成.

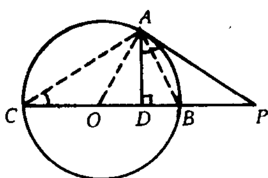


图 6・197

在上述分析中，在得到 AB 是$\triangle PAD$ 的一条角平分线后，也可以直接应用角平分线的性质得$\frac{PA}{AD}=\frac{PB}{DB}$，而由$\triangle PAD\backsim\triangle POA$，可得$\frac{PA}{AD}=\frac{PO}{OA}$. $\frac{PO}{OA}=\frac{PB}{DB}=\frac{PO-OA}{2OA-CD}$，$2PO\cdot OA-PO\cdot CD=PO\cdot OA-OA^2$，$PO\cdot OA+OA^2=PO\cdot CD$，$PC\cdot OA=PO\cdot CD$，也就完成分析.

由本题的条件 PA 与$\odot O$ 相切于 A，可得连结 OA 后有$\angle PAO=90°$. 而已知 $AD\perp PO$，所以 AD 就是 $Rt\triangle POA$ 的斜边上的高，应用射影定理可得 $OA^2=OD\cdot OP$，从而就有 $OB\cdot OC=$

$OD \cdot OP$，$\frac{OB}{OD}=\frac{OP}{OC}$，应用比例性质就可得$\frac{OB}{OB+OD}=\frac{OP}{OP+OC}$，从而就可完成证明.

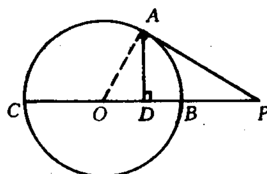


图 6・198

本题的分析在连结 CA、OA、BA 后，可得$\angle BAC=90°$，$\angle PAO=90°$，所以 AD 既是 $Rt\triangle BCA$ 的斜边上的高，也是 $Rt\triangle POA$ 的斜边上的高，所以可连续应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质得 $AD^2=CD \cdot BD$，$AD^2=OD \cdot PD$，得 $CD \cdot BD=OD \cdot PD$，$\frac{CD}{OD}=\frac{PD}{BD}$，应用比例性质可得$\frac{CD-OD}{CD}=\frac{PD-BD}{PD}$，$\frac{OC}{CD}=\frac{OB}{CD}=\frac{PB}{PD}$，从而问题就成为应证$\frac{PB}{PD}=\frac{PO}{PC}$. 也就是要证 $PB \cdot PC=PO \cdot PD$，由于 PA 与 $\odot O$ 相切于 A，PBC 是割线，应用切割线定理可得 $PB \cdot PC=PA^2$，且应用直角三角形斜边上的高的性质可得 $PO \cdot PD=PA^2$，所以分析可以完成.

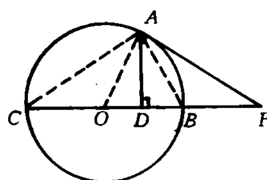


图 6・199

在上述分析中，也可以直接从切割线定理和直角三角形斜边上的高的性质得 $PB \cdot PC=PO \cdot PD$，所以$(PO-OB) \cdot PC=(PC-CD) \cdot PO$，$PO \cdot PC-OB \cdot PC=PC \cdot PO-CD \cdot PO$，$OB \cdot PC=CD \cdot PO$，也就可以完成分析.

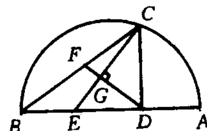


图 6・200

例 19 已知：C 是以 AB 为直径的半圆上的一点，$CD \perp AB$，垂足是 D，E 是 DB 上的任一点，$DF \perp CE$ 交 BC、CE 于 F、G. 求

证：$\frac{CF}{BF}=\frac{AD}{ED}$.

分析：本题要证的结论是四条线段之间的比例关系. 经过描图可以发现，两组相比两线段 CF 和 BF，AD 和 ED 都重叠在一直线上，从而就可添加平行线型相似三角形进行证明，添加的方法是过端点和内分点作平行线.

如果我们从 CF 和 BF 这一组相比线段重叠开始进行分析，那就可以取过端点 B 的 BE 为平行方向线段，平行线就可过内分

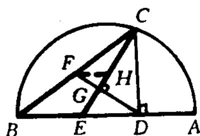


图 6・201

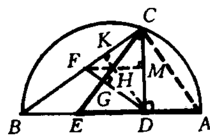


图 6・202

点 F 作，即过 F 作 $FH /\!/ BE$ 交 CE 于 H，即可得 $\frac{CF}{BE}=\frac{CH}{EH}$，从而问题转化为要证明 $\frac{CH}{EH}=\frac{AD}{ED}$. 这是一个新的比例关系，经过再一次的描图，可以发现这两组相比线段又分别重叠在一直线上，且有一个公共的端点 E，所以仍应添加平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是将内分点和内分点、端点和端点分别连结起来，即连结 DH、AC，问题就成为应证 $DH /\!/ AC$，由 AB 是半圆的直径，C 是半圆上的点，应用半圆上的圆周角的基本图形的性质，可得 $\angle ACB=90°$，$AC \perp BC$，从而就应证明 DH 也和 BC 垂直，那末根据垂线的定义，由于它们尚未相交，所以应将它们延长到相交，也就是延长 DH 交 BC 于 K，应证 $DK \perp BC$，这样 DK 就成为 $\triangle CDF$ 的一条高，而由条件 $CG \perp DF$，CG 也是 $\triangle CDF$ 的一条高，那末 DK 和 CG 的交点 H 就应是 $\triangle CDF$ 的垂心，于是问题也就转化为要证 H 是 $\triangle CDF$ 的垂心. 根据三角形垂心的定义，就应证它是三角形两条高的交点，由于 DK 是三角形的高是要证的结论，

不能用，所以必须要应用三角形的另外两条高，于是就应先将过$\triangle CDF$的顶点F的高添出，即延长FH交CD于M，由$FM /\!/ BA$、$BA \perp CD$，即可证明$FM \perp CD$，从而可完成分析.

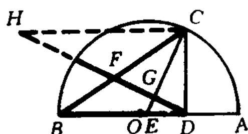


图 6・203

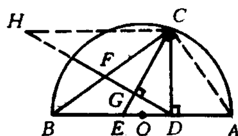


图 6・204

本题的分析在取BD为平行方向线段后，平行线也可以过另一个端点C作，并作到与过内分点的直线相交，于是过C作$CH /\!/ DB$交DF的延长线于H，则可得$\triangle CHF \backsim \triangle BDF$，$\frac{CF}{BF}=\frac{CH}{BD}$，问题就转化成要证$\frac{CH}{BD}=\frac{AD}{ED}$. 由条件$AB$是半圆的直径，所以连结$AC$后有$\angle ACB=90°$，这样$CD$就是$Rt\triangle ABC$的斜边上的高，应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质可得上述比例式中的内项积$BD \cdot AD$应等于CD^2，从而问题就要证外项积$CH \cdot ED$也等于CD^2，也就是要证$\frac{CH}{CD}=\frac{CD}{DE}$. 由于这四条线段两两组成$\triangle CHD$和$\triangle DCE$，而在这两个三角形中，$\angle HCD=\angle CDE=90°$，由$CG \perp DH$，应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质又可得$\angle CHD=\angle DCE$，所以这两个三角形相似，分析完成.

如取FD为平行方向线段，那末平行线可过端点B作，也就是过B作$BH /\!/ FD$交CD的延长线于H，就可得$\frac{CF}{BF}=\frac{CD}{HD}$，问题就转化成要证$\frac{CD}{HD}=\frac{AD}{ED}$. 这是一个新的比例关系，所以再次进行描图. 经过描图可以发现这两组相比线段仍然都重叠在一直线上，所以还是应用平行线型相似三角形进行证明. 由于这两组相比线

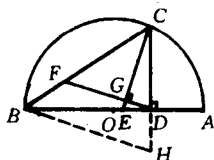


图 6・205

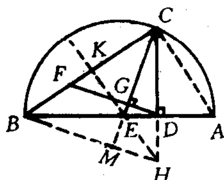


图 6・206

段所重叠的直线在内分点 D 相交，所以添加的方法是将这四个端点两两连接，也就是连接 EH、CA 后，应证这两条连线平行，即要证 $EH /\!/ CA$. 由 AB 是半圆的直径，C 是半圆上的点，可得 $\angle ACB = 90°$，所以问题也应证 $EH \perp BC$，于是根据垂线的定义，延长 HE 交 BC 于 K 后，应证 $HK \perp BC$，HK 是 $\triangle CBH$ 的一条高，而 $BD \perp CH$，所以问题又应证 HK 和 BD 的交点 E 应是 $\triangle CBH$ 的垂心，但 HK 这条高是要证的结论不能用，所以添加过顶点 C 的高，也就是延长 CE 交 BH 于 M，由于已知 $CG \perp FD$，且 $BH /\!/ FD$，所以 $CM \perp BH$，分析完成.

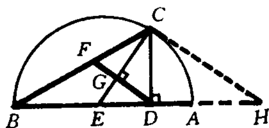


图 6・207

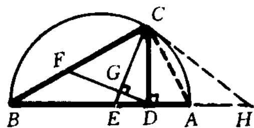


图 6・208

在取 FD 为平行方向线段后，平行线也可过另一个端点 C 作. 即过 C 作 $CH /\!/ FD$ 交 BA 的延长线于 H，可得 $\frac{CF}{BF} = \frac{HD}{BD}$. 从而要证明的结论就转化为 $\frac{HD}{BD} = \frac{AD}{ED}$. 由于 AB 是半圆的直径，C 是半圆上的一点，所以连结 AC，可得 $\angle ACB = 90°$，而由条件 $CD \perp AB$，可得 CD 是直角 $\triangle ABC$ 的斜边上的高，于是应用射影定理可得上述比例关系的内项积 $AD \cdot BD = CD^2$，从而就应证明它的外

项积 $HD \cdot ED$ 也等于 CD^2. 由条件 $CD \perp DF$ 和 $CH // FD$，又可得 $CH \perp CE$，所以 CD 也是直角$\triangle HEC$ 的斜边上的高，就有 $CD^2 = HD \cdot ED$，所以分析可以完成.

如果取 CD 为平行方向线段，那么平行线可过内分点 F 作. 即过 F 作 $FG // CD$ 交 AB 于 G，得 $\frac{CF}{BF} = \frac{DG}{BG}$，从而只要证明 $\frac{DG}{BG} = \frac{AD}{ED}$. 由于 AB 是半圆的直径，所以

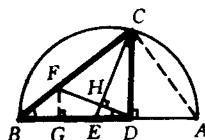


图 6·209

连结 AC，又可得$\angle ACB = 90°$，CD 是直角$\triangle ABC$ 的斜边上的高. 应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，可得$\angle ACD = \angle ABC$，而由$\angle ADC = \angle FGB = 90°$，又可得$\triangle ACD \backsim \triangle FBG$，$\frac{FG}{AD} = \frac{BG}{CD}$，所以上述比例关系中的内项积 $AD \cdot BG$ 就等于 $CD \cdot FG$，这样问题又转化为要证明它的外项积也等于 $CD \cdot FG$，也就是要证 $DG \cdot DE = CD \cdot FG$. 经过描图可以发现，这四条线段组成$\triangle DFG$ 和$\triangle CED$，而在这两个三角形中，$\angle CDE = \angle DGF = 90°$，由$\angle EDC = \angle CHD = 90°$，又可得$\angle HDE = \angle DCE$，就可证明这两个三角形相似，分析完成.

在取 CD 为平行方向线段时，平行线也可过另一个端点 B 作，也就是过 B 作 $BH // DC$ 交 DF 的延长线于 H，就有$\triangle BFH \backsim \triangle CFD$，$\frac{BF}{CF} = \frac{BH}{CD}$，那末问题就转化为应证 $\frac{BH}{CD} = \frac{ED}{AD}$. 由 AB 是半圆的直径，C 是半圆

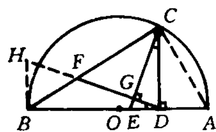


图 6·210

上的点，可得连结 AC 后有$\angle ACB = 90°$，CD 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边

上的高，所以有 $CD^2=AD\cdot BD$，$\frac{CD}{AD}=\frac{BD}{CD}$，那末问题又转化为要证$\frac{BH}{ED}=\frac{BD}{CD}$. 经过描图可以发现它们两两组成$\triangle BHD$和$\triangle DEC$，而由$\angle DBH=\angle CDE=90°$，和由$\angle CDE=90°$，$DG\perp CE$，推得的$\angle BDH=\angle DCE$，可证明这两个三角形相似，所以分析可以完成.

如果取 CE 为平行方向线段，则平行线可过端点 B 作，也就是过 B 作 $BH\parallel EC$ 交 DF 的延长线于 H，就可得$\triangle BFH\backsim\triangle CFG$，$\frac{BF}{CF}=\frac{BH}{CG}$，问题就成为要证$\frac{BH}{CG}=\frac{ED}{AD}$. 而由 $BH\parallel EG$，又可得$\triangle DGE\backsim\triangle DHB$，$\frac{EG}{BH}=\frac{ED}{BD}$，$BH=\frac{BD\cdot EG}{ED}$，问题又应证$\frac{BD\cdot EG}{ED\cdot CG}=\frac{ED}{AD}$. 而由$\angle CDE=90°$和 $DG\perp CE$，应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，可得 $ED^2=EG\cdot CE$，所以问题又转化为要证 $BD\cdot AD=CE\cdot CG$，由于 $CE\cdot CG=CD^2$，连结 AC 后也可证 $BD\cdot AD=CD^2$，分析完成.

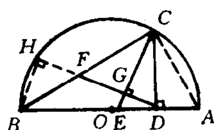


图 6・211

在取 CE 为平行方向线段后，平行线也可以过内分点 F 作，也就是过 F 作 $FH\parallel CE$ 交 AB 于 H，就有$\frac{BF}{CF}=\frac{BH}{EH}$，问题就转化成要证$\frac{BH}{EH}=\frac{ED}{AD}$，但$\frac{BH}{EH}=\frac{BD-DH}{DH-DE}$，所以应证$\frac{ED}{AD}=\frac{BD-DH}{DH-ED}$，$ED\cdot DH-ED^2=AD\cdot BD-AD\cdot DH$. 由条件 AB 是半圆的直径，连结 AC 后可得$\angle ACB=90°$，并进一步可得 $AD\cdot BD=CD^2$，所以上式又转化为 $ED\cdot DH+AD\cdot DH=CD^2+ED^2$，但$\angle CDE=90°$，$CD^2+ED^2=CE^2$，而 $ED+AD=EA$，所以问题又转化为要证 $DH\cdot EA=CE^2$，

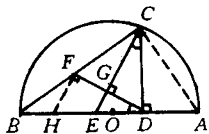


图 6・212

$\frac{DH}{CE}=\frac{CE}{CA}$. 但因$\angle CDE=90°$，$DG\perp CE$，可得$\angle FDH=\angle DCE$，$\angle DFH=\angle CDE=90°$，所以$\triangle DHF\backsim\triangle CED$，$\frac{DH}{CE}=\frac{DF}{CD}$，问题又成为应证$\frac{CE}{AE}=\frac{DF}{CD}$. 而这四条比例线段两两组成$\triangle ECA$和$\triangle DFC$，且可证明$\angle AEC=\angle CDF$，$\angle EAC=\angle DCF$，所以这两个三角形相似，上述性质就可证明.

本题的分析也可以ED和AD这一组重叠在一直线上的相比线段开始. 那就可以取过端点E的线段EC为平行方向线段，平行线就可以过内分点D作，也就是过D作$DH\parallel EC$交AC于H，这就应先连结AC，就可得$\frac{ED}{AD}=\frac{CH}{AH}$，问题就成为要证$\frac{BF}{CF}=\frac{CH}{AH}$. 由$AB$是半圆的直径，$\angle ACB=90°$和$CD\perp AB$，可得$\angle ACD=\angle ABC$，由$\angle CDE=90°$和$DG\perp CE$，可得$\angle BDF=\angle DCE$，而由$EC\parallel DH$，又可得$\angle DCE=\angle CDH$，所以$\angle BDF=\angle CDH$，就可证得$\triangle BDF\backsim\triangle CDH$，是一对旋转型相似三角形，所以$\frac{BF}{CH}=\frac{FD}{HD}$，那么问题就转而应证$\frac{CF}{AH}=\frac{FD}{HD}$. 经过描图可以发现它们两两组成$\triangle CFD$和$\triangle AHD$，且可以证明$\angle CDF=\angle ADH$，$\angle DCF=\angle DAH$，这两个三角形相似，完成分析.

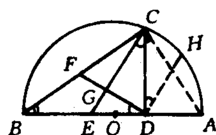


图 6・213

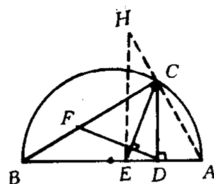


图 6・214

若取过内分点D的DC为平行方向线段，则平行线可过端点E作，也就是过E作$EH\parallel CD$交AC的延长线于H，这时也应先连结AC，就可得$\frac{ED}{DA}=\frac{HC}{CA}$，问题就成为应

证$\frac{BF}{CF}=\frac{HC}{CA}$. 由于$\angle BCA=90°$,$CD\perp AB$,可得$\angle FBD=\angle DCA=\angle CHE$,$\angle BDC=90°$和$DG\perp CE$,又可得$\angle FDB=\angle ECD=\angle CEH$,所以$\triangle FDB\backsim\triangle CEH$,$\frac{BF}{HC}=\frac{FD}{CE}$,所以问题成为要证$\frac{FD}{CE}=\frac{CF}{CA}$,那末再由$\angle FCD=\angle CAE$,$\angle FDC=\angle CEA$,可得$\triangle FCD\backsim\triangle CAE$,从而可证明结论.

在取DC为平行方向线段时,平行线也可过另一个端点A作. 也就是过A作$AH/\!/DC$交EC的延长线于H,就可得$\frac{ED}{AD}=\frac{EC}{HC}$,问题就成为要证$\frac{BF}{CF}=\frac{EC}{HC}$. 由$AH/\!/DC$,$CD\perp AB$,可得$AH\perp AB$,而$AB$是半圆的直径,所以$AH$与半圆相切于$A$,$AC$是过切点的弦,可得$\angle HAC=\angle DBF$. 由$\angle CDE=\angle DGC=90°$,又可得$\angle EDG=\angle ECD=\angle CHA$,所以$\triangle FBD\backsim\triangle CAH$,$\frac{BF}{CA}=\frac{FD}{CH}$,从而问题转化为要证$\frac{CA}{CF}=\frac{EC}{FD}$. 由于可证明$\triangle ECA\backsim\triangle DFC$,分析完成.

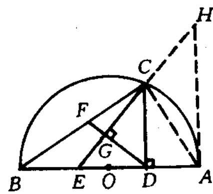


图 6・215

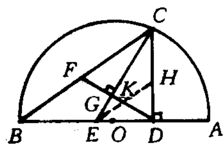


图 6・216

本题要证的结论$\frac{CF}{BF}=\frac{AD}{ED}$,经过描图后可以发现$CF$和$BF$这一组相比线段重叠在一直线上,且过端点$B$、$C$和内分点$F$的三直线共点于$D$,所以可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明,添加的方法是作同与共点三直线相交的BC的平行线. 于是过E作$EH/\!/BC$交DF、DC于K、H,就可得$\frac{CF}{BF}=\frac{HK}{EK}$. 问题就成为要证$\frac{HK}{EK}=\frac{AD}{ED}$. 这是一个新的比例关系,经过描图可以发现两组相比线段都重叠在一直线上,且有一个公共的端点E,从而可

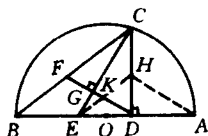


图 6・217

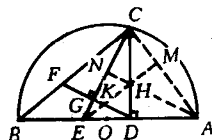


图 6・218

添加平行线型相似三角形进行证明，添加的方法是将端点和端点，内分点和内分点分别连接起来，也就是连接 AH 后，应证 $AH /\!/ DK$. 但已知 $DK \perp CE$，所以又应证 $AH \perp CE$，根据垂线的定义，延长 AH 交 EC 于 N 后，应证$\angle ANC = 90°$. 这样 AN 就应是$\triangle ACE$ 的一条高，于是先应连结 AC，而 CD 也是$\triangle ACE$ 的一条高，那末就应证它们的交点 H 是$\triangle ACE$ 的垂心，但 AN 这条高是结论，不好用，所以将另一条高添全，也就是延长 EH 交 AC 于 M，由 $EM /\!/ BC$ 和$\angle ACB = 90°$，就可证明$\angle AMC = 90°$，分析完成.

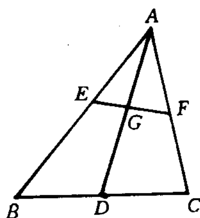


图 6・219

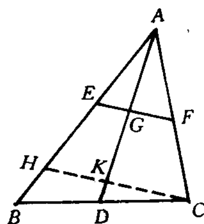


图 6・220

例 20 已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是边 BC 上的中线，E、F 分别是 AB、AC 上的点，且 $AE = AF$，EF 交 AD 于 G. 求证：$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{EG}{FG}$.

分析：本题要证的结论是线段之间的比例关系，经过描图可以发现 EG 和 FG 这一组相比线段现在重叠在一直线上，且过端点 E、F 和内分点 G 的三直线共点于 A，所以可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 添加的方法是作与共点三直线都相交

的 EF 的平行线，所以过 C 作 $CH \parallel FE$ 交 AB、AD 于 H、K，就可得$\frac{EG}{FG}=\frac{HK}{CK}$，问题就成为要证$\frac{HK}{CK}=\frac{AC}{AB}$. 但在作出 $EF \parallel HC$ 后，又可得$\triangle AEF \backsim \triangle AHC$，$AC=AH$，所以就应证$\frac{HK}{CK}=\frac{AH}{AB}$，这样又出现了 AH 和 AB 这一组相比线段重叠在一直线上，又可以添加平行线型相似三角形进行证明. 若取过端点 A 的线段 AD 为平行方向线段，则平行线可过另一个端点 B 作，也就是过 B 作 $BM \parallel DA$ 交 CH 的延长线于 M，就可得$\triangle BMH \backsim \triangle AKH$，$\frac{AH}{AB}=\frac{KH}{KM}$. 但由 $BD=CD$ 和 $BM \parallel DK$，可得 $MK=CK$，所以分析可以完成.

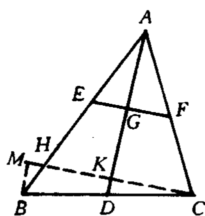


图 6・221

在上述分析中，在取 AD 为平行方向线段后，平行线也可过内分点 H 作，则过 H 作 $HM \parallel AD$ 交 BC 于 M，就可得$\frac{AH}{AB}=\frac{DM}{DB}$. 但 $DB=DC$，而由 $MH \parallel DK$，也可得$\frac{HK}{CK}=\frac{MD}{DC}$，分析完成.

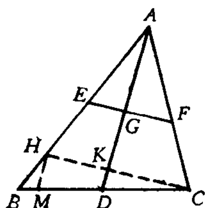


图 6・222

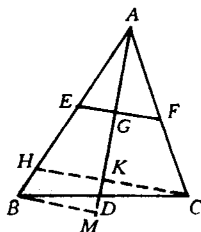


图 6・223

如取过内分点的线段 HK 为平行方向线段，则平行线可过端点 B 作，也就是过 B 作 $BM \parallel HK$ 交 AD 的延长线于 M，就可得$\triangle AHK \backsim \triangle ABM$，$\frac{AH}{AB}=\frac{HK}{BM}$，从而问题就成为要证 $BM=CK$.

由条件 $BD=CD, BM /\!/ KC$，可证明$\triangle BDM$和$\triangle CDK$是一对中心对称型全等三角形，所以$BM=CK$就可以证明.

如取过端点的线段BD为平行方向线段，则平行线可过内分点H作，也就是过H作$HM /\!/ BD$交AD于M，就可得$\triangle AHM \backsim \triangle ABD$，$\frac{AH}{AB}=\frac{HM}{BD}$，而已知$BD=CD$，$HM$和$CD$又是一组平行线段，所以$\triangle HMK$和$\triangle CDK$也是一对平行线型相似三角形，$\frac{HM}{CD}=\frac{HK}{CK}$，从而也可完成分析.

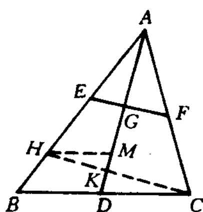


图 6・224

在取BD为平行方向线段时，平行线也可以过另一个端点A作，也就是过A作$AM /\!/ CB$交CH的延长线于M，则可得$\triangle AMH \backsim \triangle BCH$，$\frac{AH}{AB}=\frac{AM}{AM+BC}=\frac{AM}{AM+2CD}$. 而$CD$和$AM$是平行线段，它们四个端点两两的连线在$K$点相交，所以又可应用平行线型相似三角形进行证明，于是可得$\triangle CDK \backsim \triangle MAK$，$\frac{CD}{AM}=\frac{CK}{MK}$. 与要证的结论相比较，可知问题成为应找出$MK$与$CK$、$HK$之间的关系. 由$\frac{BC}{AM}=\frac{CH}{MH}=\frac{CK+HK}{MK-HK}$，$\frac{CD}{AM}=\frac{CK}{MK}$和$BC=2CD$，可得$\frac{CK+HK}{MK-HK}=\frac{2CK}{MK}$，在这个关系式中即可得$MK=\frac{2CK \cdot HK}{CK-HK}$，所以$\frac{CK}{MK}=\frac{CK-HK}{2HK}$. 所以$\frac{AH}{AB}=\frac{1}{1+\frac{2CD}{AM}}=$

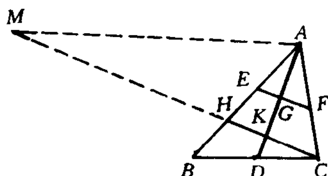


图 6・225

$$\frac{1}{1+\frac{2CK}{MK}}=\frac{1}{1+\frac{CK-HK}{HK}}=\frac{HK}{CK}.$$

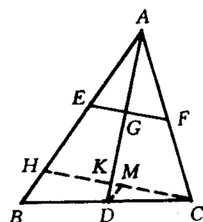


图 6・226

本题在作出 $CH /\!/ EF$，并将问题转化为要证 $\frac{HK}{CK}=\frac{AH}{AB}$ 后，也可以再从 BD、CD 这一组相比(等)线段重叠在一直线上出发进行分析，那末仍应添加平行线型相似三角形进行证明. 如取过端点 B 的线段 BA 为平行方向线段，则平行线可过内分点 D 作，也就是过 D 作 $DM /\!/ BA$ 交 CH 于 M，就可得 $HM=CM$，$DM=\frac{1}{2}BH$ 和 $\triangle AHK \backsim \triangle DMK$，$\frac{DM}{AH}=\frac{MK}{HK}$，$\frac{MK}{HK}=\frac{\frac{1}{2}BH}{AH}$，$\frac{HM}{HK}=\frac{AH+DM}{AH}$，$\frac{CM}{HK}=\frac{AH+\frac{1}{2}BH}{AH}$. 所以 $\frac{MK+CM}{HK}=\frac{\frac{1}{2}BH}{AH}+\frac{AH+\frac{1}{2}BH}{AH}$，就可推得上述性质.

本题在添加平行线型相似三角形的组合图形时，平行线也可以过 D 作，也就是过 D 作 $HK /\!/ EF$ 交 AB 于 H，交 AC 的延长线

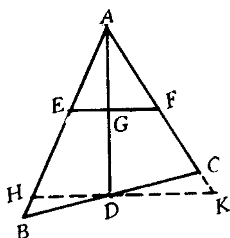


图 6・227

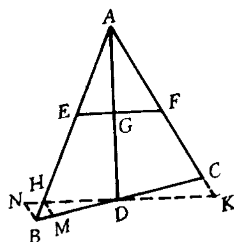


图 6・228

于 K，就可得$\frac{EG}{FG}=\frac{HD}{KD}$，问题就成为要证$\frac{HD}{KD}=\frac{AC}{AB}$. 经过描图可以发现 HD 和 KD 这一组相比线段仍然重叠在一直线上，所以还是可添加平行线型相似三角形进行证明. 如取 CK 为平行方向线段，则平行线可过端点 H 作，也就是过 H 作 $HM // CK$ 交 BC 于 M，就有$\triangle HDM \backsim \triangle KDC$，$\frac{HD}{KD}=\frac{HM}{CK}$，问题又应证$\frac{HM}{CK}=\frac{AC}{AB}$. 而由 $HM // CK$，又可得$\triangle BHM \backsim \triangle BAC$，$\frac{HM}{AC}=\frac{BH}{BA}$，这样问题又成为要证 $BH=CK$. 由条件 $BD=CD$，且 BC、HK 在 D 点相交，就可添加中心对称型全等三角形进行证明，于是过 B 作 $BN // KC$ 交 KH 的延长线于 N，就可证明$\triangle BDN \cong \triangle CDK$，$BN=CK$，那就又要证 $BN=BH$. 而由 $BN // KA$，可得$\triangle BNH \backsim \triangle AKH$，由 $HK // EF$，可得$\triangle AKH \backsim \triangle AFE$，且已知 $AE=AF$，分析完成.

如取 BH 为平行方向线段，则平行线可过端点 K 作，也就是过 K 作 $KM // BA$ 交 BC 的延长线于 M，就可得$\frac{HD}{KD}=\frac{BH}{MK}$，而由 $KM // BA$，$\triangle KMC \backsim \triangle ABC$，又可得$\frac{CK}{CA}=\frac{KM}{AB}$，从而问题也转化为要证 $BH=CK$. 那么过 C 作 $CN // AB$ 交 HK 于 N，在证明了$\triangle BDH \cong \triangle CDN$，$BH=CN$ 和$\triangle CNK \backsim \triangle AHK \backsim \triangle AEF$ 后，再根据 $AE=AF$ 就可以完成分析.

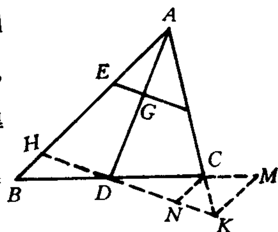


图 6 · 229

在添加平行线型相似三角形的组合图形时，平行线也可以过 B 作，也就是过 B 作 $BK // EF$ 交 AD 的延长线于 H，交 AC 的延长线于 K. 就可得$\frac{EG}{FG}=\frac{BH}{KH}$，$\triangle AEF \backsim \triangle ABK$ 和 $AB=AK$，于是要证的结论转化成$\frac{BH}{KH}=\frac{AC}{AK}$. 经过描图又出现 AC 和 AK 这一组

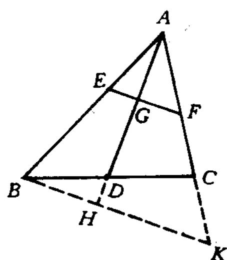


图 6・230

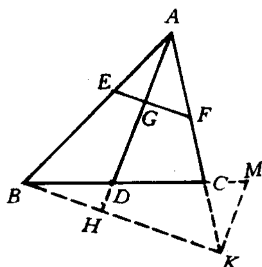


图 6・231

相比线段重叠在一直线上，所以又可添加平行线型相似三角形进行证明. 如取 AD 为平行方向线段，则平行线可过端点 K 作，也就是过 K 作 $KM \parallel HA$ 交 BC 的延长线于 M，就可得$\triangle ADC \backsim \triangle KMC$，$\frac{AC}{AK}=\frac{DC}{DM}=\frac{BD}{DM}$，而$\frac{BD}{DM}=\frac{BH}{KH}$，从而也可完成证明.

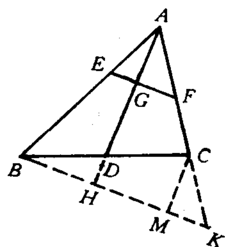


图 6・232

本题上述分析在取 AD 为平行方向线段时，平行线也可以过内分点 C 作，也就是过 C 作 $CM \parallel AD$ 交 BK 于 M，则有$\frac{AC}{AK}=\frac{HM}{HK}$，但由 $BD=CD$ 可得 $HM=BH$，所以分析也可以完成.

如取过端点 A 的 AB 为平行方向线段，则平行线可过内分点 C 作，也就是过 C 作 $CM \parallel AB$ 交 BK 于 M，就可得$\frac{AC}{AK}=\frac{BM}{BK}$，从而要证$\frac{BM}{BK}=\frac{BH}{KH}$. 于是将 BM、BK 都化成 BH、KH 的关系，就成为要证$\frac{BH+HM}{BH+KH}=\frac{BH}{KH}$，化简后成为要证 $MH \cdot KH=BH^2$. 由条件 $BD=CD$，且 BC、AH 相交于 D，所以又可添加中心对称型全等三角形进行证明，于是延长 CM 交 AH 的延长线于 N，即可得

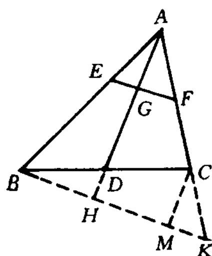


图 6・233

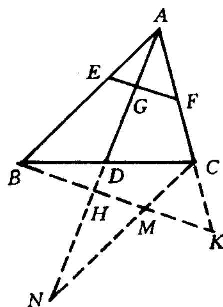


图 6・234

$\triangle ABD \cong \triangle NCD$，$AB=CN$. 而由 $CM /\!/ AB$，可得$\triangle KCM \backsim \triangle KAB$，$\dfrac{CM}{AB}=\dfrac{KM}{BK}=\dfrac{KH-MH}{KH+BH}$，由 $MN /\!/ AB$，可得$\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{MH}{BH}$，而$\dfrac{CM}{AB}+\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{CN}{AB}=1$，所以$\dfrac{KH-MH}{KH+BH}+\dfrac{MH}{BH}=1$，化简后就可证明 $MH \cdot KH=BH^2$.

在取 AB 为平行方向线段时，平行线也可过另一个端点 K 作，则过 K 作 $KM /\!/ BA$ 交 BC 的延长线于 M，就可得$\triangle ABC \backsim \triangle KMC$，$\dfrac{AC}{AK}=\dfrac{BC}{BM}=\dfrac{2DC}{2DC+CM}=\dfrac{DC}{DC+\frac{1}{2}CM}$，于是根据线段倍半关系的定义，应将$\frac{1}{2}CM$作出，也就是取 CM 的中点 N，问题就成为应证$\dfrac{BD}{DN}=\dfrac{BH}{HK}$. 经过描图，可以发现这两组相比线段都重叠，且有一个公共的端点 B，所以连结 KN 后，应证 $KN /\!/ HD$. 但由$\dfrac{BC}{MC}=\dfrac{AC}{KC}$和 $BC=2CD$，

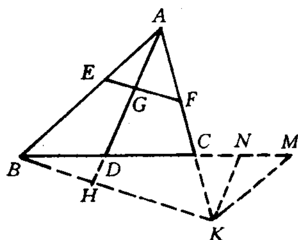


图 6・235

$MC=2CN$，可得$\frac{DC}{NC}=\frac{AC}{KC}$，所以 $KN /\!/ DA$ 就可以证明.

本题的分析也可以从 BD 和 CD 这一组相等线段重叠在一直线上开始进行，由于这时过端点 B、C 和内分点 D 的三直线共点于 A，所以也可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 添加的方法是作同和共点三直线相交的 BC 的平行线，于是过 E 作 $EK /\!/ BC$ 交 AD、AC 于 H、K，就可得$\frac{EH}{BD}=\frac{KH}{CD}$，$EH=KH$. 同时又可得$\triangle AEK \backsim \triangle ABC$，$\frac{AC}{AB}=\frac{AK}{AE}=\frac{AK}{AF}$. 由于 AK、AF 这一组相比线段又重叠在一直线上，所以仍可添加平行线型相似三角形进行证明，于是过 F 作 $FM /\!/ KH$ 交 AD 于 M，可得$\frac{AK}{AF}=\frac{KH}{FM}=\frac{EH}{FM}$，那么再由 $EH /\!/ FM$，$\triangle EHG \backsim \triangle FMG$，$\frac{EG}{FG}=\frac{EH}{FM}$完成证明.

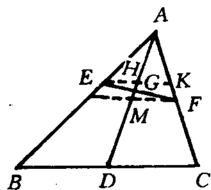


图 6・236

本题的分析在作出 $EK /\!/ BC$ 交 AD、AC 于 H、K，并将问题转化为要证$\frac{EG}{FG}=\frac{AK}{AF}$后，由于出现的也是相比两线段重叠，所以也可以应用三角形面积的基本图形的性质进行证明. 由于 H、A 是过内分点 G 的直线上的两点，所以连结 HF 后，有$\frac{EG}{FG}=\frac{S_1}{S_2}$(其中 $S_1=S_{\triangle AEH}$，$S_2=S_{\triangle AFH}$). 而由 $EH=KH$，可得 $S_1=S_3$(其中 $S_3=S_{\triangle AKH}$)，所以$\frac{EG}{FG}=\frac{S_3}{S_2}$. 另一方面又有$\frac{AK}{AF}=\frac{S_3}{S_2}$，所以结论可以证明.

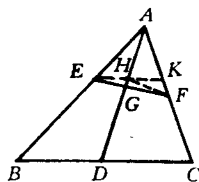


图 6・237

例 21 已知：AB 是⊙O 的直径，E 是⊙O 上的一点，过 E 作⊙O 的切线交过 A、B 所作⊙O 的切线于 D、C. $EF \perp AB$，垂足是

F，EF 交 AC 于 G. 求证：$EG=FG$.

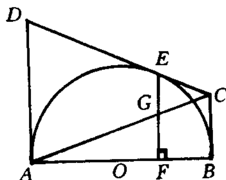


图 6・238

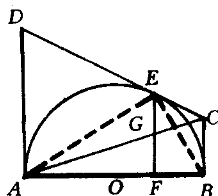


图 6・239

分析：本题条件中给出 AB 是⊙O 的直径，E 是半圆上的一点，所以可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明. 由于

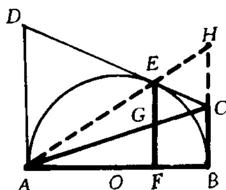


图 6・240

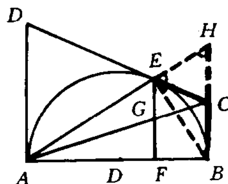


图 6・241

已知图形中有直径，有半圆上的点，而没有圆周角，所以应先将圆周角添上，即连结 AE、BE，可得$\angle AEB=90°$. 另一方面，由 $EF\perp AB$ 和 $CB\perp AB$，可得 $EF/\!/CB$，于是结论中出现的两条相等线段就重叠在一组平行线段上，且过两端点 E、F 和内分点 G 的三直线共点于 A，从而可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 添加的方法是将共点三直线和这一组平行线相交，所以延长 AE 交 BC 的延长线于 H，得$\dfrac{EG}{FG}=\dfrac{HC}{BC}$，从而只要证明 $HC=BC$. 又因为 A、E、H 成一直线，所以$\angle BEH=90°$，那末 C 就成为$Rt\triangle BHE$ 的斜边的中点，从而又可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明，即证明 HC、BC 都和 EC 相等. 由于 CE、CB 都和⊙O 相切，所以 $CE=CB$. 而由$\angle BEH=90°$，$\angle CEB=$

$\angle CBE$，就可以证明$\angle CEH=\angle CHE$ 和 $CH=CE$，从而完成分析.

由本题的条件 AB 是半圆的直径和 CB 与半圆相切于 B，可得 $CB\perp AB$，而已知 $EF\perp AB$，所以 $EF/\!/AB$，这样结论中出现的 FG 就成为$\triangle ABC$ 内边 BC 的平行线段，所以可应用平行线型相似三角形的性质进行证明.于是可得$\triangle AGF\backsim\triangle ACB$，$\frac{FG}{BC}=\frac{AF}{AB}$.根据同样的道理，可得 $EG/\!/DA$，$\triangle CEG\backsim\triangle CDA$，$\frac{EG}{AD}=\frac{CE}{CD}$.但由 DE、DA 分别与半圆相切于 E、A，可得 $DA=DE$，$EG=\frac{DE\cdot CE}{CD}$.另一方面，由 $BC/\!/FE/\!/AD$，也可得 $\frac{AF}{AB}=\frac{DE}{DC}$，且 $BC=EC$，所以也可证得 $FG=\frac{BC\cdot DE}{DC}=\frac{EC\cdot DE}{DC}$，从而分析完成.

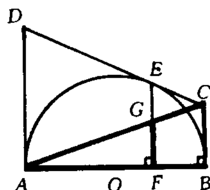


图 6・242

由本题的条件可得 $EF/\!/CB$，FG 成为$\triangle ABC$ 内边 BC 的平行线段，所以可应用平行线型相似三角形的基本图形的性质进行证明.于是可得$\triangle AFG\backsim\triangle ABC$，$\frac{FG}{BC}=\frac{AG}{AC}$.而 EG 和 BC 也是一组平行线段，所以也可以添加平行线型相似三角形进行证明，添加的方法是将这四个端点两两连结起来，于是连结 BE 交 CG 于 H，就可得$\triangle EGH\backsim\triangle BCH$，$\frac{EG}{BC}=\frac{GH}{CH}$.这样问题就转化成要证$\frac{AG}{AC}=\frac{HG}{HC}$.这是一个新的比例关系，经过描图可以发现成比例的四条线段都重叠在一条直线上，且组成线段 CG 的内分的比和外分的比相等，从而可应用三角形内外角平分线的基本

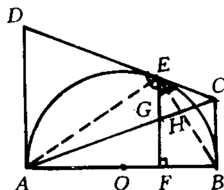


图 6・243

图形的性质进行证明. 这时过内外分点的两条互相垂直的线段就应分别是内外角平分线,于是连结 AE,由 AB 是半圆上的直径,E 是半圆上的一点,可得$\angle AEB=90°$,这样问题就应证 EH 是 $\angle GEC$ 的角平分线. 由 EF 是 $Rt\triangle ABE$ 的斜边上的高,可得 $\angle BEF=\angle BAE$,由 CE 与半圆相切于 E,EB 是过切点的弦,可得$\angle BEC=\angle BAE$,所以$\angle GEH=\angle CEH$ 可以证明. 再由 C、E、D 成一直线和$\angle AEB=90°$,可得$\angle AEG=\angle AED$,那末应用三角形的内外角平分线的性质就可以证明上述结论.

例 22 已知:正方形 $ABCD$ 中,E 是 CD 的中点,F 是 AD 上的一点,且 $DF=\frac{1}{4}AD$. 求证:$BE=2EF$.

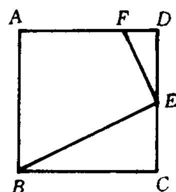


图 6・244

分析:本题要证明的性质 $BE=2EF$,是两条线段之间的倍半关系,且又给出了 E 是 CD 的中点,所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 于是首先考虑将半线段 EF 取作三角形的中位线,那末必须要使 E、F 都成为线段的中点,于是在 FA 上截取 $FG=FD$,那末 E、F 这两个中点的连线就是三角形的中位线,现在图形中是有中位线,而缺少三角形的边,所以连结 CG,就可得 $CG=2EF$,问题就成为要证 $BE=CG$. 而这两条线段可以分别看作是 $Rt\triangle BEC$ 和 $Rt\triangle CGD$ 的斜边,而在这两个三角形中,有 $BC=CD$,$\angle BCE=\angle CDG=90°$,且在证明了 G 也是 AD 的中点后,就有 $CE=DG$,从而可证明这两个三角形是一对绕正方形的中心旋转 90°的全等三角形,所以分析可以完成.

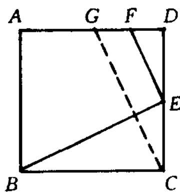


图 6・245

本题在应用三角形的中位线的基本图形的性质进行分析时,也可以将倍线段 BE 取作三角形的边,由于 BE 可以看作是

$\triangle BCE$ 的一条边,所以可作出 $\triangle BCE$ 中与 BE 平行的中位线,于是取 BC、CE 的中点 G、H,并连结 GH,就可得 $BE=2GH$,这样问题就成为要证 $GH=EF$,由于 G、E 分别是 BC、CD 的中点,H、F 分别是 CD、DA 的四分之一分点,所以也可以证明 $\triangle GHC \cong \triangle EFD$,从而也可以完成分析.

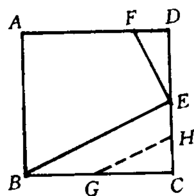


图 6・246

由于本题结论中出现的两条线段可以分别看作是 $Rt\triangle BEC$ 和 $Rt\triangle EFD$ 的斜边,而 $BC=2CE=2ED$,且还可证明 $CE=2DF$,所以 $\triangle BEC \backsim \triangle EFD$,这样也就可以证明 $BE=2EF$.

例 23 已知:正方形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于 O,BE 是 $\angle CBD$ 的平分线,$AF \perp BE$ 交 BC、BD 于 F、G. 求证:$CF=2GO$.

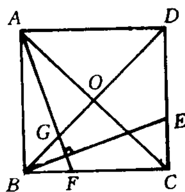


图 6・247

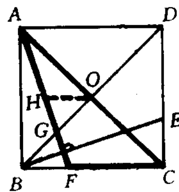


图 6・248

分析:本题要证明的结论 $CF=2GO$ 是两条线段之间的倍半关系,且由于正方形的对角线相交于 O,所以 O 是对角线 AC 的中点,从而可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 于是首先可考虑将倍线段 CF 取作三角形的边,由于 CF 可以看作是 $\triangle ACF$ 的边,所以应添加与 CF 平行的中位线,因为 O 已是 AC 的中点,所以取 AF 的中点 H,并连结 OH,就可得 $CF=2OH$,CF

$// OH$，这样问题就转化成要证 $OH=OG$. 而这是两条具有公共端点 O 的相等线段，所以问题就是要证$\triangle OHG$ 是等腰三角形. 而由 $OH // FB$，OB、HF 相交于 G，可得$\triangle OHG \backsim \triangle BFG$，这样问题又成为要证$\triangle BFG$ 是等腰三角形，由于 BE 是$\angle CBD$ 的平分线和 $AF \perp BE$，所以 $BG=BF$ 可以证明，分析也就可以完成.

本题在应用三角形的中位线的基本图形的性质进行分析时，也可将半线段 OG 取作三角形的中位线，这时首先就应使 O、G 这两个端点都成为线段的中点，于是延长 AF 到 H，使 $HG=AG$，并连结 CH，即可得 $CH // OG$，$CH=2OG$，这样问题就转化为要证 $CH=CF$. 那末由 $OG // CH$、$\triangle BGF \backsim \triangle CHF$，和由 BE 平分$\angle GBF$，$AF \perp BE$ 推得的 $BG=BF$，完成证明.

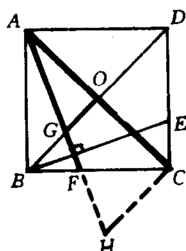


图 6・249

本题要证的结论是两条线段之间的倍半关系，所以也可以根据线段倍半关系的定义．将倍线段两等分，也就是取 CF 的中点 H 后．证明 CF 的一半，也就是 FH 和 OG 相等. 由于 O 也是 AC 的中点，这样就出现了两个中点，是多个中点问题，所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 H 和 O 这两个中点所在的线段 FC、AC 具有公共端点 C，可以组成$\triangle CAF$，所以 OH 这两个中点的连线就是三角形的中位线，但现在图形中是有三角形而没有中位线，所以应将中位线添上，即连结 OH，可得 $OH // AF$，而现在要证 $FH=GO$，则由 $OH // GF$，可得$\triangle BGF \backsim \triangle BOH$，$\frac{BG}{GO}=\frac{BF}{FH}$，所以又应证 $BG=BF$，那末由 BE 平分$\angle GBF$ 和 $AF \perp BE$ 也就可以完成分析.

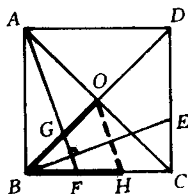


图 6・250

本题在根据线段的倍半关系的定义进行分析时，也可以先作出半线段的两倍，也就是在 OD 上截取 $OH=OG$，那末问题就成为要证 $CF=HG$. 但在作出 $OH=OG$ 后，由于又有 $OA=OC$，且 AC、GH 相交于 O，从而就出现了两组相等线段都在一组对顶角的两边，且成一直线，所以就可添加中心对称型全等三角形进行证明，于是连结 HC，即可得 $\triangle AOG\cong\triangle COH$，$\angle OAG=\angle OCH$，$CH\parallel GA$，$\triangle BGF\backsim\triangle BHC$. 那末再由 BE 平分 $\angle GBF$，$AF\perp BE$，在证明了 $BG=BF$ 后，也就可以完成分析.

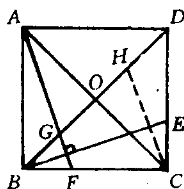


图 6・251

例 24 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AD\perp BC$，垂足是 D，E 是 AD 上的一点，且 $EA=EB$，$CF\perp AB$，垂足是 F，且交 EB、AD 于 G、H. 求证：$BG=2DH$.

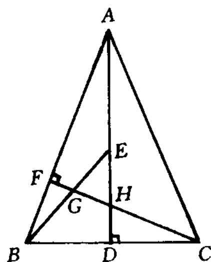


图 6・252

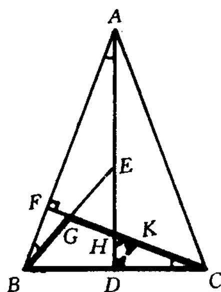


图 6・253

分析：本题条件中给出 $AB=AC$，$AD\perp BC$，所以 D 是 BC 的中点. 现在要证明 $BG=2DH$，是两条线段之间的倍半关系，且是与 BC 的中点 D 有联系，所以可添加三角形中位线的基本图形进行证明. 于是可先考虑将倍线段 BG 取作三角形的边，再作与 BG 平行的三角形的中位线. 由于 BG 可以看作是 $\triangle BCG$ 的一条边，所以取 CG 的中点 K，并连结 DK，就可得 $DK\parallel BG$，$BG=2DK$.

问题就转化为要证 $DK=DH$，$\angle DHK=\angle DKH$. 由条件 $CF\perp AB$，$AD\perp BC$，所以 H、F、B、D 四点共圆，且由于 F、H、C 成一直线，所以 $\angle DHK=\angle ABC$. 而由 C、K、H 成一直线，又可得 $\angle DKH=\angle KDC+\angle KCD$，而 $\angle KDC=\angle EBC$，$\angle KCD=\angle BAD$，而条件中又有 $EB=EA$，$\angle BAD=\angle EBA$，所以就可证明 $\angle DKH=\angle EBC+\angle EBA=\angle ABC$，从而可完成分析.

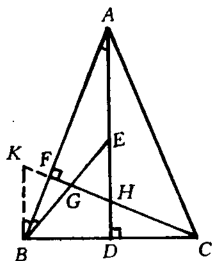


图 6 · 254

本题在应用三角形的中位线的基本图形进行证明时，也可以将半线段 DH 取作三角形的中位线，那就应添与 DH 平行的三角形的边，于是由 D 是 BC 的中点，可知应过 B 作 $BK/\!/DH$ 交 CF 的延长线于 K，就可得 $KH=CH$，$BK=2DH$，问题就成为要证 $BK=BG$. 由 $BK/\!/DA$，可得 $\angle KBA=\angle BAD$，而由条件 $EA=EB$，可得 $\angle EBA=\angle EAB$，所以 $\angle KBA=\angle EBA$，那末再由 $BF\perp KG$，就可以证明 $BK=BG$.

本题要证明的结论 $BG=2DH$，是两条线段之间的倍半关系，所以可根据线段倍半关系的定义，取 BG 的中点 K 后，证明 BG 的一半，即 GK 和 DH 相等. 而由 D、K 分别是 BC、BG 的中点，所以应用三角形的中位线的性质可得 $DK/\!/CG$，再由 $CF\perp AB$，可得 $DK\perp AB$，而已知 $AD\perp BC$，所以 $\angle KDE=\angle ABD$，而由 $\angle EKD=\angle EBD+\angle KDB=\angle EBD+\angle BAD=\angle EBD+\angle EBA=\angle ABD$，就可得 $\angle KDE=\angle EKD$，$EK=ED$，而 $GH/\!/KD$，所以 $GK=DH$ 可以证明.

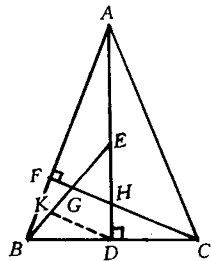


图 6 · 255

本题在根据线段之间的倍半关系的定义来进行分析时，也可以作半线段的 2 倍，也就是延长 HD 到 K，使 $DK=HD$ 后，证明

$HK=BG$. 而由条件中给出 $AB=AC$, $AD\perp BC$, 可得 $BD=CD$. 于是又出现了两组相等线段在一组对顶角的两边, 且成一直线, 所以可应用中心对称型全等三角形进行证明. 从而可证明 $\triangle CHD\cong\triangle BKD$, $\angle DCH=\angle DBK$, $BK/\!/HC$, $KB\perp AB$, 从而进一步可证明 $\angle EKB=\angle ABD$, $\angle EBK=\angle EBD+\angle DBK=\angle EBD+\angle BAK=\angle EBD+\angle ABE=\angle ABD$, 从而也可完成分析.

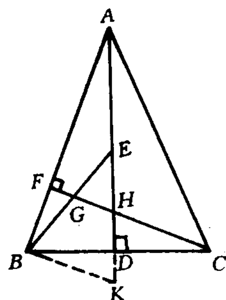


图 6・256

例 25 已知: $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D 是 BC 的延长线上的一点, 且 $DC=BC$, E 是 AB 的延长线上的一点, 且 $BE=2BA$. 求证: $DE=2AD$.

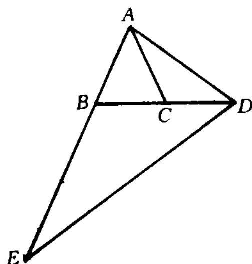


图 6・257

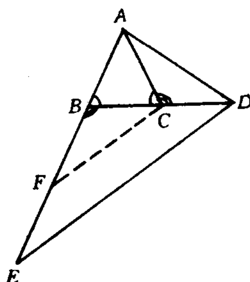


图 6・258

分析: 本题要证明的结论是两条线段之间的倍半关系, 且条件中还给出 C 是 BD 的中点, 所以就可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 于是首先可考虑将倍线段 DE 取作三角形的边, 由于 DE 可以看作是 $\triangle BDE$ 的一条边, 所以就应添加与 DE 平行的一条中位线, 于是取 BE 的中点 F, 并连结 CF, 就可得 $DE=2CF$, 问题就转化成要证 $AD=CF$. 由于这两条线段分别是

$\triangle ACD$ 和 $\triangle FBC$ 的边，且我们有 $CD=BC, AC=AB=\frac{1}{2}BE=FB$，所以这两个三角形必定全等. 但要证这两个三角形全等，$AD=CF$ 这个性质是结论，不能用，而另两个条件都是边相等，所以第三个条件只能是证明它们的夹角相等，也就是要证 $\angle ACD=\angle FBC$，由条件 $AB=AC$，$\angle ABC=\angle ACB$，所以 $\angle ACD$ 和 $\angle FBC$ 这两个角相等就可以证明.

本题在应用三角形中位线的基本图形进行分析时，也可以将半线段 AD 取作三角形的中位线，那就应使 A 和 D 都成为中点，于是延长 CA 到 G，使 $AG=AC$，延长 CD 到 F，使 $FD=CD$，并连结 FG，就可得 $GF=2AD$，问题就成为应证 $DE=FG$. 由于 $FC=2CD=DB, CG=2AC=2AB=BE$，且可证明 $\angle FCG=\angle DBE$，所以就有 $\triangle DEB \cong \triangle FCG$，从而就可以完成分析.

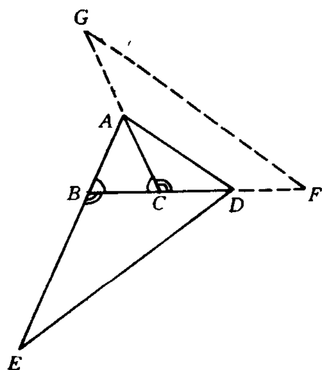


图 6・259

本题要证明 $DE=2AD$，而这两条线段可以分别看成是 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDA$ 的边. 现在在这两个三角形中，已经有 $BE=2AB=2CA, BD=2CD$，且可以证明它们的夹角 $\angle DBE$ 和 $\angle DCA$ 相等，所以这两个三角形相似，从而也就可以证明 $DE=2AD$.

本题要证明的结论 $DE=2AD$，是两条线段之间的倍半关系，所以也可以根据线段之间倍半关系的定义，取 DE 的中点 F 后，证明 DF 和 DA 相等. 由已知 C 是 BD 的中点，就出现了两个中点，是多个中点问题，就可以应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 F、C 所在的线段有公共端点 D，可以组成三角形，

所以 F、C 这两个中点的连线就是三角形的中位线，现在是有三角形而没有中位线，所以应将中位线添上，就可得连结 CF，$BE=2CF$，从而又可推得 $CF=CA$，而 $\angle DCF=\angle DBE=\angle ACD$，且 CD 是公共边，所以 $\triangle ACD$ 和 $\triangle FCD$ 是一对轴对称型全等三角形，所以分析可以完成.

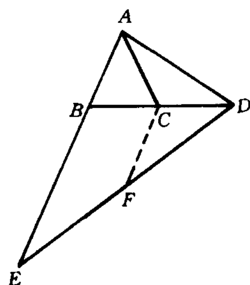


图 6・260

本题在根据线段之间倍半关系的定义进行分析时，也可以作出半线段 AD 的两倍，也就是延长 DA 到 F 使 $AF=AD$ 后，证明 DF 与 DE 相等. 但由 $DA=AF$，$DC=CB$，可得 $BF=2CA$，$BF=BE$，且由 $BF\parallel CA$，可证明 $\angle FBD=\angle ACD=\angle EBD$，从而也就可证明 $\triangle DFB\cong\triangle DEB$，所以分析可以完成.

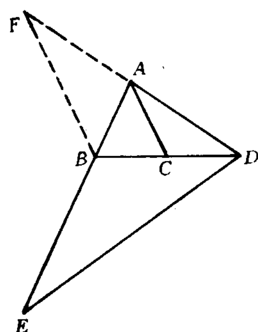


图 6・261

本题条件中出现了 C 是 BD 的中点，且条件和结论中都出现了两条线段之间的倍半关系，所以也可以应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于现在条件中只出现了一个中点，所以还应增加中点，且应增加与 C 所在的线段 BD 有公共端点的线段的中点，于是取 AB 的中点 F，那末连结 CF 后，CF 就是 $\triangle ABD$ 的中位线，所以 $CF\parallel DA$，$CF=\frac{1}{2}DA$. 这样问题就成为要证 $DE=4CF$. 这个关系本质上仍是两条线段之间的倍半关系，所以仍然可根据线段倍半关系的定义，作出 CF 的 2 倍，也就是延长 CF 到 G 使 $FG=CF$ 后，证明 $ED=2GC$. 但我们又可证明 $\triangle ACF\cong\triangle BGF$，$BG=CA$，$BG\parallel CA$，所以可证明 $BE=2BG$，$BD=2BC$ 和

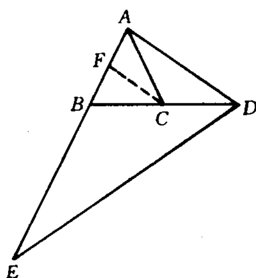


图 6・262

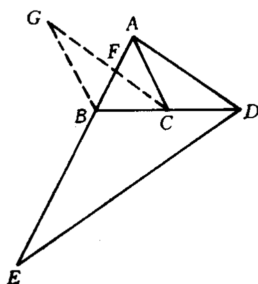


图 6・263

$\angle EBD=\angle ACD=\angle GBC$，$\triangle EDB\backsim\triangle GCB$，从而也可完成分析.

在上述分析中，我们实际上是在$\triangle ABD$中作出与边AD平行的一条中位线，由于AD也可以看作是$\triangle ADC$的一条边，所以我们也可以添加$\triangle ADC$中与AD平行的中位线来进行分析. 于是作CD、CA的中点F、G，并连结FG，就可得$FG/\!/DA$，$FG=\frac{1}{2}AD$，所以问题也可转化为要证$DE=4FG$. 而由$BE=2AC=4CG$，$BD=2CD=4CF$和$\angle EBD=\angle GCF$，可证明$\triangle BED\backsim\triangle CGF$，所以分析也可以完成.

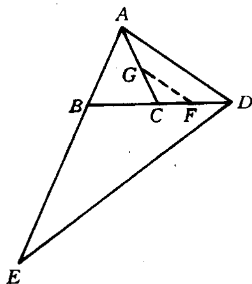


图 6・264

本题条件中给出了$BE=2AB$，也就是$\frac{BE}{BA}=2$，这是两条线段的比，所以可经过描图后发现这一组相比线段重叠在一直线上，从而也就可以添加平行线型相似三角形进行证明. 如取过端点的线段AC为平行方向线段，则平行线可过另一个端点E作，也就是过E作$EF/\!/CA$交DB的延长线于F，就可得$\triangle ACB\backsim\triangle EFB$，$\frac{CB}{FB}=\frac{AB}{EB}=\frac{1}{2}$，$\angle EFB=\angle ACB=\angle ABC$. 从而又可得$FB=DB$，$\frac{FD}{BD}$

$=2$，$\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{EB}{AB}=2$，所以又有$\triangle EDF \backsim \triangle ADB$，也可完成分析.

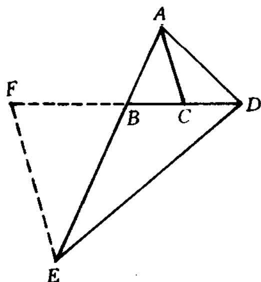


图 6・265

例 26 已知：四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$AC \perp BD$，$OE \perp AB$，垂足是 E. 求证：$OE=\dfrac{1}{2}CD$.

分析：本题要证明的结论是两条线段之间的倍半关系，且由条件 $OE \perp AB$ 可得 E 是 AB 的中点，这一倍半关系是与线段的中点发生联系的，所以可以应用三角形中位线的基本图形进行证明. 于是首先可考虑将半线段 OE 取作三角形的中位线，那就应使 OE 的两个端点都成为线段的中点. 由于 E 已是 AB 的中点，所以就应使 O 也成为中点，由于 O 是圆心，所以 O 必定是直径的中点，所以就应添加直径，且应添加与 E 所在的线段 AB 有公共端点的直径，即作直径 AF，那末 OE 就应是$\triangle ABF$ 的中位线. 但现在图形中是有中位线，而三角形不完整，所以应将三角形的边添上，也就是连接 BF，得 $OE=\dfrac{1}{2}BF$，$OE \parallel FB$，这样问题就转化为要证明 $BF=CD$. 又因为在作出了$\odot O$ 的直径 AF 后，由于 C 是半圆上的点，所以就可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明，于是连结 CF，就可得$\angle ACF=90°$，于是 $BD \parallel FC$，从而 $\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{CD}$，$BF=CD$ 就可以证明.

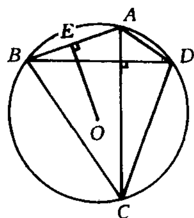


图 6・266

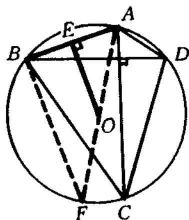


图 6・267

本题的分析在添加直径时，也可以添加过 B 的直径 BF，那末

OE 就应是$\triangle ABF$ 的中位线，于是连结 AF，可得 $AF=2OE$，问题就应证 $AF=CD$. 而由 BF 是$\odot O$ 的直径，D 是半圆上的一点，连结 DF 后可得 $FD\perp BD$，$FD\parallel CA$，所以$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CF}$，$\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{CD}$，所以 $AF=CD$ 就可证明.

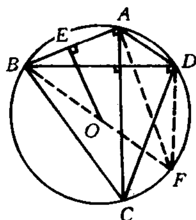


图 6・268

本题的分析也可以将倍线段取作三角形的边，从而添中位线. 由于 CD 可以看作是$\triangle ACD$ 的一条边，所以应添与 CD 平行的中位线，于是取 AD、AC 的中点 F、G，并连结 FG，可得 $FG\parallel DC$，$CD=2GF$. 从而问题就应证 $OE=GF$. 由条件 $OE\perp AB$，可得 E 是 AB 的中点，而 F 是 AD 的中点，又是多个中点问题，所以连结 EF，可得 $EF\parallel BD$，$EF\perp AC$. 而由 G 是弦 AC 的中点，就要应用弦的中点的性质，所以连结 OG 后，有 $OG\perp AC$，所以 $EF\parallel OG$，这样问题就成为要证四边形 $OGFE$ 是等腰梯形，也就是要证$\angle OEF=\angle GFE$. 而$\angle OEF+\angle AEF=90°$，$\angle AEF=\angle ABD=\angle ACD=\angle AGF$，$\angle AGF+\angle GFE=90°$，所以分析可以完成.

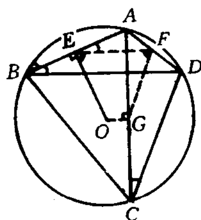


图 6・269

由于 CD 也可以看作是$\triangle BCD$ 的一条边，所以也可以在$\triangle BCD$ 内添加与 CD 平行的中位线，于是取 BC、BD 的中点 F、G，并连结 FG，就可得 $FG\parallel CD$，$CD=2FG$，问题就应证 $OE=FG$. 由 $OE\perp AB$ 可得 $AE=BE$，且 E、G 这两个中点所在的线段有公共端点 B，所以又可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明，于是连结 GE，可得 $EG\parallel AD$，$EG=\frac{1}{2}AD$. 又因为 F 是弦 BC 的中点，所以应用弦的中点的性质可得连结 OF 后有 $OF\perp BC$. 同样地，由 G 是弦 BD 的中点，连结 OG 后，有 $OG\perp BD$. 这样如要证

的结论 $OE=\frac{1}{2}CD$ 成立，则根据同一个命题，必然有 $OF=\frac{1}{2}AD$ 同时成立，所以 OF 应和 EG 相等，从而就可以应用轴对称型全等三角形进行证明，也就是要证 $\triangle OEG \cong \triangle GFO$. 在这两个三角形中，已经出现 $OG=GO$ 是公共边，而另外两条边对应相等都是要证的结论，不能用，所以必须要另外证两个角对应相等. 由 $OF\perp BC$，$OE\perp BA$，可得 $\angle OEG+\angle AEG=90°$，$\angle GFO+\angle BFG=90°$，所以应证 $\angle OEG=\angle GFO$，就可转化为证 $\angle AEG=\angle BFG$. 而 $\angle BFG=\angle BCD$，$\angle BCD$ 是圆周角，且 A、B、C、D 四点共圆，所以延长 DA 到 H 后，有 $\angle BCD=\angle HAB$，但 $\angle HAB=\angle AEG$，所以 $\angle OEG=\angle GFO$ 首先可以证明. 又因 O、G、B、F 四点共圆，$\angle GOF+\angle FBG=180°$，而 $\angle FBG=\angle CAD$，$\angle CAD+\angle CAH=180°$，$\angle OGE=\angle CAH$，又可证明 $\angle OGE=\angle GOF$，所以分析可以完成.

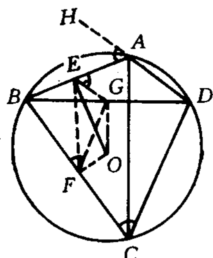


图 6・270

本题要证的结论 $OE=\frac{1}{2}CD$ 是两条线段之间的倍半关系，且由 $AC\perp BD$，如设垂足是 M 可得 CD 是直角 $\triangle CDM$ 的斜边，所以

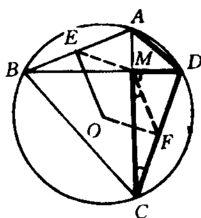


图 6・271

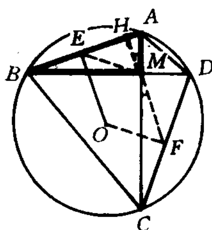


图 6・272

可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明. 于

是将斜边上的中线添上，即取 CD 的中点 F，连结 MF，就可得 $MF=\frac{1}{2}CD$，于是问题就成为应证 $OE=MF$. 由于 F 又可以看作是弦 CD 的中点，所以连结 OF 后又有 $OF\perp CD$，而 E 也可以看作是 $Rt\triangle ABM$ 的斜边的中点，所以连结 ME 后，也有 $ME=\frac{1}{2}AB$，那么根据同一个命题，假如 $OE=MF$ 成立，则 $OF=ME$ 必定同时成立，从而可得四边形 $OEMF$ 应是一个平行四边形. 由于在这个四边形中，两组对边相等都是要证明的结论，不能用，所以问题就成为应证这两组对边平行，也就是要证 $OE\parallel FM$，但由条件 $OE\perp AB$，可知只要证 $FM\perp AB$. 于是根据垂线的定义，延长 FM 交 AB 于 H，应证 $MH\perp AB$. 但已知 $\angle AMB=90°$，所以应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，可得问题应转而证明 $\angle AMH=\angle ABM$. 而由 $\angle AMH=\angle FMC$，$\angle FMC=\angle FCM$，$\angle FCM=\angle ABM$，就可以证明上述性质.

本题要证明的结论 $OE=\frac{1}{2}CD$ 是线段之间的倍半关系，所以可根据线段倍半关系的定义，将倍线段两等分，也就是取 CD 的中点 F 后，证明 CD 的一半 DF 或 CF 和 OE 相等. 由于 F 是弦 CD 的中点，故连结 OF 后可得 $OF\perp CD$，这样 OE、OF 就成为圆心 O 到四边形一组对边的距离，因此，根据同一个命题，如果 $OE=\frac{1}{2}CD=DF$ 成立，那么 $OF=\frac{1}{2}AB=AE$ 必定同时成立，而 $\angle OEA=\angle DFO=90°$，所以它们两两组成全等三角形. 于是连结 OA、OD 后，就可证明 $\triangle OAE\cong\triangle DOF$. 由条件 $OA=OD$，而另两组边对应相等都是要证明的结论，不能用，所以必须再要证角对应相等的条件. 由 $\angle OEA=\angle DFO=90°$，从而应再证一组角对应相等，即要证 $\angle AOE=\angle ODF$ 或 $\angle OAE=$

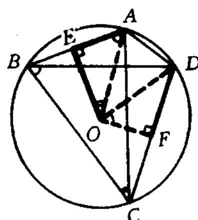


图 6・273

$\angle DOF$. 由于 $OE \perp AB$，$\angle AOE + \angle OAE = 90°$，所以应证$\angle AOE + \angle DOF$ 也等于 90°，而由 $OE \perp AB$，可得$\angle AOE$ 的度数等于$\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{AB}$的度数，所以$\angle AOE = \angle ACB$. 根据同样的道理又可证$\angle DOF = \angle DBC$，而由 $AC \perp BD$，可得$\angle ACB + \angle DBC = 90°$，所以$\angle AOE + \angle DOF = 90°$可以证明，分析完成.

本题在根据线段的倍半关系的定义进行分析时，也可以将半线段 OE 的两倍作出，也就是延长 OE 到 F，使 $FE = OE$，那就要证 $OF = CD$. 但因 $BA \perp OE$，BA 就是 OF 的垂直平分线，所以应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质，连结 OB、BF 后，可得 $BF = BO$，OF 就成为以半径为腰的等腰三角形的底边. 而 CD 是$\odot O$ 的弦，所以它也是以半径为腰的等腰三角形的底边，于是连结 OC、CD，就可得$\triangle BOF$ 和$\triangle OCD$ 必定全等. 现在在这两个三角形中，已经出现两条腰对应相等，所以还要证明一组角对应相等. 由条件 $OE \perp AB$，可证明$\angle BOF = \angle BCA$，从而应证$\angle OCD$ 也等于$\angle BCA$. 由$\angle BCA + \angle DBC = 90°$，而$\angle OCD + \frac{1}{2}\angle COD = 90°$，且$\angle DBC = \frac{1}{2}\angle COD$，所以分析可以完成.

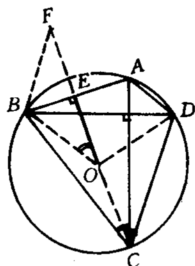


图 6・274

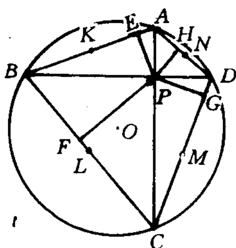


图 6・275

例 27 已知：四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，$AC \perp BD$ 交点是 P，过 P 分别向四边作垂线，垂足为 E、F、G、H，四边的中点分别为 K、L、M、N. 求证：E、F、G、H、K、L、M、N 共圆.

分析：由条件 K、L、M、N 分别为四边形四边的中点，是多个

中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明，由于 K、N 所在的线段 AB、AD 有公共端点 A，可以组成三角形，所以 KN 就是 $\triangle ABD$ 的中位线，而现在图形中是有三角形而没

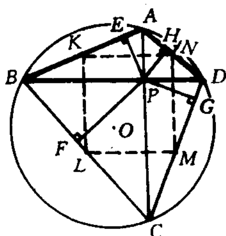


图 6・276

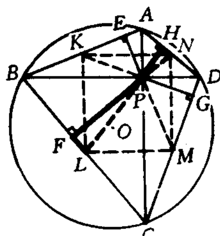


图 6・277

有中位线，所以应将中位线添上，也就是连结 KN，即得 $KN /\!/ BD, KN=\frac{1}{2}BD$. 根据同样的道理，连结 KL、LM、MN 后，可得 $LM /\!/ BD, LM=\frac{1}{2}BD$，所以 $KN \underline{\parallel} LM$，同时也有 $KL \underline{\parallel} NM$，而已知 $AC \perp BD$，所以四边形 $KLMN$ 是矩形，从而 K、L、M、N 四点共圆，且 LN、KM 是这个圆的直径. 又因为 $PH \perp AD$，L 是 BC 的中点，所以 L、P、H 就可证明在一直线上，同理可证 F、P、N 也在一直线上，于是由 $\angle LHN = \angle LFN = 90°$，可得 F、H 在以 LN 为直径的圆上，同理可证 E、G 在以 KM 为直径的圆上，所以结论是可以证明的。

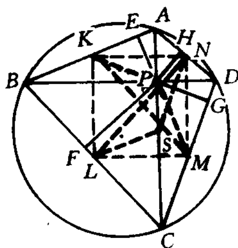


图 6・278

由本题的条件 K、L、M、N 分别是四边形四边的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 这时对任一组对边来讲，中点所在的线段没有公共的端点，不能组成三角形，从而要增加中点，且要增加与已知中点所在的线段有公共端点的线段的中点，于是取对角线 AC 的中点 S，并连结

SL、SN，就可得 $SL=\frac{1}{2}AB$、$SL /\!/ AB$ 和 $SN=\frac{1}{2}CD$、$SN /\!/ CD$. 由于 $PK=\frac{1}{2}AB$，$PM=\frac{1}{2}CD$，所以 $PK=SL$，$PM=SN$，且由 $PK \perp CD$、$PM \perp AB$，也可得 $SL \perp PM$，$SN \perp PK$，$\angle LSN=\angle KPM$，从而可得$\triangle KPM \cong \triangle LSN$，$KM=LN$，这样也可证明平行四边形 $KLMN$ 是矩形，从而进一步完成分析.

例 28 已知：$\triangle ABC$ 中，D 是 AC 的中点，E、F 是 BC 的三等分点，AE、AF 交 BD 于 G、H. 求证：$DH:HG:GB=2:3:5$.

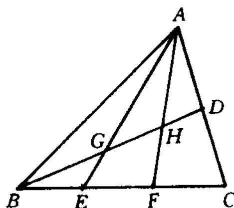


图 6・279

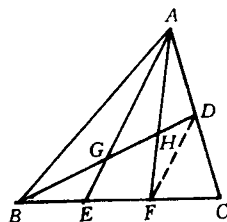


图 6・280

分析：本题条件中给出 D 是 AC 的中点，F 是 CE 的中点，E 是 BF 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 D、F 这两个中点所在的线段 AC、EC 具有公共端点 C，可以组成三角形，所以 DF 这两个中点的连线就是三角形的中位线. 现在图形中是有三角形而没有中位线，所以应将中位线添上，也就是连结 DF，就可得 $DF /\!/ AE$，$DF=\frac{1}{2}AE$. 由于 E 也是 BF 的中点，所以由 $EG /\!/ FD$，又可得 $BG=DG$，$EG=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{4}EA$，$EG=\frac{1}{3}AG$，就可得$\frac{DF}{AG}=\frac{2EG}{3EG}=\frac{2}{3}$. 而由 $AG /\!/ DF$，又可得$\triangle AGH \backsim \triangle FDH$，$\frac{DH}{GH}=\frac{DF}{GA}=\frac{2}{3}$，$\frac{DH}{DG}=\frac{2}{5}$，而 $DG=BG$，分析完成.

本题要证的结论是线段之间的比例关系，经过描图可以发现 DH 和 HG 这一组相比线段重叠在一直线上，且过端点 G、D 和内分点 H 的三直线共点于 A，所以可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明，添加的方法是作同与共点三直线相交的 DG 的平行线. 于是过 C 作 $CK // DG$ 分别交 AF、AE 的延长线于 M、K，得 $\frac{DH}{HG}=\frac{CM}{MK}$. 但由 $AD=CD$，应用三角形中位线的基本图形的性质可得 $AH=MH$，$CM=2DH$，$AG=KG$，$CK=2DG$. 由 $BG // KC$，又可得 $\triangle BGE \backsim \triangle CKE$，$\frac{BG}{CK}=\frac{BE}{CE}=\frac{1}{2}$，$CK=2BG$. 又因为 $BH // MC$，又可证明 $\triangle BHF \backsim \triangle CMF$，$\frac{BH}{CM}=\frac{BF}{CF}=2$，所以 $BH=4DH$，而 $BG=DG$，分析完成.

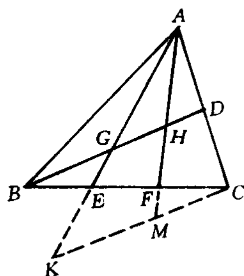


图 6・281

本题在添加平行线型相似三角形的组合图形时，平行线也可以过 F 点作，也就是过 F 作 $MK // DG$ 交 AC 于 M，交 AE 的延长线于 K. 即可得 $\frac{DH}{GH}=\frac{MF}{KF}$. 而由 $FM // BD$，可得 $\triangle CFM \backsim \triangle CBD$，$\frac{FM}{BD}=\frac{CF}{CB}=\frac{1}{3}$，$\frac{CM}{CD}=\frac{1}{3}$，而 $AD=CD$，所以 $\frac{AD}{AM}=\frac{3}{5}$. 由 $HD // FM$，得 $\frac{DH}{MF}=\frac{AD}{AM}=\frac{3}{5}$. 所以 $\frac{DH}{DB}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$. 又因为 $BE=FE$，$BG // KF$，$\triangle BGE$ 和 $\triangle FKE$ 是一对中心对称型全等三角形，所以 $BG=KF$，所以 $\frac{HG}{BG}=\frac{HG}{KF}=\frac{DH}{FM}=\frac{3}{5}$. 那么再由

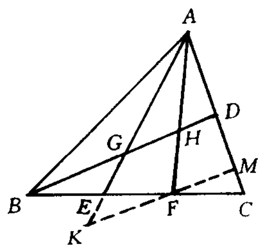


图 6・282

$BG+GH=BG+\frac{3}{5}BG=4DH$，就可得$\frac{DH}{BG}=\frac{2}{5}$，分析完成.

本题在添加平行线型相似三角形的组合图形进行分析时，平行线也可过 E 点作，也就是过 E 作 $EM\parallel BD$，交 AF、AC 于 K、M，就可得$\triangle CEM\backsim\triangle CBD$，$\frac{CD}{CM}=\frac{CB}{CE}=\frac{3}{2}$，而 $AD=CD$，所以$\frac{AD}{AM}=\frac{3}{4}$. 而 $GD\parallel EM$，可得$\triangle AGD\backsim\triangle AEM$，所以$\frac{GD}{EM}=\frac{GH}{EK}=\frac{3}{4}$，而$\frac{EM}{BD}=\frac{2}{3}$，所以$\frac{GD}{BD}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$. 又因 E 是 BF 的中点，$EK\parallel BH$，所以 $FK=HK$，$\frac{EK}{BH}=\frac{1}{2}$，所以 $BH=2EK=2\cdot\frac{4}{3}GH$，$BG=\frac{5}{3}GH$，也就可以完成分析.

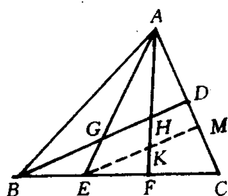


图 6・283

例 29 已知：四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，E 是 BD 的中点，过 E 作 $FG\parallel AC$ 交 AB、CB 于 F、G. 求证：$\frac{FE}{AC}=\frac{AD}{2BC}$.

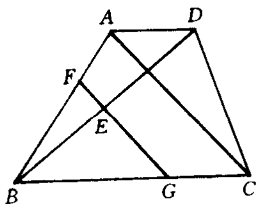


图 6・284

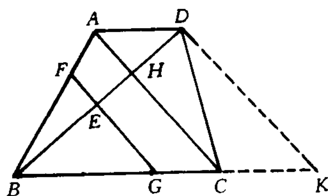


图 6・285

分析：本题要证明的结论是线段之间的比例关系，经过描图可以发现 AD 和 BC 是一组平行线段，且它们四个端点两两的连线相交，可设交点为 H，所以可应用平行线型相似三角形进行证明，也就可得$\triangle ADH\backsim\triangle CBH$，$\frac{AD}{CB}=\frac{AH}{CH}$，这样问题就成为要证$\frac{FE}{AC}$

$=\frac{AH}{2CH}$. 由条件 $FG /\!/ AC$，所以对上述比例关系进行描图，就可发现 AH 和 CH 这一组相比线段现在重叠在一组平行线段上，所以可应用平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 由于过端点 A、C 和内分点 H 的三直线共点于 B，所以有 $\frac{FE}{GE}=\frac{AH}{CH}$，于是就要证 $\frac{FE}{AC}=\frac{FE}{2GE}$，$AC=2GE$. 这样就出现了两条线段之间的倍半关系，且又给出 E 是 BD 的中点，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明，于是可取半线段 EG 为三角形的中位线，那就应添三角形的边，也就是过 D 作 $DK /\!/ EG$ 交 BC 的延长线于 K，就可得 $BG=KG$，$DK=2GE$，接下来的问题就应证 $DK=AC$，但 $AD /\!/ CK$，$AC /\!/ DK$，分析完成.

本题的分析在转化为要证 $AC=2GE$，并可应用三角形中位线的基本图形进行证明时，也可取过端点 D 的线段 DC 为三角形的边，那就可以添加与 DC 平行的三角形的中位线，于是过 E 作 $EK /\!/ DC$ 交 BC 于 K，就可得 $BK=CK$，$CD=2EK$. 但由 $EG /\!/ AC$，$EK /\!/ DC$ 和 $AD /\!/ BC$，可分别推得 $\angle KEG=\angle DCA$，$\angle KGE=\angle DAC$，所以 $\triangle KEG \backsim \triangle DCA$，从而就可证明 $\frac{AC}{GE}=\frac{DC}{KE}=2$，分析完成.

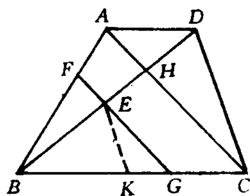


图 6・286

本题在根据要证 $AC=2GE$ 是线段之间的倍半关系进行分析时，也可取倍线段 AC 为三角形的边，从而可添加与 AC 平行的三角形的中位线，由于 AC 可看作是 $\triangle BAC$ 的一条边，所以取 BA、BC 的中点 H、K，并连结 HK，就可得 $HK /\!/ AC /\!/ FG$，$AC=2HK$，问

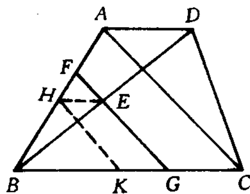


图 6・287

题就成为要证 $HK=EG$. 由于 H、E 是 BA、BD 的中点，且 BA、BD 有公共端点 B，可以组成$\triangle BAD$，所以连结 HE，可得 $HE /\!/ AD /\!/ BC$，四边形 $HKGE$ 是平行四边形，分析完成.

本题在转化为要证 $AC=2GE$ 后，由条件 $BE=DE$，且 BD、FG 相交于 E，可得 BE 和 DE 这一组相等线段位于一组对顶角$\angle BEG$ 和$\angle DEF$ 的两边且成一直线，所以可添加中心对称型全等三角形进行证明. 由于过端点 B、D 已出现了一组平行线，所以延长 DA 交 GF 的延长线于 H，可得$\triangle BEG \cong \triangle DEH$，$HE=GE$，$HG=2GE$，而 HG 和 AC 是$\square HGCA$ 的一组对边，当然相等，所以分析完成.

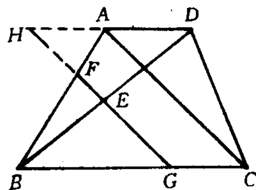


图 6・288

例 30　已知：$\triangle ABC$ 中，M、N 分别是 AB、AC 的中点，P 是 MN 上的任一点，BP、CP 的延长线交 AC、AB 于 D、E. 求证：$\dfrac{AD}{CD}+\dfrac{AE}{BE}=1$.

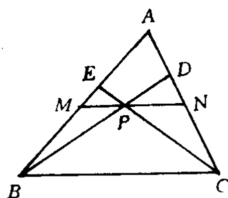


图 6・289

分析：本题要证的结论是线段之间的比例关系，经过描图可以发现，相比两线段 AD 和 CD 重叠在一直线上，且过端点 A、C 和内分点 D 的三线共点于 B，所以可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 添加的方法是作与共点三直线都相交的 AC 的平行线. 由于条件中给出 M 是 AB 的中点，所以平行线可首先考虑过 M 点作，也就是过 M 作 $MK /\!/ AC$ 交 BD、BC 于 F、K，那末$\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{MF}{KF}$，且可应用三角形中位线的基本图形的性质得 K 是 BC 的中点. 又因为 M、N 分别

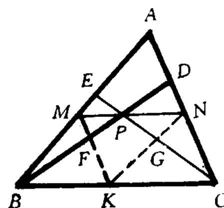


图 6・290

是 AB、AC 的中点，所以 $MN \parallel BC$，$MN=\frac{1}{2}BC$，从而又可得 $\triangle PMF \backsim \triangle BKF$，$\frac{MF}{KF}=\frac{MP}{BK}=\frac{MP}{MN}$. 再由 K、N 分别是 BC、AC 的中点，且 BC、AC 有公共端点 C，可以组成三角形，所以再应用三角形中位线的基本图形的性质，连结 NK 交 CE 于 G 后，可得 $NK \parallel AB$. 从而又可应用平行线型相似三角形的组合图形的性质得 $\frac{AE}{BE}=\frac{NG}{KG}$. 那末再由 $\triangle PNG \backsim \triangle CKG$，$\frac{NG}{KG}=\frac{PN}{CK}=\frac{PN}{MN}$，从而就可以证明结论.

本题的分析在过 M 作 $MF \parallel AC$ 交 BD 于 F 后，就可应用三角形中位线的基本图形的性质得 $BF=DF$，$MF=\frac{1}{2}AD$. 而在作了 $MF \parallel AC$ 后，又可得 $\triangle MPF \backsim \triangle NPD$，$\frac{MF}{ND}=\frac{PM}{PN}$，$\frac{MF}{ND+MF}=\frac{PM}{PM+PN}=\frac{PM}{MN}$.

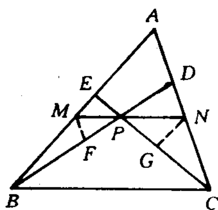


图 6・291

而 $\frac{MF}{ND+MF}=\frac{\frac{1}{2}AD}{ND+\frac{1}{2}AD}=\frac{AD}{2ND+AD}$，

由 N 是 AC 的中点，可得 $2ND+AD=CD$，所以 $\frac{AD}{CD}=\frac{PM}{MN}$. 根据同样的道理，过 N 作 $NG \parallel AB$ 交 CE 于 G 后，也可证明 $\frac{AE}{BE}=\frac{PN}{MN}$，从而完成分析.

本题在添加平行线型相似三角形的组合图形时，平行线也可过条件中给出的 P 点作，也就是过 P 作 $FG \parallel AC$ 交 AB、BC 于 F、G，那末 $\frac{AD}{CD}=\frac{PF}{PG}$. 又因为 M、N 分别是 AB、AC 的中点，是多个中点问题，所以应用三角形的中位线的基本图形的性质，可得 $MN \parallel BC$，这样 MP 就成为 $\triangle FBG$ 内一条边 BG 的平行线段，所以

$\triangle FMP \backsim \triangle FBG$, $\frac{PF}{PG}=\frac{MF}{MB}$. 用同样的方法，过 P 作 $HK /\!/ AB$ 交 AC、BC 于 H、K 后，又可得 $\frac{AE}{BE}=\frac{PH}{PK}$. 但四边形 $AFPH$、$MPKB$ 都是平行四边形，所以 $PH=AF$，$PK=MB$，则 $\frac{PH}{PK}=\frac{AF}{MB}$. 从而就可证 $\frac{AD}{CD}+\frac{AE}{BE}=\frac{MF}{MB}+\frac{AF}{MB}=1$.

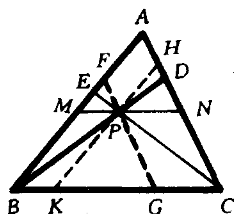


图 6・292

本题在添加平行线型相似三角形的组合图形时，平行线也可以过 E 点作，也就是过 E 作 $EG /\!/ AC$，分别交 MN、BD、BC 于 H、F、G，就可得 $\frac{AD}{CD}=\frac{EF}{GF}$. 而由 $EF /\!/ DC$，又可得 $\triangle EPF \backsim \triangle CPD$，$\triangle EPH \backsim \triangle CPN$，$\frac{EF}{CD}=\frac{PH}{PN}$ 和 $\triangle BFG \backsim \triangle BDC$，$\frac{CD}{GF}=\frac{BC}{BG}$. 而由 M、N 是 AB、AC 的中点，应用三角形中位线的基本图形的性质可得 $MN /\!/ BC$，而共点于 E 的三直线又与这一组平行线相交，所以应用平行线型相似三角形的组合图形的性质又可得 $\frac{BC}{BG}=\frac{MP}{MH}$，这样就可得 $\frac{EF}{CD}\cdot\frac{CD}{GF}=\frac{EF}{GF}=\frac{PH}{PN}\cdot\frac{MP}{MH}=\frac{AD}{CD}$. 而由 $EG /\!/ AC$，又可得 $\frac{AE}{BE}=\frac{CG}{BG}$，而 $\frac{CG}{BG}=\frac{PH}{MH}$，从而问题就成为要证 $\frac{PH}{PN}\cdot\frac{MP}{MH}+\frac{PH}{MH}=1$，$\frac{PH}{MH}\left(\frac{MP}{PN}+1\right)=\frac{PH}{MH}\cdot\frac{MN}{PN}=1$. 而 $\frac{PH}{PN}=\frac{EH}{CN}$，$\frac{MN}{MH}=\frac{AN}{EH}$，且 $CN=AN$，所以分析可以完成.

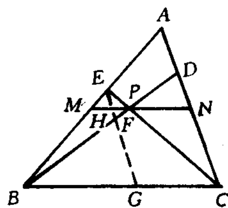


图 6・293

由于本题的结论经描图后可以发现两组相比线段 AD 和 CD、AE 和 BE 分别重叠在一直线上，从而可直接添加平行线型相

似三角形进行证明. 如取过端点 C 的 BC 为平行方向线段, 则由于过 BC 两端的线段在内分点 D 相交, 所以平行线可过另一个端点 A 作, 即过 A 作 $AF // BC$ 交 BD 的延长线于 F, 就可得 $\triangle DBC \backsim \triangle DFA$, $\frac{AD}{CD}=\frac{AF}{BC}$, 根据同样的道理, 过 A 作 $AG // CB$ 交 CE 的延长线于 G 后, 又可得 $\triangle AEG \backsim \triangle BEC$, $\frac{AE}{BE}=\frac{AG}{BC}$. 于是 $\frac{AD}{CD}+\frac{AE}{BE}=\frac{AF+AG}{BC}$. 根据平行公理, 又可得 G、A、F 共线, 于是 $AG+AF=FG$, 从而要证结论, 就只要证明 $FG=BC$. 由于出现了这两条线段平行且相等, 同时它们四个端点两两的连线在 P 点相交, 所以可应用中心对称型全等三角形进行证明, 于是问题就应证 $\triangle BPC$ 和 $\triangle FPG$ 全等. 在这两个三角形中, 已经有了角对应相等的条件, 所以还应证明一组边对应相等, 于是可证明 $BP=FP$, 而已知 $BM=AM$, 且 P、M 所在的线段有公共端点 B, 可组成三角形, 所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明, 于是问题就成为应证 $MP // AF$. 由条件 M、N 分别是 AB、AC 的中点, 所以再一次应用三角形中位线的基本图形的性质可得 $MN // BC$, 而 $BC // GF$, 分析完成.

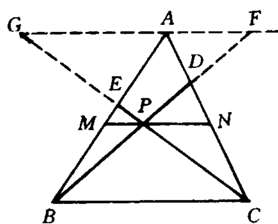


图 6 · 294

例 31 已知: $\triangle ABC$ 中, AD、CF 是中线, G 是重心, 分别延长 AB、BC、CA 到 C'、A'、B', 使 $\frac{CA'}{BC}=\frac{AB'}{CA}=\frac{BC'}{AB}$. 求证: G 是 $\triangle A'B'C'$ 的重心.

分析: 本题的条件中给出了线段之间的比例关系, 经过描图可以发现每一组相比线段都重叠在一直线上, 所以可添加平行线型相似三角形进行证明. 如从 BC' 和 AB 这一组相比线段开始进行分析, 并且取条件中出现的过内分点 B 的线段 BC 为平行方向线段, 则平行线可过端点 C' 作, 也就是过 C' 作 $C'H // BC$ 交 AC 的

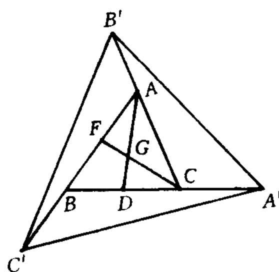


图 6·295

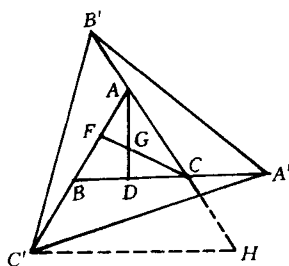


图 6·296

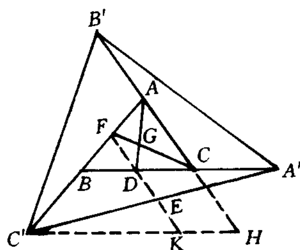


图 6·297

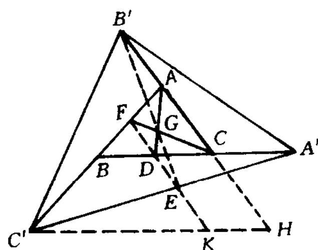


图 6·298

延长线于 H，就可得$\frac{BC'}{AB}=\frac{CH}{AC}$，$\frac{CH}{AC}=\frac{AB'}{CA}$，$CH=AB'$. 且$\triangle ABC \backsim \triangle AC'H$，$\frac{BC}{C'H}=\frac{AC}{AH}=\frac{AC}{CB'}=\frac{CB}{BA'}$，$BA'=C'H$. 由条件 F、D 分别是 AB、CB 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 F、D 所在的线段有公共端点 B，可以组成三角形，而现在图形中是有三角形但没有中位线，所以应将中位线添上，也就是连结 FD，可得 $FD // AC$，$FD=\frac{1}{2}AC$. 由于问题要证 G 是$\triangle A'B'C'$ 的重心，所以问题还要出现 $A'C'$ 的中点，从而就应分析 FD 这两个中点的连线于 $A'C'$ 的中点之间的关系，于是延长 FD 交 $A'C'$、HC' 于 E、K，就可得四边形 $KHCD$

是平行四边形，$KH=DC=BD$，从而又有$C'K=A'D$，这两条线段平行且相等，而且它们四个端点两两的连线在E点相交，所以必定出现一对中心对称型全等三角形，也即可证$\triangle C'KE\cong\triangle A'DE$，$C'E=A'E$，即$E$是$A'C'$的中点．这样问题就成为应证$E$、$G$、$B'$共线，且$\frac{EG}{B'G}=\frac{1}{2}$．于是根据三点成一直线的定义，连结$EG$，$B'G$，并根据条件$A$、$G$、$D$共线，可知应证$\angle DGE=\angle AGB'$，而由$DE$、$B'A$这一组平行线被$AD$所截，可得$\angle EDG=\angle B'AG$，所以$\triangle EDG$和$\triangle B'AG$必定相似是一对平行线型相似三角形，从而就应转而证$\frac{ED}{B'A}=\frac{GD}{GA}$，但$\frac{ED}{B'A}=\frac{ED}{CH}=\frac{ED}{DK}=\frac{1}{2}$，由$G$是$\triangle ABC$的重心，又有$\frac{GD}{GA}=\frac{1}{2}$，所以上述两个性质都可以证明．

本题要证明G是$\triangle A'B'C'$的重心，所以根据三角形重心的定义，取$A'C'$的中点E，连结EG、$B'G$后，应证$\angle DGE=\angle AGB'$和$\frac{EG}{B'G}=\frac{1}{2}$．又因为已知$F$、$D$是$AB$、$CB$的中点，所以应用三角形中位线的基本图形的性质，连结FD后可得$FD\parallel AC$，$FD=\frac{1}{2}AC$．而我们要证E、G、B'成一直线，这样就出现了共点于G的三直线与一组平行线相交，从而可应用平行线型相似三角形的组合图形的性质进行证明，于是应先证F、D、E共线，则连结FE，应证FE和FD重合，同时也应有$\frac{AB'}{CA}=\frac{DE}{FD}$．$\frac{DE}{FD}=\frac{BC'}{AB}=\frac{BC'}{2BF}$，这样就出现了$\frac{1}{2}BC'$，于是根据线段倍半关系的定义，取$BC'$的中点$H$，则$BH=\frac{1}{2}BC'$．而在取了

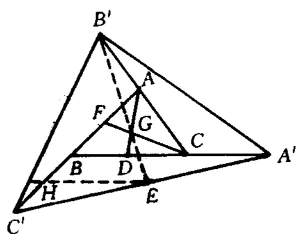


图 6・299

BC' 的中点 H 后，由 E 是 $A'C'$ 的中点，所以又可以应用三角形中位线的基本图形的性质，连结 HE 后，有 $HE /\!/ BA'$. 而现在 FD 和 FE 重合是要证的结论，所以应证明夹 $\angle FBD$ 和 $\angle FHE$ 的两组边对应成比例，也就是 $\frac{FB}{FH}=\frac{BD}{HE}$，由 $\frac{FB}{FH}=\frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}AC'}=\frac{AB}{AC'}=\frac{BC}{BA'}$

$=\frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}BA'}=\frac{BD}{HE}$，所以 $\triangle FBD \backsim \triangle FHE$，$FD$ 和 FE 重合. 于是就可证明 $\frac{DE}{FD}=\frac{BH}{FB}=\frac{BC'}{AB}=\frac{AB'}{CA}$，$\frac{DE}{AB'}=\frac{FD}{CA}=\frac{1}{2}$. 而 $\frac{DG}{AG}=\frac{1}{2}$，且 $\angle EDG=\angle B'AG$，所以 $\triangle EDG \backsim \triangle B'AG$，分析完成.

例 32 已知：四边形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，以 AB、DB 为邻边作 $\square ABDE$，AD 的延长线交 CE 于 F. 求证：$EF=CF$.

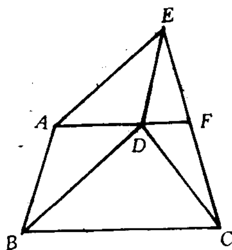


图 6・300

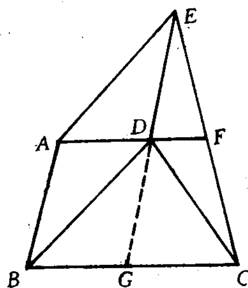


图 6・301

分析：本题要证明 $EF=CF$，而条件给出了 $AF /\!/ BC$，是过线段的端点和中点的一组平行线，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明.

如将过中点 F 的 FD 取作中位线，则 D 也应是一个中点，于是延长 ED 交 BC 于 G，由 $\square ABDE$ 可得 $DE=BA$，而由 $AD /\!/ BG$

和 $AB // DG$，也可得 $DG = AB$，所以 $DE = DG$，那末再由 $DF // GC$，就可推得 $EF = CF$.

如将过中点 F 的 FA 取作中位线，则 A 点就应是一个中点，于是延长 EA 交 CB 的延长线于 G，由 $\square ABDE$ 可得 $AE = BD$，而由 $AD // GB$ 和 $AG // DB$，又可得 $AG = DB$，所以 $AE = AG$，从而再由 $AF // GC$，也就可证明结论.

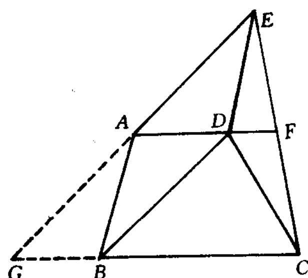


图 6・302

如将过端点的 CB 取作三角形的边，则连结 BE 交 AF 于 G，问题就成为要证 G 是 BE 的中点，但 G 又是平行四边形 $ABDE$ 的对角线的交点，所以上述性质可以证明.

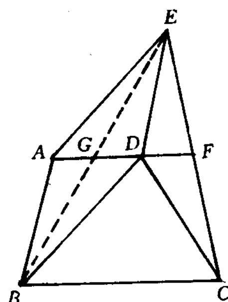


图 6・303

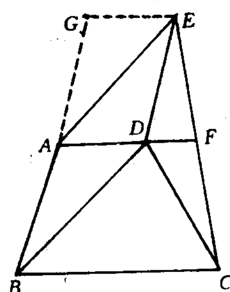


图 6・304

由于本题图形中并没有直接出现三角形的中位线，所以由结论 F 是 CE 的中点和 $FA // CB$，也就可应用梯形中位线的性质进行证明，于是 A 就应成为是另一条腰的中点，于是延长 BA 到 G，使 $AG = AB$，那末连结 EG 后，由 $\square ABDE$ 可得 $AB \underline{\underline{//}} ED$，从而有 $GA \underline{\underline{//}} ED$，四边形 $ADEG$ 也是平行四边形，$GE // AD // BC$，所以结

论也可以证明.

本题条件中给出了四边形 $ABCF$ 是梯形，所以可转化为三角形的问题来进行讨论. 由于要证明的结论中出现的线段 CF 是这

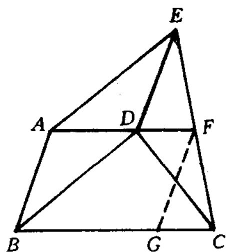


图 6·305

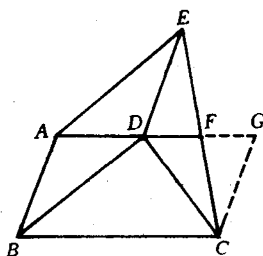


图 6·306

个梯形的一条腰，所以转化的方法是平移腰，于是过 F 作 $FG /\!/ AB$ 交 BC 于 G，就可得 $FG \perp\!\!\!= AB$，而 $AB \perp\!\!\!= ED$，所以 $FG \perp\!\!\!= ED$，$\angle CFG = \angle FED$，$\angle EFD = \angle FCG$，从而可证明$\triangle CFG$ 和$\triangle FED$ 是一对平移型全等三角形，所以分析可以完成.

如将梯形 $ABCF$ 的腰 BA 平移到过 C 点，则过 C 作 $CG /\!/ BA$ 交 AF 的延长线于 G，就可证得 $ED \perp\!\!\!= GC$，于是进一步可证明$\triangle EFD$ 和$\triangle CFG$ 是一对中心对称型全等三角形，所以 $EF = CF$ 也就可以证明.

例 33 已知：四边形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AB = CD$，AC、BD 相交于 O，$\angle BOC = 60°$，E、F、G 分别是 OA、OB、CD 的中点. 求证：$\triangle EFG$ 是等边三角形.

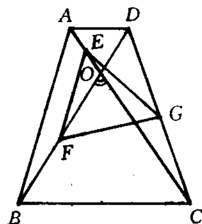


图 6·307

分析：本题条件中给出 E、F、G 分别是 OA、OB、CD 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 E、F 所在的线段有公共端点 O，

所以 EF 就是$\triangle OAB$ 的一条中位线，从而有 $EF /\!/ AB$，$EF=\frac{1}{2}$

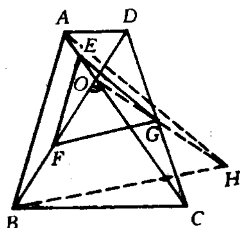


图 6・308

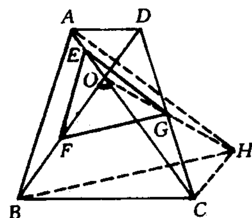


图 6・309

AB. 然而 G 这个中点所在的线段与 F 所在的线段没有公共的端点，所以要使 FG 这两个中点的连线成为三角形的中位线，必须要使 G 成为以 O 为端点的线段的中点，所以连结 OG，并延长 OG 到 H，使 $GH=OG$，那末 FG 就应是$\triangle OBH$ 的中位线，所以连结 BH，可得 $FG /\!/ BH$，$FG=\frac{1}{2}BH$. 根据同样的道理，连结 AH 后可得 $EG /\!/ AH$，$EG=\frac{1}{2}AH$. 从而$\triangle EFG\backsim\triangle ABH$，是一对以 O 为位似中心的位似型相似三角形. 于是问题可转化为要证$\triangle ABH$ 是等边三角形. 由条件四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，且$\angle BOC=60^\circ$，所以$\triangle BOC$ 是等边三角形，从而就出现了两个以 B 为公共顶点的等边三角形，所以必定组成一对旋转型全等三角形. 现在由 B 点发出的两组相等线段是 BO、BC 和 BA、BH，所以它们两两组成的全等三角形应是$\triangle BOA$ 和$\triangle BCH$，于是连结 CH. 现在要先证这两个三角形全等，已经有的条件是 $BO=BC$，所以还需要两个条件. 由已知 $DG=CG$ 和所作的 $OG=HG$，就出现了两组相等线段在一组对顶角的两边且成一直线，所以可应用中心对称型全等三角形进行证明，从而可得$\triangle DGO\cong\triangle CGH$，$OD \perp\!\!\!\!= CH$，而 $OA=OD$，所以 $OA=CH$，$\angle HCO=\angle COB=60^\circ$，$\angle BCH=60^\circ+60^\circ=120^\circ$，而$\angle BOA$ 也等于 120°，所以$\angle BOA=\angle BCH$，$\triangle BOA\cong$

$\triangle BCH$，$BA=BH$，又因为$\angle CBO=60°$，$\angle OBA=\angle CBH$，所以$\angle ABH=60°$也就可以证明，分析即可完成.

本题的分析在考虑 F、G 这两个中点所在的线段没有公共端点，不能组成三角形，因而 FG 这两个中点的连线不是三角形的中位线时，也可以考虑增加中点，可增加与 F 所在的线段有公共端点的线段的中点，于是取 OC 的中点 H. 那末 F、H 所在的线段有公共端点 O，所以连结 FH 后，可得 $FH \parallel BC$，$FH=\frac{1}{2}BC$，根据同样的道理，连结 GH 后，

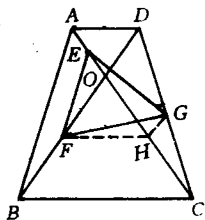


图 6・310

有$GH \parallel DO$，$GH=\frac{1}{2}DO$. 由条件$\triangle OBC$是等边三角形，所以$\triangle OFH$也是等边三角形，而我们要证$\triangle EFG$是等边三角形，这样又出现了两个以 F 为公共顶点的等边三角形，从而又可以得到一对旋转型全等三角形. 根据由公共顶点发出的两组相等线段两两组成全等三角形的办法，可知问题成为应证$\triangle FOE \cong \triangle FHG$，由$FO=FH$，$OE=\frac{1}{2}OA=HG$，$\angle FOE=120°$和$\angle FHG=120°$，就可以完成分析.

例 34 已知：在 $Rt\triangle ABC$ 中，以三边为边向形外作正方形 $ABDE$、$ACFG$、$BCHK$，O_1、O_3、O_2 分别是这三个正方形的中心. 求证：$O_1C \perp O_2O_3$，$O_1C=O_2O_3$.

分析：本题由 O_2、O_3 分别是正方形 $BCHK$、$ACFG$ 的中心，所以$\angle O_2CB=\angle O_3CA=45°$，而$\angle ACB=90°$，所以首先可证明 O_2、C、O_3 共线. 又因为 O_2、O_3 是正方形的中心，所以应用正方形中心的性质，

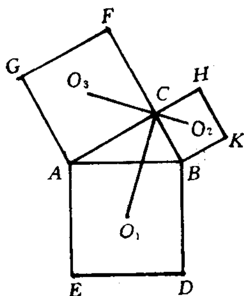


图 6・311

图 6・312

图 6・313

连结 BO_2、AO_3 后，可得 $BO_2=CO_2$，$AO_3=CO_3$，$\angle BO_2C=\angle AO_3C=90°$，$BO_2 /\!/ AO_3$. 这样要证的结论中的 O_2O_3 就等于 $CO_2+CO_3=BO_2+AO_3$. 从而就出现了梯形上、下底的和，所以可应用梯形的中位线的性质来进行证明. 于是取 AB、O_3O_2 的中点 M、N，并连结 MN，就可得 $MN /\!/ AO_3 /\!/ BO_2$，$MN=\frac{1}{2}(AO_3+BO_2)$，$O_2O_3=2MN$，从而问题就成为要证 $O_1C=2MN$. 同时也要证 $MN /\!/ O_1C$. 由于现在出现了两条线段之间的倍半关系，且这两条线段又应平行，所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 这时倍线段就应是三角形的边，半线段就应是三角形的中位线，所以连结 O_1M，并延长 O_1M 交 O_2O_3 于 L，问题就成为应证 $LM=MO_1$，$LN=NC$. 由 M 是 AB 的中点，就出现了 $Rt\triangle ABC$ 的斜边的中点，所以可应用直角三角形斜边上中线的基本图形的性质进行证明. 于是连结 MC，可得 $MC=\frac{1}{2}AB$，而 O_1 是正方形 $ABDE$ 的中心，所以 $O_1M=\frac{1}{2}AB$，$MC=MO_1$. 同时连结 O_1A、O_1B 后可得 $\angle AO_1B=90°$，而 $\angle ACB=90°$，所以 A、O_1、B、C 四点共圆，$\angle BCO_1=\angle BAO_1=45°$，而 $\angle BCO_2=45°$，所以可证明 $\angle O_1CO_2=$

$\angle O_1CO_3=90°$，从而再一次应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质，由 $MC=MO_1$，得 $\angle MCO_1=\angle MO_1C$，$\angle MCL=\angle MLC$，$ML=MC$，所以 $ML=MO_1$，又因为已证 $MN /\!/ O_1C$，所以分析可以完成.

本题的分析在证明了 O_3、C、O_2 共线后，根据 O_1 是正方形 $ABDE$ 的中心，连结 AO_1、BO_1 后可得 $\angle AO_1B=\angle ACB=90°$，$A$、$O_1$、$B$ C 四点共圆，$\angle BCO_1=\angle BAO_1=45°$，从而可先证明 $O_1C\perp O_2O_3$. 然后应证 $O_1C=O_2O_3$，由于 $O_2O_3=O_2C+O_3C$，所以问题就成为要证明一条线段等于两条线段的和，于是可根据线段和的定义，在 O_1C 上截取 $CM=CO_3$，然后证明 $O_1M=O_2C$. 但 O_2 是正方形 $BCHK$ 的中心，所以连结 BO_2 后，有 $O_2C=O_2B$，所以问题又成为要证 $O_1M=BO_2$，但已证 $O_1M /\!/ BO_2$，所以它们可组成一个平行四边形，于是连结 O_2M. 但要证明这个四边形是平行四边形时，$O_1M=BO_2$ 这个性质因是结论不能用，所以只能转而证明另一组对边也平行，也就是要证 $MO_2 /\!/ O_1B$，$\angle O_2MC=\angle BO_1C$. 但已证 A、O_1、B、C 四点共圆，$\angle BO_1C=\angle BAC$，这样问题又成为要证 $\angle O_2MC=\angle BAC$，但 $\angle MCO_2=\angle ACB=90°$，所以 $\triangle MCO_2$ 和 $\triangle ACB$ 是一对旋转型相似三角形，但在证这对三角形相似时，$\angle O_2MC=\angle BAC$ 的性质不能用，所以只能转而证两组边对应成比例，因 $\frac{CO_2}{CB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{CM}{CA}=\frac{CO_3}{CA}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $\frac{CO_2}{CB}=\frac{CM}{CA}$，分析完成.

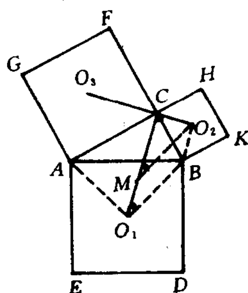


图 6·314

本题首先可证明 O_2、C、O_3 共线，由于 O_2、O_3 分别是正方形的中心，所以也是对角线的中点，因而就出现了多个中点问题，就可

以应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 O_2、O_3 所在的对角线或者是没有公共端点，或者是重叠线段，都不能组成三角形，所以 O_2O_3 这两个中点的连线就不是三角形的中位线，从而就应增加中点，且应增加与已知中点所在的线段有公共端点的线段的中点，于是取 AC 的中点 M，连结 MO_2，AK，CK 后，可得 $MO_2 /\!/ AK$，$MO_2=\frac{1}{2}AK$. 同样地，

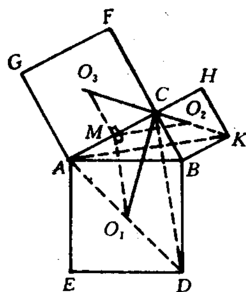


图 6・315

连结 MO_1、CD、AD 后，可得 $MO_1 /\!/ CD$，$MO_1=\frac{1}{2}CD$. 又因为正方形 $ABDE$，$BCHK$ 具有公共顶点 B，所以可得到一对旋转型全等三角形，也就是可证明$\triangle ABK \cong \triangle DBC$，$AK=DC$，从而就可证明 $O_1M \perp O_2M$，$O_1M=O_2M$. 而 $O_3M=CM$，$O_3M \perp CM$，这样又出现了两个具有公共的直角顶点的等腰直角三角形，从而又可应用旋转型全等三角形进行证明. 由 M 点发出的两组相等线段是 MO_3、MC 和 MO_2、MO_1，所以可证明$\triangle MO_2O_3 \cong \triangle MO_1C$，分析完成。

例 35　已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AH \perp BC$，H 是垂足，M 是 AB 的中点，过 A、M、C 三点的$\odot O$ 交 AH 于 K，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R. 求证：$AK=\frac{3}{2}R$.

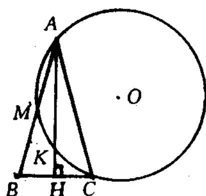


图 6・316

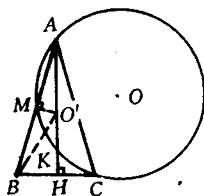


图 6・317

分析:本题条件中出现了$\triangle ABC$的外接圆半径R,所以可先作出这个三角形的外心.由条件$AB=AC$,$AH\perp BC$,所以AH是BC的中垂线,又因为M是AB的中点,所以过M作AB的垂线交AH于O'后,O'就是$\triangle ABC$的外心,$O'A$就是$\triangle ABC$的外接

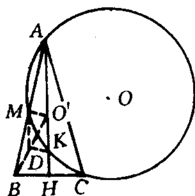


图 6・318

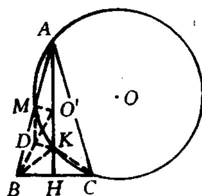


图 6・319

圆半径R,这样问题就是要证$AK=\frac{3}{2}AO'$,$O'K=\frac{1}{2}AO'$.这是两条线段之间的倍半关系,且条件中给出了M是AB的中点,所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明.如将倍线段AO'取作三角形的边,则作与AO'平行的三角形的中位线,于是连结BO',取BO'的中点D,并连结MD后,可得$MD/\!/AO'$,$MD=\frac{1}{2}AO'$,问题就成为要证$MD=O'K$,但$MD/\!/O'K$,所以四边形$MDKO'$应是一个平行四边形,于是连结DK,问题又转化为要证$MO'/\!/DK$,但$O'M\perp AB$,所以要证DK也与AB垂直.由于O'是$\triangle ABC$的外心,所以$O'A=O'B$,$MD=\frac{1}{2}O'A=\frac{1}{2}O'B=DB$,所以$D$应在$BM$的垂直平分线上,这样接下来就应证$K$也在$BM$的垂直平分线上,于是应用等腰三角形中的重要线段的基本图形的性质,连结KB、KM后应证$KB=KM$.但K在BC的垂直平分线AH上,所以连结KC后,可得$KB=KC$.而由$AB=AC$和$AH\perp BC$,又可得$\angle HAB=\angle HAC$,而这两个角都是$\odot O$的圆周角,所以有$\overset{\frown}{KM}=\overset{\frown}{KC}$,$KM=KC$,所以分析完成.

例 36 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，E 是 AB 的中点，延长 AB 到 D 使得 $BD=AB$. 求证：$CD=2CE$.

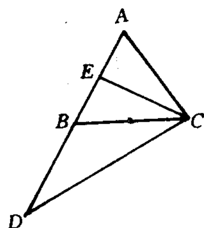


图 6・320

分析：由条件中给出的 E、B 分别是 AB、AD 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 但 E、B 所在的线段是重叠线段，不能组成三角形，所以 EB 这两个中点的连线就不是三角形的中位线，从而就要增加中点，且要增加与 E、B 所在的线段有公共端点的线段的中点. 由于 B 所在的线段的端点是 A、D，E 所在的线段的端点是 A、B，而以这四个点为端点的线段分别是 AC、DC、AC 和 BC，所以就可增加这四条线段的中点.

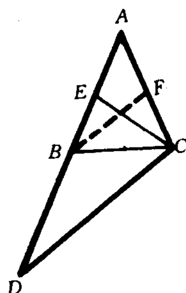


图 6・321

如增加 AC 的中点 F，那末 F、B 所在的线段 AC、AD 可以组成三角形，现在图形中是有三角形而没有中位线，所以连结 BF 后，可得 $CD=2BF$，从而只须证明 $BF=CE$. 但 BF 和 CE 是等腰三角形两腰上的中线，所以应用轴对称型全等三角形的性质就可以证明结论.

如增加 CD 的中点 F，那末 F、B 所在的线段 DC、DA 可组成三角形，而图形中也是有三角形，而没有中位线，所以连结 BF，可得 $BF /\!/ AC$、$BF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB=BE$，从而由 $CD=2CF$，可知问题又转化为应证 $CE=CF$. 但 BC 是 $\triangle CBE$ 和 $\triangle CBF$ 的公共边，所以就出现了一对轴对称型全等三角形，而由 $\angle FBC=\angle ACB=\angle EBC$ 就可以证明这两个三角形全等.

如增加 AC 的中点 F，那末 F、E 所在的线段可组成 $\triangle ABC$，

于是连结 EF，可得 $EF /\!/ BC$，$EF=\frac{1}{2}BC$. 再由 $CF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}DB$，以及由 $\angle ABC=\angle ACB$ 得到的 $\angle CFE=\angle DBC$，可证明 $\triangle CFE \backsim \triangle DBC$，所以 $\frac{CE}{DC}=\frac{FE}{BC}=\frac{1}{2}$.

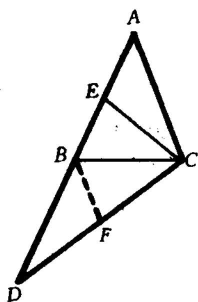


图 6・322

如增加 BC 的中点 F，那末 F、E 所在的线段可组成 $\triangle ABC$，于是连结 EF 后可得 $EF /\!/ AC$，$EF=\frac{1}{2}AC$. 从而又可得 $EF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}BD$. 而 $CF=\frac{1}{2}CB$，由 $\angle EFB=\angle ACB$

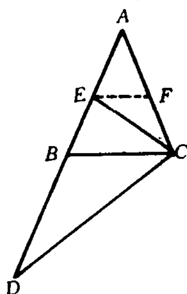


图 6・323

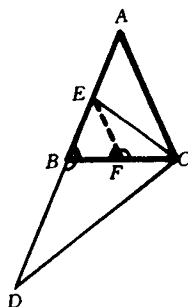


图 6・324

$=\angle EBF$，又可得 $\angle CFE=\angle CBD$，从而可证明 $\triangle CEF \backsim \triangle CDB$，也就得 $CE=\frac{1}{2}CD$.

本题要证明的结论是两条线段之间的倍半关系，且条件中给出了两个中点，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 如取半线段 EC 为三角形的中位线，那就应将三角形的边添上，这时首先要使 C 也成为中点，所以延长 AC 到 F，使 $CF=AC$，并连结 BF，就可得 $BF=2CE$，这样问题就成为要证 $BF=CD$. 而

由 $AB=AC$，$AF=2AC=AD$ 和 $\angle BAF=\angle CAD$，可证明$\triangle ABF$ 和$\triangle ACD$ 是一对轴对称型全等三角形，所以上述性质可以证明. 由于图形中出现的轴对称型全等三角形不仅是一对，所以也可以通过 $BD=CF$，$\angle DBC=\angle FCB$ 和 $BC=CB$，证明$\triangle DBC\cong\triangle FCB$ 来完成分析.

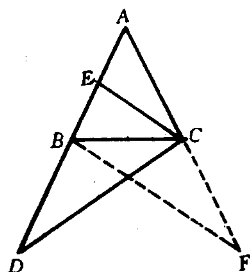


图 6・325

本题要证明 $CD=2CE$，而这两线段可以分别看作是$\triangle ADC$ 和$\triangle ACE$ 的边，而在这两个三角形中，有$\dfrac{AC}{AE}=2$，$\dfrac{AD}{AC}=2$，$\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AD}{AC}$，且$\angle CAD=\angle EAC$，所以$\triangle ADC\backsim\triangle ACE$，是一对逆平行线型相似三角形，所以结论也可以证明.

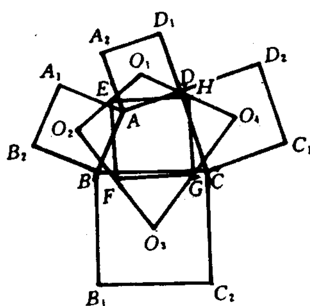


图 6・326

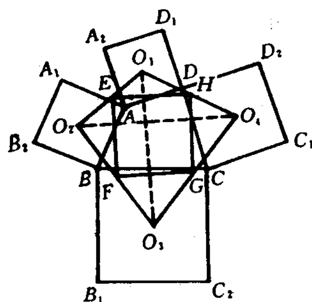


图 6・327

例 37 已知：以四边形 $ABCD$ 的四条边为边向形外作正方形 ABB_2A_1，BCC_2B_1，CDD_2C_1，DAA_2D_1，O_2、O_3、O_4、O_1 依次是这四个正方形的中心，E、F、G、H 依次是 O_1O_2，O_2O_3，O_3O_4，O_4O_1 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是正方形.

分析：由条件 E、F、G、H 分别是 O_1O_2、O_2O_3、O_3O_4、O_4O_1 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位形的基本图形的性质

进行证明. 于是由 E、H 所在的线段有公共端点 O_1，可得连结 O_2O_4 后，有 $EH /\!/ O_2O_4$，$EH=\frac{1}{2}O_2O_4$，同理可证 $FG /\!/ O_2O_4$，$FG=\frac{1}{2}O_2O_4$，所以 $EH \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} FG$，四边形 $EFGH$ 是平行四边形. 要证明这个平行四边形是正方形，就应证明它的一组邻边相等而且垂直. 也就是要证 $EH=EF$，$EH\perp EF$. 由于 E、F 也分别是 O_2O_1 和 O_2O_3 的中点，

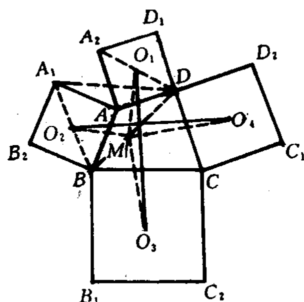


图 6・328

所以连结 O_1O_3 后，又可得 $EF /\!/ O_1O_3$，$EF=\frac{1}{2}O_1O_3$，所以问题又转化成要证 $O_1O_3=O_2O_4$，$O_1O_3\perp O_2O_4$.

由条件 O_1、O_2、O_3、O_4 分别是四个正方形的中心，也都是相应的对角线的中点，所以又出现了多个中点问题，从而可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于每一组相对的中点所在的对角线没有公共端点，不能组成三角形，所以 O_1O_3 和 O_2O_4 这两组中点的连线就不是三角形的中位线，从而就要增加中点，且应增加与已知中点所在的线段有公共端点的线段的中点，所以连结 BD，取 BD 的中点 M，并进一步连结 O_1M，A_2B 和 O_2M，A_1D 后，可得 $O_1M /\!/ A_2B$，$O_1M=\frac{1}{2}A_2B$ 和 $O_2M /\!/ A_1D$，$O_2M=\frac{1}{2}A_1D$. 但正方形 ABB_2A_1 和 ADD_1A_2 具有公共顶点 A，就可得$\triangle AA_2B$ 和 $\triangle ADA_1$ 是一对旋转型全等三角形. 所以 $A_2B=DA_1$，$A_2B\perp DA_1$，从而有 $O_1M=O_2M$，$O_1M\perp O_2M$，它们可组成半个正方形. 根据同样的道理，连结 O_3M、O_4M 后，又可得它们组成半个正方形. 而这两个正方形又以 M 为公共顶点，所以又出现一对旋转型全等三角形，所以可证明$\triangle MO_1O_3\cong\triangle MO_2O_4$，所以 $O_1O_3=O_2O_4$ 和 $O_1O_3\perp O_2O_4$ 都可以证明.

例 38 已知：四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，E、F 分别是 AD、BC 的中点，FE 的延长线交 BA、CD 的延长线于 G、H. 求证：$\angle BGF=\angle CHF$.

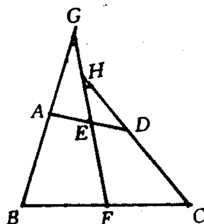


图 6・329

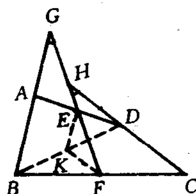


图 6・330

分析：由条件 E、F 分别是 AD、BC 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 但 E、F 所在的线段 AD、BC 没有公共端点，不能组成三角形，所以 EF 这两个中点的连线就不是三角形的中位线，从而要增加中点，且要增加与 AD、BC 有公共端点的线段的中点. 由于 AD、BC 是四边形的一组对边，它们的端点就是四边形的顶点，所以可增加对角线的中点，也就是连结 BD，并取 BD 的中点为 K，现在 E、K 所在的线段 AD、BD 有公共端点，可以组成三角形，所以 EK 这两个中点的连线就是 $\triangle DAB$ 的中位线，于是连结 EK，有 $EK\parallel AB$、$EK=\frac{1}{2}AB$ 和 $\angle KEF=\angle BGF$. 根据同样的道理，连结 FK 后可得 $FK\parallel CD$、$FK=\frac{1}{2}CD$ 和 $\angle KFE=\angle CHF$. 而由 $AB=CD$，就可以证明 $EK=FK$ 和 $\angle KEF=\angle KFE$，从而可完成证明.

本题要证明相等的这两个角 $\angle BGF$ 和 $\angle CHF$ 由于没有直接的联系，所以就处于不易直接建立等量关系的位置上，所以应考虑将角改变位置. 由于本题的条件中没有直接出现与圆有关的性质，所以首先考虑将角平移. 而在将 $\angle BGF$ 进行平移时，又可以出现

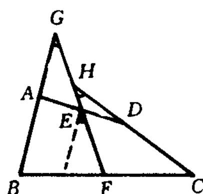


图 6・331

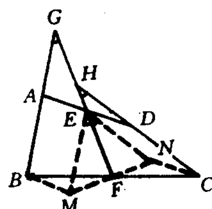


图 6・332

沿 GF 方向和沿 GB 方向平移两种可能性. 如考虑沿 GF 方向平移,则可平移到以 E 为顶点. 那末实际上就是过 E 作 GB 的平行线. 由于将角平移时,可应用平行四边形的性质进行证明,所以在这条平行线上截取 $EM=AB$,那末连结 BM 后,就可得四边形 $ABME$ 是平行四边形. 根据同样的道理,将$\angle CHF$ 沿 HF 方向也平移到以 E 为顶点,也就是过 E 作 $EN /\!/ HC$,且使 $EN=CD$,那末连结 CN 后,也可得四边形 $ENCD$ 是平行四边形. 但已知 $AB=CD$,所以得 $EM=EN$. 这就是两条具有公共端点 E 的相等线段,因而就可组成一个等腰三角形,但这个等腰三角形只有两条腰而没有底边,所以应连结 MN. 但这时又出现了 MN 过 F 的问题,所以应根据三点成一直线的定义在连结 MF、NF 后,证明$\angle BFM=\angle CFN$,也就是要证这两个角是对顶角. 这样,条件中出现的 BF 和 CF 这两条相等的线段,就位于一组对顶角的两边且成一直线,所以可应用中心对称型全等三角形进行证明,也就是要证$\triangle BFM \cong \triangle CFN$. 于是由 $BM \perp\!\!\!= AE$,$NC \perp\!\!\!= ED$ 和 $AE=DE$,可得 $BM \perp\!\!\!= CN$,$\angle MBF=\angle NCF$,且已知 $BF=CF$,所以$\triangle BFM$ 和$\triangle CFN$ 全等就可以证明,从而证得$\angle BFM=\angle CFN$,M、F、N 共线和 $MF=NF$. 再应用等腰三角形的性质就可以证明$\angle MEF=\angle NEF$,这样就可以证得结论.

如考虑将$\angle BGF$ 沿 GF 方向平移到以 H 为顶点,则过 H 作

GB 的平行线，考虑到线段之间的相等关系，所以在平行线上取 $HK=GB$，则 $HK \underline{\underline{/\!/}} GB$，可组成平行四边形，所以连结 BK，可得 $BK /\!/ GH$. 由条件给出 $AB=CD$，且已作 $HK /\!/ GB$，所以在 KH 上截取 $KL=BA$，又可组成一平行四边形，于是再连结 AL，得 $AL /\!/ BK /\!/ GH$. 由条件给出 E 是 AD 的中点，且 $EF /\!/ AL$，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明，于是连结 DL 交 EF 于 M 后，可得 $LM=DM$，$EM=\frac{1}{2}AL$. 根据同样的道理，连结 CK 交 AF

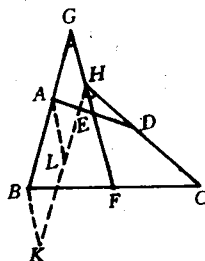


图 6・333

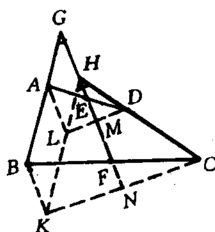


图 6・331

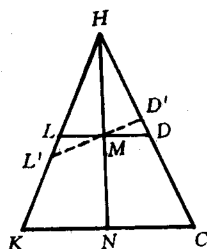


图 6・335

的延长线于 N 后，可得 $KN=CN$，$FN=\frac{1}{2}BK$. 而现在我们要证明 $\angle KHF=\angle CHF$，所以就应证明 $HL=HD$ 或 $HK=HC$，但已知 $KL=AB=CD$. 且 KL、NM、CD 共点于 H，从而就可以根据平行线型相似三角形的组合图形的性质证明 $LD /\!/ KC$，由于这个性质可以证明所以分析可以完成.

对这部分的分析可这样完成，在四边形 $LKCD$ 中，$KL=CD$，M、N 分别是 LD、KC 的中点，且 KL、NM、CD 共点于 H，如 LD 与 KC 不平行，则过 M 作 KC 的平行线交 HK、HC 于 L'、D'，就

可得$\frac{L'M}{KN}=\frac{D'M}{CN}$，$L'M=D'M$，而已知$LM=DM$，这样就出现了两组相等线段在一组对顶角的两边，且成一直线，所以可应用中心对称型全等三角形进行证明，也就是可证明$\triangle LML' \cong \triangle DMD'$，从而通过$\angle MLL'=\angle MDD'$，可得$LL' /\!/ D'D$，这就与$KH$、$CH$相交于$H$矛盾，所以$LD /\!/ KC$.

本题的上述分析采用了反证法，这是因为我们是用线段的数量关系，在这里是相等关系来作图，而要证明线段之间的平行关系，所以直接应用平行线型相似三角形的性质就有一定的难度. 所以如要用直接证法来进行分析，那就可将上述作图和证明中应用的数量关系、位置关系倒过来进行，也就是根据位置关系作图，然后证明相等关系. 于是就可以：过D作$DK \perp GF$，垂足是K，并延长DK到L，使$LK=DK$，再连结HL，就可得$HL=HD$，$\angle LHK=\angle DHK$，所以问题就成为要证$\angle BGF=\angle LHF$，$HL /\!/ GB$. 由条件E是AD的中点，现在作了K是LD的中点，是多个中点问题，从而可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 而现在图形中是有中位线而三角形不完整，所以将三角形的边添上，也就是连结AL，就可得$EK /\!/ AL$，$EK=\frac{1}{2}AL$. 以上的分析是对中点E来进行的，那末对于中点F就可以用同样的方法进行分析，于是过C作GF的垂线，分别交GF、HL的延长线于M、N，就可得$CM=NM$，$HN=HC$，$NL=CD=AB$. 从而连结BN后，又可得$BN /\!/ FM$，$FM=\frac{1}{2}BN$. 由于我们要证$LN /\!/ AB$，所以就应证四边形$BNLA$是平行四边形，而$LN /\!/ AB$不能用，所以就要转而证明$AL=BN$，$EK=FM$. 由条件$AE=DE$，且AD、GF在中点E相交，从而就出现了两条相等的线段在一组对顶角的两边且成一直线，所以可添加中

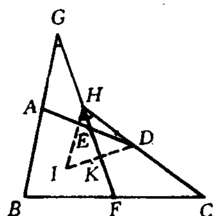


图 6・336

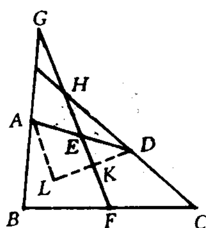


图 6・337

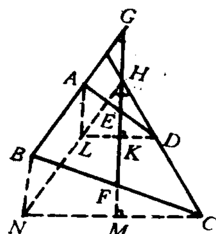


图 6・338

点对称型全等三角形进行证明，添加的方法是过端点作平行线，所以过 A 作 $AP\perp GF$，垂足是 P，可得 $\triangle APF\cong\triangle DKE$，$AP=DK$，$PE=KE$，$PK=2EK$. 根据同样的道理过 B 作 $BQ\perp GF$ 交 GF 于 Q 后，可得 $BQ=CM$，$QM=2FM$，所以问题就应证 $PK=QM$，$PQ=KM$. 而 PQ、KM 是两个直角梯形 $ABQP$ 和 $DCMK$ 的高，由于这两个直角梯形的腰相等，上、下底也分别相等，所以通过平移腰后就可以证明一对直角三角形全等，所以 $PQ=KM$ 可以证明. 分析完成.

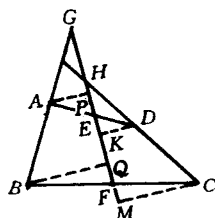


图 6・339

如在将$\angle BGF$ 平移到以 H 为顶点时，在平行线上取 $HK=AB=CD$，那也就是在 HC 上取 $HL=CD$，过 L 作 $LM\perp GF$，垂足是 M，并延长 LM 到 K，使 $KM=LM$，再连结 HK，即可得 $HK=HL=CD=AB$，$\angle KHM=\angle CHF$，所以问题成为要证 $\angle BGF=\angle KHM$，$BA\parallel KH$. 这样四边形 $ABKH$ 就应是平行四边形，于是连结 AH，BK，又应证 $AH=BK$. 现在 E、M、F 分别是 AD、KL、BC 的中点，是多个中点问题，

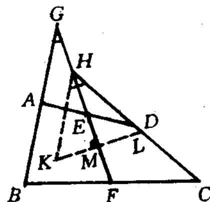


图 6・340

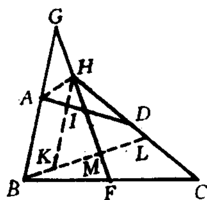


图 6・341

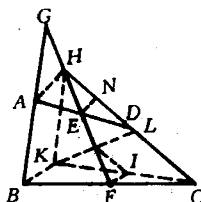


图 6・342

所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明，但由于这三条线段没有公共端点，不能组成三角形，所以应增加中点，且应增加与已知中点所在的线段有公共端点的线段的中点，于是取 DH 的中点 N，连结 EN，可得 $EN /\!/ AH$，$EN=\frac{1}{2}AH$. 类似地连结 CK 后，取 CK 的中点 I，连结 FI，可得 $FI /\!/ BK$，$FI=\frac{1}{2}BK$，于是又应证 $EN=FI$. 由 M、I 是 KL、KC 的中点，连结 MI 后，可得 $MI=\frac{1}{2}LC=\frac{1}{2}HD=HN$，$MI /\!/ LC$，$\angle FMI=\angle EHN$，同时我们还可以证明 $MF=HE$，所以 $\triangle MIF \cong \triangle HNE$，从就可以证明 $EN=FI$，分析就可以完成.

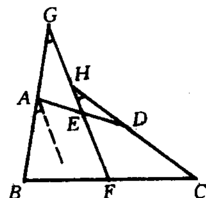


图 6・343

如现在我们考虑将 $\angle BGF$ 沿 GB 方向平移，那就可以平移到以 A 为顶点，也就是过 A 作 GF 的平行线. 那末接下来的问题就是 $\angle CHF$ 怎么考虑，如考虑将 $\angle CHF$ 也平移到以 A 为顶点，那就是过 A 作 $AK /\!/ HC$，并使 $AK=CD$，并连结 BK，那末 $\triangle ABK$ 就是等腰三角形. 然后取 BK 的中点 M，连结 AM 后，可得 AM 平分 $\angle BAK$，所以问题就是要证 $AM /\!/ GF$. 现在 M、F 分别是 BK、BC 的中点，是多个中点问题，就可以应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 于是连结 MF，KC，就可得 $MF /\!/ KC$，$MF=$

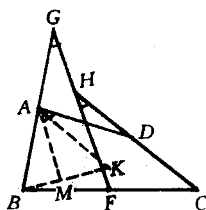


图 6・344

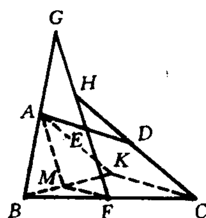


图 6・345

$\frac{1}{2}KC$. 但 $AK \perp\!\!\!\!= DC$，所以四边形 $AKCD$ 是平行四边形，得 $KC \perp\!\!\!\!= AD$，于是有 $MF /\!/ AD$，又因为 E 是 AD 的中点，所以 $MF=AE$，从而可证明四边形 $AMFE$ 也是平行四边形，就可证明 $AM /\!/ EF$，从而完成分析.

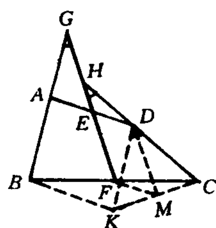


图 6・346

如果我们类似地考虑将 $\angle BGF$ 和 $\angle CHF$ 都平移到以 D 为顶点，则过 D 作 $DK /\!/ AB$，且使 $DK=AB$，连结 CK，并取 CK 的中点 M，再连结 DM，那末问题也就成为要证 $DM /\!/ GF$. 于是再由 F、M 分别是 BC、KC 的中点，连结 BK、FM 后可得 $FM /\!/ BK$，$FM=\frac{1}{2}BK$. 再由四边形 $ABKD$ 是平行四边形，$BK \perp\!\!\!\!= AD$，推得 $FM \perp\!\!\!\!= ED$，所以也可以完成分析.

如果我们分别考虑将 $\angle BGF$ 平移到 A 点，将 $\angle CHF$ 平移到 D 点，则应过 A、D 分别作 GF 的平行线. 又因为已知 $AE=DE$，且 GF 与 AD 在 E 点相交，就出现了两条相等线段在一组对顶角的两边且成一直线，所以可应用中心对称型全等三角形进行证明，添加的方法是过端点作平行线，于是过 A、D 分别作 $AK \perp GF$，$DL \perp GF$，垂足分别是 K、L，则可得 $\triangle AKE \cong \triangle DLE$，$AK=DL$. 根据同样的道理，过 B 作 $BM \perp GF$，垂足是 M，过 C 作 $CN \perp GF$ 交 GF

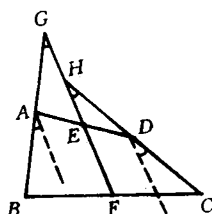


图 6・347

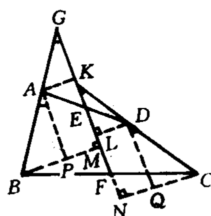


图 6・348

的延长线于 N，可得$\triangle BMF \cong \triangle CNF$，$BM=CN$. 现在分别过 A、D 作 GF 的平行线交 BM，CN 于 P、Q，则可得四边形 $APMK$，$DQNL$ 都是矩形，从而就可得 $BP=CQ$，$\angle APB=\angle DQC=90°$，且已知 $AB=CD$，所以$\triangle ABP \cong \triangle DCQ$，$\angle BAP=\angle CDQ$，所以分析也可以完成.

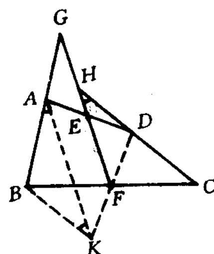


图 6・349

当我们将$\angle BGF$ 平移到以 A 为顶点时，实质上就是过 A 作 GF 的平行线，但条件中给出了 E 是 AD 的中点，就出现了过线段的中点和端点的一组平行线，所以又可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明，于是过 A 作 $AK /\!/ GF$ 交 DF 的延长线于 K，就可得 $DF=KF$. 但已知 $BF=CF$，且 BC、DK 在 F 点相交，所以就出现了一对中心对称型全等三角形，也就是连结 BK 后，有$\triangle BKF \cong \triangle CDF$，所以 $BK=CD=BA$，$\angle BAK=\angle BKA$，但 $BK /\!/ HC$，可证明$\angle BKA=\angle CHF$，所以分析可以完成.

根据同样的道理，如考虑将$\angle CHF$ 平移到 D 点，则过 D 作 $DK /\!/ GF$ 交 AF 的延长线于 K，可得 $AF=KF$，那末连结 CK 后，可证明$\triangle AFB \cong \triangle KFC$，$CK=AB=CD$，$\angle CHF=\angle CDK=\angle CKD=\angle BGF$，所以分析也可以完成.

由本题的条件 F 是 BC 的中点，FE 是过中点 F 的线段，所以

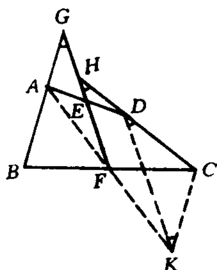


图 6・350

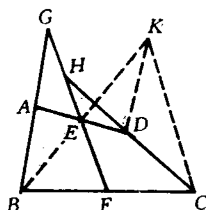


图 6・351

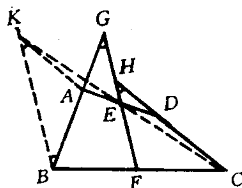


图 6・352

也可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明，如将 FE 取作三角形的中位线，则过端点 C 作 FE 的平行线交 BE 的延长线于 K，就可得 $BE=KE$，$\angle CHF=\angle DCK$. 但已知 $AE=DE$，又出现了两组相等线段在一组对顶角的两边且成一直线，所以连结 DK 后，可得 $\triangle ABE \cong \triangle DKE$，$AB=DK$，$AB \parallel KD$，所以 $DK=DC$，$\angle DKC=\angle DCK$，分析也可完成.

在将 FE 取作三角形的中位线时，平行线也可以过另一个端点 B 作，也就是过 B 作 $BK \parallel FE$ 交 CE 的延长线于 K，则可得 $CE=KE$. 再连结 AK，可得 $\triangle CDE \cong \triangle KAE$，$AK=CD=AB$，$KA \parallel DC$，从而也可以完成分析.

例 39 已知：四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AD、BC 的中点，FE 的延长线交 BA、CD 的延长线于 G、H.

求证：$\dfrac{GA}{GB}=\dfrac{HD}{HC}$.

分析：本题条件中给出 E、F 分别是 AD、BC 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 E、F 所在的线段没有公共端点，不能组成三角形，所以 EF

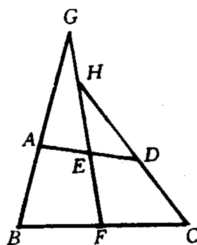


图 6・353

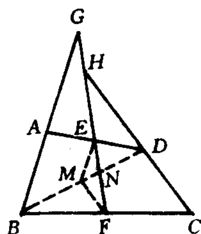


图 6・354

这两个中点的连线就不是三角形的中位线，从而应增加中点，且应增加与 E、F 所在的线段 AD、BC 有公共端点的线段的中点. 于是连结 BD 交点 EF 于 N，取 BD 的中点 M，那末连结 EM 后，可得 $EM \parallel AB, EM=\frac{1}{2}AB$. 这样又出现了 EM 是$\triangle NGB$ 内一条边 GB 的平行线段，所以就出现了一对平行线型相似三角形，即 $\triangle NEM \backsim \triangle NGB, \frac{EM}{GB}=\frac{NM}{NB}. \frac{\frac{1}{2}AB}{GB}=\frac{NM}{NB}, \frac{GB-GA}{2GB}=\frac{NM}{NB}, \frac{GA}{GB}=1-\frac{2MN}{BN}=\frac{BM-MN}{BN}=\frac{DN}{BN}$，另一方面，连结 MF 后，也有 $MF \parallel DC, MF=\frac{1}{2}DC$. 所以 $\triangle NMF \backsim \triangle NDH, \frac{HD}{FM}=\frac{DN}{MN}, \frac{HD+2FM}{FM}=\frac{DN+2MN}{MN}, \frac{HC}{FM}=\frac{DM+MN}{MN}=\frac{BN}{MN}$，所以 $\frac{HD}{HC}=\frac{DN}{BN}$，从而就可完成分析.

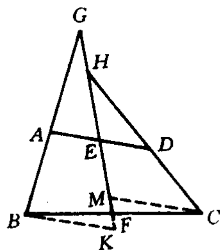


图 6・355

本题要证明的结论是线段之间的比例关系，经过描图可以发现两组相比线段都分别重叠在一直线上，所以可添加平行线型相似三角形进行证明. 如选取过内分点 A 的线段 AE 为平行方向线段，则平行线可过端点 B 作，也就是过 B

作 $KB /\!/ AE$ 交 AF 的延长线于 K，可得$\triangle GEA \backsim \triangle GKB$，$\frac{GA}{GB}=\frac{AE}{BK}$. 根据同样的道理，过 C 作 $CM /\!/ DE$ 交 GF 于 M 后，可得$\frac{HD}{HC}=\frac{DE}{CM}$. 但由 $BF=CF$ 和 $BK /\!/ MC$，又可证明$\triangle BKF \cong \triangle CMF$，$BK=CM$，所以分析可以完成.

如取过端点的 BF 为平行方向线段，则平行线可过内分点 A

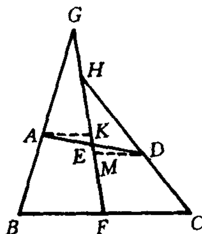


图 6・356

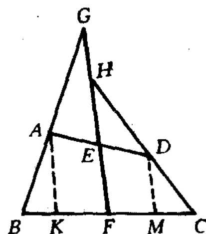


图 6・357

作，也就是过 A 作 $AK /\!/ BF$ 交 GF 于 K. 可得$\frac{GA}{GB}=\frac{AK}{BF}$. 根据同样的道理，过 D 作 $DM /\!/ CF$ 交 GF 于 M 后，可得$\frac{HD}{HC}=\frac{DM}{CF}$，而$\triangle AKE \cong \triangle DME$，$AK=DM$，所以分析可以完成.

如取过端点的 GF 为平行方向线段，则平行线可过内分点 A 作，也就是过 A 作 $AK /\!/ GF$ 交 BF 于 K，就可得$\frac{GA}{GB}=\frac{FK}{FB}$. 根据同样的道理，过 D 作 $DM /\!/ GF$ 交 CF 于 M，可得$\frac{HD}{HC}=\frac{FM}{CF}$. 由条件给出 $FB=FC$，所以问题成为应证 $FM=FK$，由于 $AE=DE$，$AK /\!/ EF /\!/ DM$，所以这个性质是可以证明的.

例 40 已知：D、E 是$\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上的点，$BD=CE$，G、F 分别是 DE、BC 的中点，AH 是角平分线. 求证：$AH /\!/ GF$.

分析：本题条件中出现了 G、F 分别是 DE、BC 的中点，是多

个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明．由于G、F所在的线段DE、BC没有公共端点，不能组成三角形，GF这两个中点的连线就不是三角形的中位线，从而就要增加中点，且应增加与DE、BC有公共端点的线段的中点．于是连结BE，取BE的中点M．那末连结MG，MF后，可得$MG /\!/ BD$，$MG=\frac{1}{2}BD$，$MF /\!/ EC$，$MF=\frac{1}{2}EC$，$MG=MF$，$\angle MGF=\angle MFG$．进一步可得$\angle GMF+\angle BAC=180°$，$\angle MGF=\angle MFG=\angle BAH\Rightarrow\angle CAH$，所以$GF /\!/ AH$可以证明．

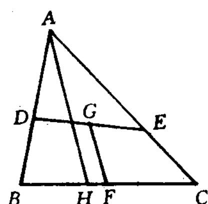


图 6・358

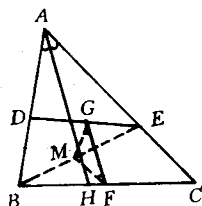


图 6・359

本题在考虑增加中点时，由于条件中出现了AH是角平分线，所以也可以通过向角平分线作垂线来增加中点．于是过D作$DM\perp AH$交AH、AC于K、M，于是$DK=MK$．

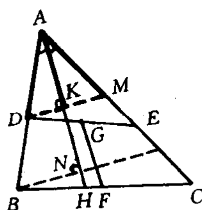


图 6・360

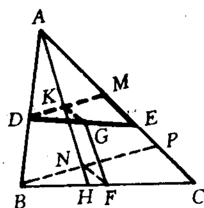


图 6・361

因K、G所在的线段DM、DE现在有公共端点D，可以组成三角形，所以连结KG后，可得$KG /\!/ ME$、$KG=\frac{1}{2}ME$．根据同样的道理，过B作$BP\perp AH$交AH、AC于N、P，连结NF后又可得$NF /\!/ PC$、$NF=\frac{1}{2}PC$，从而可得$KG /\!/ NF$，因而四边形$KNFG$就应

是平行四边形. 这样问题就成为应证 $KG=NF$, $ME=PC$, 也即要证 $MP=CE$, 但因 $BD=CE$, 这样又只要证 $MP=BD$. 因 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ADM$ 都是等腰三角形, 所以 $MP=BD$ 就可以证明.

由本题的条件 G、F 分别是 DE、BC 的中点, 是多个中点问题, 所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 如将

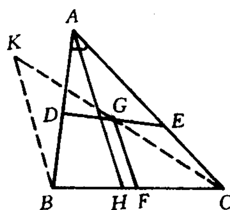


图 6・362

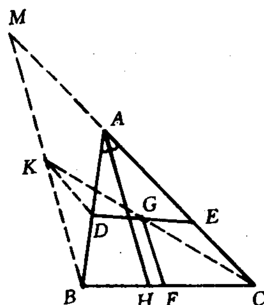


图 6・363

GF 这两个中点的连线取作三角形的中位线, 则应添加三角形的边, 于是过端点 B 作 $BK /\!/ FG$ 交 CG 的延长线于 K, 可得 $KG=CG$. 那末问题就成为要证 $BK /\!/ HA$. 由于 AH 是角平分线, 这样就出现了角平分线和角平分线的平行线之间的组合关系, 所以必定得到一个等腰三角形的基本图形, 因此延长 BK 交 CA 的延长线于 M, 问题就成为要证 $AM=AB$. 但在证明了 $KG=CG$ 后, 由条件 $DG=EG$, 出现了两组相等线段分别在一组对顶角的两边上且成一直线, 所以连结 DK 后, 可得 $\triangle KGD \cong \triangle CGE$, $DK=EC=DB$, $DK /\!/ CE$, 于是通过 $\triangle DKB \backsim \triangle AMB$, 就可以完成分析.

由于本题条件中给出了 G、F 分别是 DE、BC 的中点, 而 DE、BC 没有公共端点不能组成三角形, 所以 GF 这两个中点的连线就不是三角形的中位线, 于是也可添加梯形的中位线来进行证明. 所以过 G 所在线段 DE 的两个端点分别作 GF 的平行线交 BC 于

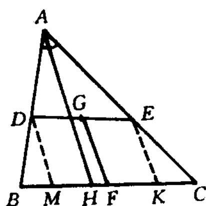


图 6・364

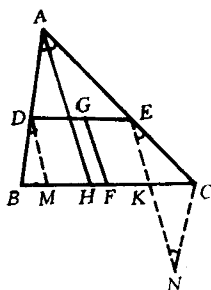


图 6・365

M、K，就可得 $MF=KF$. 所以 $BM=CK$. 问题也就成为要证 $EK \parallel AH$. 但 AH 是角平分线，这样就出现了角平分线和平行线的组合关系，所以必定要构成一个等腰三角形的基本图形. 由于条件中给出 $BD=CE$，所以将这两条相等线段移动到有公共端点，就能构成等腰三角形，于是过 C 作 $CN \parallel DB$ 交 EK 的延长线于 N，就可得 $\angle NCK=\angle DBM$，$CK=BM$，$\angle NKC=\angle DMB$，$\triangle NCK \cong \triangle DBM$. 所以 $CN=BD=CE$，$\angle CEN=\angle CNE$. 而$\angle NCE+\angle CAB=180°$，所以$\angle CEN=\angle CAH$，结论就可以证明.

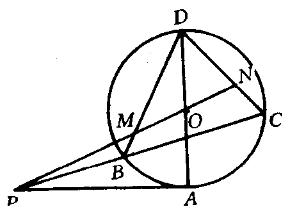


图 6・366

例 41 已知：PA 与$\odot O$ 相切于 A，割线 PBC 交$\odot O$ 于 B、C，AD 是$\odot O$ 的直径，直线 PO 交 BD、CD 于 M、N. 求证：$OM=ON$.

分析：本题的条件中出现了 PA 与$\odot O$ 相切于 A，割线 PBC 交$\odot O$ 于 B、C，所以可应用圆的切线和割线的性质进行证明. 由于圆的切、割线的第一个基本性质——切割线定理与本题的结论没有直接的联系，所以可转而考虑应用圆的切、割线的另一个基本性

图 6・367　　　　图 6・368

质——圆外一点、切点、割线交圆所得弦的中点以及圆心四点共圆的性质进行证明. 于是取 BC 的中点 E,连结 OE、EA,可得 P、A、E、O 四点共圆,四边形 $PAEO$ 是圆内接四边形.

在取了 E 是 BC 的中点后,由于要证明 O 是 MN 的中点,就出现了多个中点问题,所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 O、E 所在的线段 MN、BC 没有公共端点,不能组成三角形,所以 OE 这两个中点的连线就不是三角形的中位线,从而就要增加中点,且应增加与 O、E 所在的线段有公共端点的线段的中点. 另一方面由结论要证 O 是 MN 的中点,且过端点 M、N 和中点 O 的三直线共点于 D,所以可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 添加的方法是作同与共点三直线相交的 MN 的平行线,这时只要作与 DB、DA、DC 相交的 MN 的平行线就会出现中点(这些平行线中当然要除去过 D 点的一条),但由于要与 E 所在的线段 BC 有公共端点,所以这条平行线可过 B 点作,也就是过 B 作 $BF /\!/ MN$,交 DC、DA 于 F、G,那末由 $\dfrac{OM}{GB}=\dfrac{ON}{GF}$,可知问题转化为要证 $GB=GF$. 现在 G、E 这两个中点所在的线段可以组成 $\triangle BCF$,所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明,于是连结 GE,问题就应证 $EG /\!/ CF$,$\angle BEG=\angle BCF$. 但 $\angle BCD$ 是 $\odot O$ 的圆周角,应用圆周角的基本图形的性质,由 D、B、A、C 四点共圆,连结 BA 后,可得 $\angle BAD=\angle BCD$,所以问题又转

而证$\angle BEG=\angle BAG$，也就是要证B、A、E、G四点共圆. 但在作出$BF \parallel PN$后，有$\angle EBG=\angle EPO$. 而在已证P、A、E、O四点共圆后，也可得$\angle EPO=\angle EAO$，所以$\angle EBG=\angle EAG$，B、A、E、G四点共圆，分析就可以完成.

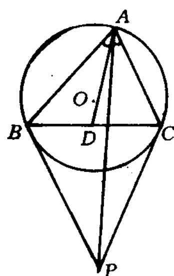


图 6・369

例 42 已知：$\triangle ABC$内接于$\odot O$，过B、C作$\odot O$的切线相交于P，D是BC的中点. 求证：$\angle BAD=\angle CAP$.

分析：本题条件中给出PB、PC与$\odot O$相切于B、C，D是连结切点的弦的中点，所以P、D、O三点在一直线上，于是连结PO，则PO必过点D，$PO\perp BC$. 这样进一步可得若PO交$\odot O$于E，有$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}$，$\angle BAE=\angle CAE$，从而问题就转化为要证$\angle DAE=\angle PAE$. EA应是$\triangle APD$的一条内角平分线. 另一方面，E是过圆心的直线与$\odot O$的交点，所以E也可看作是直径

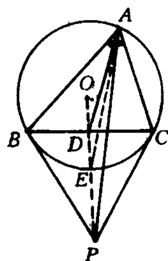


图 6・370

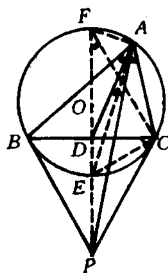


图 6・371

的一个端点，于是就可应用直径的性质或者也就是半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明，从而应先将直径添上，也就是延长PO交$\odot O$于F，连结AF，可得$\angle EAF=90°$，这样当AE是$\triangle ADP$的内角平分线时，AF必定同时是$\triangle ADP$的外角平分线，

所以问题就成为要证$\frac{DE}{PE}=\frac{DF}{PF}$. 但因 PC 与$\odot O$ 相切于 C,连结过切点 C 的弦 CE 后,可得$\angle PCE$ 是弦切角,所以再连结 CF,可得$\angle PCE=\angle CFE$. 而由 EF 是$\odot O$ 的直径,C 是半圆上的点,又可得$\angle ECF=90°$,且 $CD\perp EF$,所以$\angle DCE=\angle CFE$,$\angle PCE=\angle DCE$,CE 是$\triangle CDP$ 的内角平分线,而$\angle ECF=90°$,所以 CF 就是$\triangle CDP$ 的外角平分线,那末应用三角形内外角平分线的性质就可以证明$\frac{DE}{PE}=\frac{DF}{PF}$.

例 43 已知:PA、PB 与$\odot O$ 相切于 A、B,割线 PCD 交 AB 和$\odot O$ 于 Q、C、D.

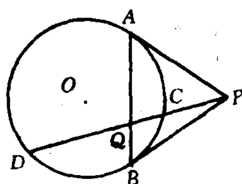


图 6・372

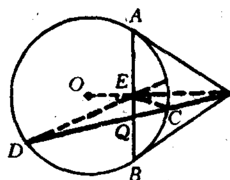


图 6・373

求证:$\frac{CQ}{DQ}=\frac{CP}{DP}$.

分析:本题要证的结论是线段之间的比例关系. 经过描图可以发现,成比例的四条线段现在重叠在一直线上,且构成线段 CD 的内外分比相等,从而可应用三角形的内外角平分线的性质进行证明. 这时过内外分点 Q、P 的两条互相垂直的线段就应分别是三角形的内外角平分线. 另一方面,由于 PA、PB 是$\odot O$ 的切线,AB 是连结切点的弦,所以应用切线长定理及其推论,可得连结 OP 交 AB 于 E 后,有 $OP\perp AB$,$\angle PEQ=90°$,从而问题就应证 QE、PE 分别为$\triangle EDC$ 的内外角平分线,也就是连结 CE、DE 后,应证$\angle DEQ=\angle CEQ$,$\angle OED=\angle PEC$. 另一方面,由条件 PB 与$\odot O$ 相切于 B,应用切线的性质,连结 OB 后,可得 $OB\perp PB$,所以 BE

图 6・374

图 6・375

就成为直角$\triangle POB$斜边上的高，于是应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，可得$PB^2=PE\cdot PO$，$OB^2=OE\cdot OP$. 而由PB是$\odot O$的切线、PCD是割线，于是应用切割线定理，又可得$PB^2=PC\cdot PD$，所以$PE\cdot PO=PC\cdot PD$. 这是一个新的比例关系，经过描图可以发现两组相乘线段分别重叠在一直线上，所以可应用逆平行线型相似三角形进行证明. 由于这两组重叠的相乘线段有一个公共的端点P，所以添加的方法是将端点和端点，内分点和内分点分别连结起来，也就是连结OD，就可得$\triangle PCE\backsim\triangle POD$，$\angle PEC=\angle PDO$，从而问题转化为应证$\angle OED=\angle PDO$，而这两个角相等一出现，就出现了$DE$是$\triangle POD$内过顶点$D$的边$DP$的逆平行线，从而还是要应用逆平行线型相似三角形进行证明，也就是应证明$\triangle OED\backsim\triangle ODP$，进一步也就是应转而证明$\angle OED=\angle PDO$的等价性质$OD^2=OE\cdot OP$. 但我们已证$OB^2=OE\cdot OP$且$OD=OB$，所以分析可以完成.

第二节 逆平行线型

【分析方法导引】

如果几何问题中出现了三角形一条边的逆平行线，就应想到要应用逆平行线型相似三角形进行证

明.这时只要将三角形一条边的逆平行线与三角形的另外两边或另外两边的延长线或反向延长线相交,包括其中的特殊情况这条逆平行线与三角形的一边相交于三角形的顶点,就可以构成逆平行线型相似三角形,然后再应用相似三角形的判定定理和性质就可以完成分析.

如果几何问题中出现了由圆外一点发出的两条割线,由圆外一点发出的一条切线和一条割线,圆内的相交两弦,直角三角形斜边上的高时,也应想到可应用逆平行线型相似三角形的性质进行证明.这时可以直接应用割线定理,切割线定理,相交弦定理,射影定理来完成分析.

对于一个线段之间的比例关系,如果经描图后发现相乘两线段重叠在一直线上,且有一个公共的端点时,就应想到要应用逆平行线型相似三角形进行证明.应用的方法是过端点和内分点,端点和端点作逆平行线.这时首先是选取图形中的过端点或内分点的线段为逆平行方向线段,当逆平行方向线段取在过端点时,逆平行线应过内分点作或过另一个端点作;当逆平行方向线段取在过内分点时,逆平行线应过端点作.在作出了逆平行线型相似三角形以后,分析就容易完成了.

对于一个线段之间的比例关系,如果经描图后发现两组相乘线段分别重合在一直线上,且有一个公共端点时,就可想到应用逆平行线型相似三角形进行证明.然后就应发现相似三角形,这时应将端点和端点,内分点和内分点分别连接起来或者将端点和内分点交叉进行连接,那末这两条连线就应是逆

平行线；如果出现两组相乘线段分别重合在一直线上，且以内分点为它们的公共端点时，应将四个端点分两组连接起来，这两组连线也应是逆平行线；如在出现两组相乘线段分别重叠在一直线上，且有一个公共端点的同时，还出现一组相乘线段是一条线段的平方，则应将重合的端点与另一组线段上的端点和内分点分别连接，那末这两条连线同样也是逆平行线．在找到或添加了逆平行线型相似三角形以后，分析也就容易完成了．

例 44 已知：AB、CD 是⊙O 的直径，且 $AB\perp CD$，E 是 OD 的中点，AE 的延长线交⊙O 于 G，CG 交 AB 于 F．求证：$GC=3GD$．

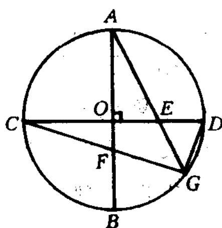


图 6・376

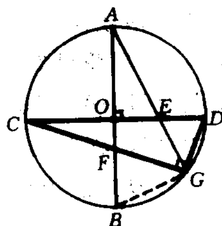


图 6・377

分析：由条件 CD 是⊙O 的直径，G 是半圆上的一点，所以应用半圆上的圆周角的基本图形的性质可得 $\angle CGD=90°$，而已知 $\angle COF=90°$，所以就出现了 OF 是 $\triangle CGD$ 内边 DG 的逆平行线，从而可得 $\triangle COF$ 和 $\triangle CGD$ 是一对逆平行线型相似三角形，于是 $\dfrac{GC}{GD}=\dfrac{OC}{OF}$，从而要证明的结论就转化为 $OC=3OF$．另一方面，由 AB 是⊙O 的直径，G 仍是半圆上的一点，所以连结 BG 后，可得 $\angle AGB=\angle AOE=90°$，$OE$ 是 $\triangle ABG$ 内边 BG 的逆平行线，所以

$\triangle AEO \backsim \triangle ABG$，$\frac{AG}{BG}=\frac{AO}{EO}=2$. 而由$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}=90°$，又可以证明$\angle AGF=\angle BGF$. 从而可应用三角形的角平分线性质得$\frac{AF}{BF}=\frac{AG}{BG}=2$，$AO+OF=2(OB-OF)=2(AO-OF)$，所以 $AO=3OF$，$\frac{CO}{OF}=3$ 就可证明.

例 45 已知：OA、OB 是⊙O 的半径，且 $OA\perp OB$，弦 BC、BD 交 OA 于 E、F. 求证：$BE\cdot BC=BF\cdot BD$.

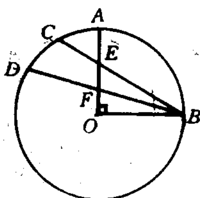


图 6・378

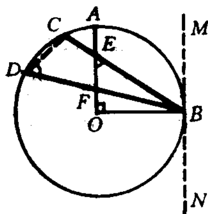


图 6・379

分析：本题要证明的结论是线段之间的比例关系，经过描图可以发现，两组相乘线段 BE、BC 和 BF、BD 都重叠在一直线上，所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 由于这两组重叠的相乘线段具有公共端点 B，所以添加的方法是将内分点和内分点，端点和端点分别连结起来，并证明这两条连线是逆平行线. 于是连接 CD，问题就成为应证 $BE\cdot BC=BF\cdot BD$ 的等价性质$\angle BEF=\angle BDC$. 另一方面，由于出现了半径的垂线 OA，所以可通过添加半径外端的垂线，将问题转化为弦切角的基本图形问题来进行分析. 于是过 B 作 $MN\perp OB$，就可得 MN 与⊙O 相切于 B，而 BC 是过切点 B 的弦，所以$\angle MBC=\angle CDB$，而由 $MN /\!/ AO$，又可得$\angle MBE=\angle BEF$，所以分析完成.

本题在证明$\angle BEF=\angle BDC$ 时，由于出现了$\angle BEF$ 是一个

圆内角，所以也可应用圆内角的性质进行证明. 于是延长 AO 交⊙O 于 G，就可得$\angle BEF$ 的度数等于$\overset{\frown}{BG}$和$\overset{\frown}{AC}$的度数之和的一半，而$\overset{\frown}{BG}=\overset{\frown}{BA}=90°$，所以上述性质可以证明.

图 6・380

例 46 已知：⊙O、⊙O' 相交于 A、B，CD 是两圆的外公切线，C、D 是切点，CB、DB 的延长线分别交 AD、AC 于 E、F. 求证：$DE \cdot DA=DB \cdot DF$.

分析：本题要证的结论是线段之间的比例关系，经过描图，可以发现两组相乘线段都分别重叠在一直线上，所以可应用逆平行线型相似三角形进行证明. 由于这两组重叠线段有一个公共端点 D，所以根据将端点和端点、内分点和内分点分别连线的方法，可找到这对相似三角形应是$\triangle DEB$ 和$\triangle DFA$，而要证明这两个三角形相似就应转而证 $DE \cdot DA=DB \cdot DF$ 的等价性质$\angle DBE=\angle DAC$. 但因 C、B、E 成一直线，$\angle DBE=\angle BCD+\angle BDC$. 而已知 CD 是两圆的外公切线，CB、CD 分别是过切点的弦，所以应用弦切角的基本图形的性质，可得连结 AB 后，有$\angle BCD=\angle BAC$，$\angle BDC=\angle BAD$，所以$\angle DBE=\angle DAC$ 可以证明.

图 6・381

图 6・382

例 47 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，D 是 AB 上的一点，以 AD 为直径作⊙O 交 AC 于 E，CD 的延长线交⊙O 于 F.

求证：$AD \cdot AB=AE \cdot AC$；$AD^2=AC \cdot AE-CD \cdot DF$

分析：本题要证明 $AD \cdot AB=AE \cdot AC$，是线段之间的比例关

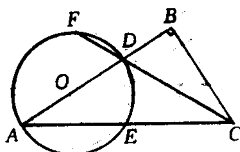


图 6·383

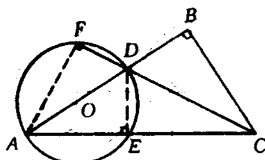


图 6·384

系，经过描图可以发现两组相乘线段分别重叠在一直线上，所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明．由于这两组重叠的相乘线段有一个公共端点 A，所以添加的方法是将端点和端点，内分点和内分点分别连结起来，于是连接 DE，问题就成为要证 $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$，也就是要证 $AD \cdot AB = AE \cdot AC$ 的等价性质 $\angle AED = \angle ABC$．但已知 $\angle ABC = 90°$，而由 AD 是 $\odot O$ 的直径，E 是半圆上的点，所以 $\angle AED = 90°$，从而就可以证明上述性质．

由 $AD \cdot AB = AE \cdot AC$，可得要证 $AD^2 = AC \cdot AE - CD \cdot DF$，就应转而证 $AD^2 = AD \cdot AB - CD \cdot DF$，$CD \cdot DF = AD \cdot AB - AD^2 = AD(AB - AD) = AD \cdot BD$，这是一个新的比例关系，经过描图可以发现两组相乘线段也分别重叠在一直线上，所以仍应添加逆平行线型相似三角形进行证明．由于这两组重叠的相乘线段有一个公共的内分点 D，所以添加的方法是将四个端点两两连结起来，也就是连结 AF，可得应证 $\triangle CDB \backsim \triangle ADF$，也就是应证 $CD \cdot FD = AD \cdot BD$ 的等价性质 $\angle CBD = \angle AFD$．由条件 $\angle CBD = 90°$，而由 AD 是 $\odot O$ 的直径，F 是半圆上的一点，所以又可得 $\angle AFD = 90°$，分析也就可以完成．

例 48　已知：$\odot O$、$\odot O'$ 外切于 P，$\odot O$ 的弦 $AB \perp OO'$，垂足为 C，过 P 任作一割线交 AB、$\odot O$、$\odot O'$ 于 D、M、N．求证：$PD \cdot MN = 2PC \cdot OO'$

分析：本题要证的结论是线段之间的比例关系，经过描图可以发现，两组相乘线段 PD、MN 和 PC、OO' 都分别重叠在一直线

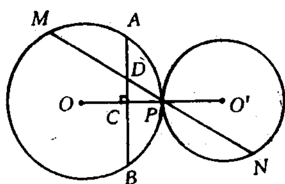


图 6・385

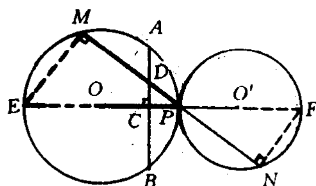


图 6・386

上，所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 由于两条重合的相乘线段必须要有一公共端点，而根据 MN 和 OO' 相交于 P，可知应将 P 点取作公共端点，于是 $PD\cdot MN=PD(PM+PN)=PD\cdot PM+PD\cdot PN$. 现在由 PD、PM 这一组重叠的相乘线段具有公共端点 P，则添加逆平行线型相似三角形的方法就是过端点和内分点作逆平行线. 这时如取过内分点 D 的 DC 为逆平行方向线段，则逆平行线就应过端点 M 作，也就是过 M 作 ME 使 $\angle PME=\angle PCD=90°$，显然这时就出现了 90°的圆周角，因而它所对的弦就应是⊙O 的直径，从作图的方便来看，也就可以延长 PO 交⊙O 于 E 并连结 ME，即可得 $\angle PME=90°$，$\triangle PDC\backsim\triangle PEM$、$PD\cdot PM=PC\cdot PE=2PC\cdot PO$. 根据同样的道理，延长 OO' 交⊙O' 于 F，连结 FN 后，可得 $\triangle PCD\backsim\triangle PNF$，$PD\cdot PN=PC\cdot PF=2PC\cdot PO'$，从而就可完成分析.

本题的分析也可以从 $PC\cdot OO'=PC\cdot(PO+PO')=PC\cdot PO+PC\cdot PO'$ 开始，那末由 PC、PO 这一组相乘线段重叠，也可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 由于 PC、PO 具有公共端点 P，所以添加的方法也是过端点和内分点作逆平行线，于是取过

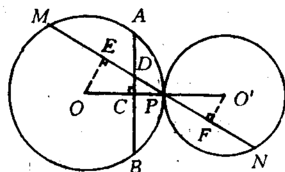


图 6・387

内分点 C 的 CD 为逆平行方向线段，逆平行线就可以过端点 O

作，也就是过 O 作 $OE \perp PM$，垂足是 E，就有 $\angle PEO = \angle PCD = 90°$，$\triangle PCD \backsim \triangle PEO$，$PC \cdot PO = PD \cdot PE$，但我们可得 $PE = \frac{1}{2}PM$，所以 $PC \cdot PO = \frac{1}{2}PD \cdot PM$. 根据同样的道理，过 O' 作 $O'F \perp PN$ 垂足是 F，也可得 $PC \cdot PO' = \frac{1}{2}PD \cdot PN$，从而也可证明结论.

例 49 已知：正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 上的一点，$BE = \frac{1}{3}BC$，F 是 DC 的延长线上一点，$CF = \frac{1}{2}CD$. FB 交 AE 的延长线于 G. 求证：G 在正方形 $ABCD$ 的外接圆上.

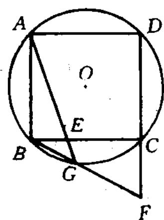


图 6・388

分析：本题要证明 G 在正方形 $ABCD$ 的外接圆上，就是要证明 B、G、C、D 四点共圆. 于是根据圆周角的基本图形的性质，连结 BD、GC 后，应证 $\angle FGC = \angle FDB$，这样就出现了 GC 应是 $\triangle FDB$ 内的边

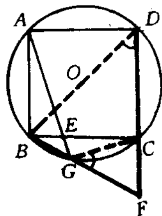


图 6・389

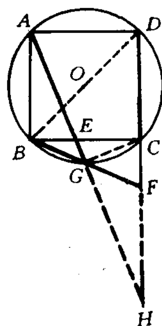


图 6・390

DB 的逆平行线，从而可应用逆平行线型相似三角形进行证明，也就是要证 $\triangle FGC \backsim \triangle FDB$，并进一步应转而证明 $\angle FGC = \angle FDB$

的等价性质 $FG \cdot FB = FC \cdot FD$. 但根据条件 $FC \cdot FD = \frac{1}{2}CD \cdot \frac{3}{2}CD = \frac{3}{4}CD^2$，而 $FB = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{CD^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}CD$. 从而问题就成为要证明 $FG = \frac{FC \cdot FD}{FB} = \frac{3\sqrt{5}}{10}CD$. 同时也就是要证 $BG = \frac{\sqrt{5}}{2}CD - \frac{3\sqrt{5}}{10}CD = \frac{\sqrt{5}}{5}CD$，所以又应证 $\frac{BG}{FG} = \frac{2}{3}$. 这样又出现了这一组相比线段 BG、FG 重叠在一直线上，所以又可添加平行线型相似三角形进行证明. 如取过端点 B 的线段 BA 为平行方向线段，则平行线可过另一端点 F 作，由于已知 $BA \parallel FD$，所以延长 AG 交 DF 的延长线于 H，即可得 $\triangle ABG \backsim \triangle HFG$，$\frac{BG}{FG} = \frac{AB}{HF}$，从而又应证明 $\frac{AB}{HF} = \frac{2}{3}$，而 $CF = \frac{1}{2}AB$，所以又应证 $HC = 2AB$. 而这是两条平行线段，且它们四个端点两两的连线在 E 点相交，所以又可应用平行线型相似三角形的性质进行证明，也就是可得 $\triangle ABE \backsim \triangle HCE$，$\frac{AB}{HC} = \frac{BE}{CE}$，但已知 $CE = 2BE$，分析完成.

例 50 已知：PA 与 $\odot O$ 相切于 A，割线 PBC 交 $\odot O$ 于 B、C，$AD \perp PO$，垂足是 D，AD 交 BC 于 E. 求证：$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{2}{PE}$.

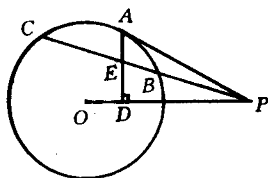


图 6 · 391

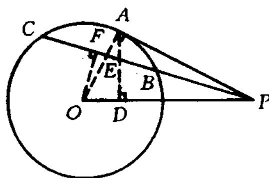


图 6 · 392

分析：本题条件中给出了 PA 与 $\odot O$ 相切于 A，PBC 是割线，

所以可应用切割线定理得 $PA^2=PB\cdot PC$. 又可应用切线的性质连结 OA 后得 $\angle OAP=90^\circ$，而已知 $AD\perp PO$，所以 AD 就成为 $Rt\triangle POA$ 的斜边上的高，从而又可得 $PA^2=PD\cdot PO$，$PB\cdot PC=PD\cdot PO$，接下来的问题就应解决 PD、PO 与 PE 之间的关系. 由于 PD、PO 这一组相乘线段现在重叠在一直线上，所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 由于 PD、PO 有公共端点 P，所以添加的方法应是过端点和内分点作逆平行线，于是可取过内分点的 DE 为逆平行方向线段，则逆平行线可过端点 O 作. 根据 $\angle PDE=90^\circ$，所以过 O 作 $OF\perp BC$，垂足是 F，即可得 $\angle PFO=\angle PDE=90^\circ$，$\triangle PED\backsim\triangle POF$，$PD\cdot PO=PE\cdot PF$，又因为 $BF=CF$，所以 $PF=\dfrac{1}{2}(PB+PC)$，从而通过 $PB\cdot PC=PE\cdot\dfrac{1}{2}(PB+PC)$，就可以证明结论.

例 51 已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle A$ 的外角平分线，BC 的垂直平分线交 BC 于 F，交 DA 的延长线于 G. 求证：B、C、G、A 四点共圆.

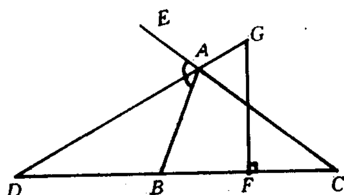


图 6・393

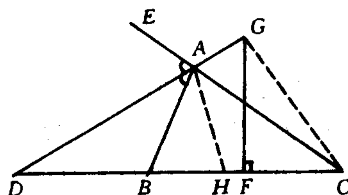


图 6・394

分析：本题要证 B、C、G、A 四点共圆，所以根据圆周角的基本图形的性质，连结 CG 后应证 $\angle DAB=\angle DCG$. 但这两个角相等一出现，就出现了 AB 是 $\triangle DCG$ 内一条边 CG 的逆平行线，从而就可应用逆平行线型相似三角形进行证明，也就是应证 $\triangle DAB\backsim\triangle DCG$，也就应转而证明 $\angle DAB=\angle DCG$ 的等价性质 $DA\cdot DG$

$=DB\cdot DC$. 但 DA 和 DG 这一组相乘线段现在重叠在一直线上，且有公共的端点 D，所以又可添加逆平行线型相似三角形进行证明，添加的方法是过端点和内分点作逆平行线. 于是取过端点 G 的线段 GF 为逆平行方向线段，那末逆平行线就可以过内分点 A 作，由于 $\angle DFG=90°$，所以过 A 作 DG 的垂线交 BC 于 H，就有 $\angle DAH=\angle DFG=90°$，$\triangle DAH\backsim\triangle DFG$，$DA\cdot DG=DH\cdot DF$，问题就成为要证 $DB\cdot DC=DH\cdot DF$. 而由条件 AD 是 $\angle A$ 的外角平分线，且 $\angle DAH=90°$，所以 AH 是 $\angle A$ 的角平分线，于是可应用三角形的内外角平分线性质得 $\frac{BH}{CH}=\frac{BD}{CD}$，而 $DH\cdot DF=(DB+BH)(DB+BF)$，所以就要先讨论 BH 和 BD、DC 的关系，从而应先将 CH 消去，于是可得 $\frac{BH}{BH+CH}=\frac{BD}{BD+CD}$，$\frac{BH}{BC}=\frac{BD}{BD+CD}$，$BH=\frac{BD\cdot BC}{BD+CD}$，代入上式可得 $DH\cdot DF=\left(DB+\frac{BD\cdot BC}{BD+CD}\right)(DB+BF)=DB\left(1+\frac{BC}{BD+CD}\right)(DB+BF)=DB\cdot\frac{BD+CD+BC}{BD+CD}\cdot(DB+BF)=DB\cdot\frac{2DC}{2BD+BC}\cdot\left(DB+\frac{1}{2}BC\right)=DB\cdot DC$，分析完成.

例 52 已知：过$\square ABCD$ 的顶点 A 作$\odot O$ 分别交 AB、AC、AD 于 E、F、G. 求证：$AE\cdot AB+AG\cdot AD=AF\cdot AC$.

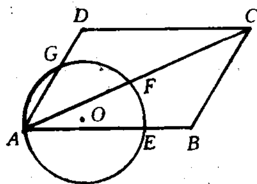


图 6・395

分析：本题要证明的结论是线段之间两两积的和，所以实质上也是线段之间的比例关系. 经过描图可以发现三组相乘线段分别重叠在一直线上，从而可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 由 AE、AB 这一组重叠的相乘线段具有公共端点 A，所以添加的方法是过端点和内分点作

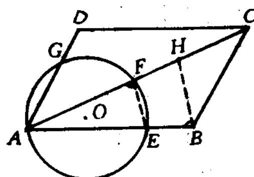


图 6・396

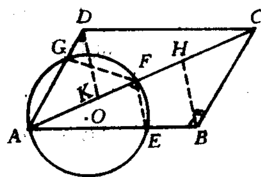


图 6・397

逆平行线，于是连结 EF，并取这条过内分点 E 的线段 EF 为逆平行方向线段，则逆平行线就可过端点 B 作，也就是以 BA 为边，B 为顶点，作 $\angle ABH=\angle AFE$ 交 AC 于 H，即可得 $\triangle AFE\backsim\triangle ABH$，$AE\cdot AB=AF\cdot AH$. 根据同样的道理，连结 FG，并以 DA 为边，D 为顶点作 $\angle ADK=\angle AFG$ 且交 AC 于 K，就可得 $\triangle AFG\backsim\triangle ADK$，$AG\cdot AD=AK\cdot AF$. 从而就得 $AE\cdot AB+AG\cdot AD=AF\cdot AH+AK\cdot AF=AF(AH+AK)$，这样问题就转化为要证 $AH+AK=AC$，$AK=CH$. 但这两条相等线段位于这个平行四边形的中心对称部分，所以可应用中心对称型全等三角形进行证明，也就是要证 $\triangle DAK\cong\triangle BCH$，由条件可得 $AD=DB$，$\angle DAK=\angle BCH$，所以还要证明一个条件. 由 A、E、F、G 四点共圆，可得 $\angle EAG+\angle EFG=180°$，而由 $DA\parallel CB$，可得 $\angle EAG+\angle ABC=180°$，所以 $\angle EFG=\angle ABC$，但 $\angle EFA=\angle ABH$，所以 $\angle AFG=\angle CBH$，$\angle ADK=\angle CBH$，从而可完成分析.

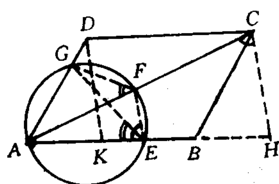


图 6・398

如果我们从 AF、AC 这一组重叠的相乘线段出发进行分析，则由于 AF、AC 有公共端点 A，所以添加逆平行线型相似三角形的方法也是过端点和内分点作逆平行线，于是连接 EF，取这条过内分点 F 的 FE 为逆平行方向线段，则逆平行线可过另一个端点 C 作，也就是过 C 作射线 CH，使

$\angle ACH=\angle AEF$，并交 AB 的延长线于 H，就可得$\triangle AEF\backsim\triangle ACH$，$AF\cdot AC=AE\cdot AH$. 问题就成为要证 $AE\cdot AB+AG\cdot AD=AE\cdot AH$. 根据同样的道理，连结 EG，作$\angle ADK=\angle AEG$ 并交 AB 于 K 后，可得$\triangle AEG\backsim\triangle ADK$，$AG\cdot AD=AK\cdot AE$，这样问题又成要证 $AE\cdot AB+AE\cdot AK=AE\cdot AH$，$AB+AK=AH$，也就是要证 $AK=BH$. 由条件可得 $DA=CB$，$\angle DAK=\angle CBH$，所以$\triangle DAK$ 和$\triangle CBH$ 应是一对平移型全等三角形. 但证明这对三角形全等，还必须另外再证一个条件. 由$\angle ADK=\angle AEG$，可得$\angle DKA=\angle EGA$，由 A、G、F、E 四点共圆，可得$\angle EGA=\angle EFA$，而$\angle EFA=\angle CHB$，所以$\angle DKA=\angle CHB$，从而分析可以完成.

在应用圆周角的基本图形的性质时，也可连结 FG，得$\angle GFA=\angle GEA=\angle KDA$，从而通过$\angle EFG+\angle EAG=180°$，$\angle EAG+\angle ADC=180°$，得$\angle CDK=\angle AFE=\angle AHC$，从而完成分析.

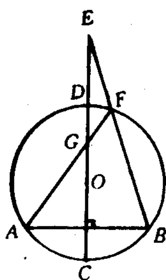


图 6・399

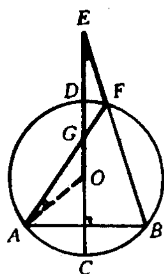


图 6・400

例 53 已知：AB 是$\odot O$ 的弦，CD 是直径，$AB\perp CD$，E 是 CD 的延长线上一点，BE 交$\odot O$ 于 F，AF 交 CD 于 G. 求证：$EG\cdot OG=FG\cdot AG$.

分析：本题要证的结论 $EG\cdot OG=FG\cdot AG$ 是线段之间的比例关系，经过描图可以发现，两组相乘线段都分别重叠在一直线

上，所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 由于这两组重叠的相乘线段有一个公共的内分点 G，所以添加的方法是过端点和端点作逆平行线，也就是将四个端点两两连结后，证明这两条连线是逆平行线. 于是连结 AO，问题就成为应证明$\triangle EGF \backsim \triangle AGO$，也就是要证明 $EG \cdot OG = FG \cdot AG$ 的等价性质$\angle E = \angle GAO$. 由条件 $EC \perp AB$、$\angle E + \angle EBA = 90°$，所以又应证明$\angle GAO + \angle EBA = 90°$. 这是两个角的和的问题，所以根据两个角的和的定义，可将这两个角拼起来.

如考虑将$\angle GAO$ 拼到$\angle FBA$ 的边 BF 的外面，则应出现一

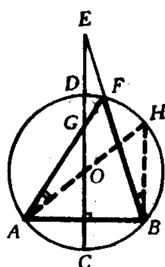


图 6・401

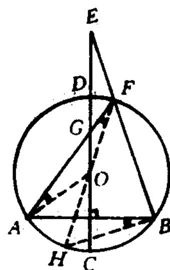


图 6・402

个 90°的圆周角，所以可直接应用圆的直径来作图，也就是延长 AO 交$\odot O$ 于 H，并连结 HB，则可得$\angle FBH + \angle FBA = 90°$，而由 A、B、H、F 四点共圆，又可得$\angle HBF = \angle GAO$，所以分析完成.

如考虑将$\angle GAO$ 拼到$\angle FBA$ 的 BA 边的外侧，则也可出现一个 90°的圆周角，所以连结 FO，并延长 FO 交$\odot O$ 于 H，连结 BH，就可得$\angle ABH + \angle FBA = 90°$，而由 A、H、B、F 四点共圆，可得$\angle ABH = \angle AFH$，又因 $OF = OA$，$\angle AFH = \angle GAO$，分析完成.

如考虑将$\angle FBA$ 拼到$\angle GAO$ 的 AO 边的外侧，则连结 FO，延长 FO 交$\odot O$ 于 H，连结 AH. 就可得$\angle GAO + \angle OAH = 90°$.

而由 A、H、B、F 四点共圆，可得 $\angle FBA = \angle FHA$，再由 $OA = OH$，又可得 $\angle OAH = \angle FHA$，所以分析可以完成.

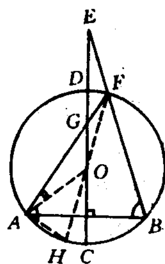


图 6・403

如考虑将 $\angle FBA$ 拼到 $\angle GAO$ 的 AG 边的外侧，则应出现 OA 的垂线，于是过 A 作 $HA \perp OA$，HA 必定与 $\odot O$ 相切于 A，AF 是过切点的弦，所以应用弦切角的基本图形的性质可得 $\angle HAF = \angle ABF$，而 $\angle HAF + \angle GAO = 90°$，所以分析可以完成.

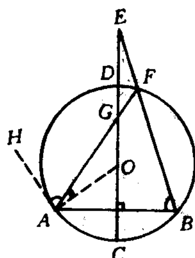


图 6・404

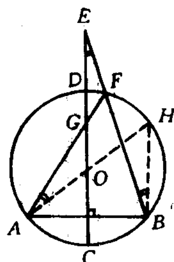


图 6・405

如果我们直接讨论证 $\angle E = \angle GAO$，则由于 $\angle GAO$ 是圆周角，所以可应用圆周角的基本图形的性质进行证明. 而现在 $\angle GAO$ 的一边尚未与圆相交，所以根据圆周角的定义，应延长 AO 交 $\odot O$ 于 H，并连结 BH，就可得 $\angle GAO = \angle FBH$，且 $\angle ABH = 90°$，而 $EC \perp AB$，所以 $EC /\!/ HB$，$\angle E = \angle FBH$，所以 $\angle E = \angle GAO$，分析也就完成.

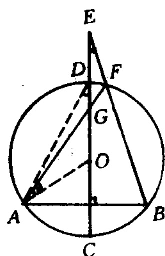


图 6・406

在证明 $\angle E = \angle GAO$ 时，如考虑 $\angle E$ 是一个圆外角，则根据圆外角的性质，$\angle E$ 的度数应等于 $\overset{\frown}{BC}$ 与 $\overset{\frown}{DF}$ 的度数之差的一半. 但已知 $CD \perp$

AB，且 CD 是$\odot O$的直径，所以$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$. 所以$\angle E$就应等于$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{DF}$所对的圆周角的差，于是连结 AD，可得$\angle E=\angle ODA-\angle DAG$. 但 $OD=OA$，$\angle ODA=\angle OAD$，所以$\angle E=\angle ODA-\angle DAG=\angle OAD-\angle DAG=\angle GAO$.

本题的分析在证明$\triangle EGF\backsim\triangle AGO$时，也可以转而证明 $EG\cdot OG=FG\cdot AG$ 的等价性质$\angle EFG=\angle AOG$. 由条件 A、C、B、F 四点共圆，连结 AC、BC 后可得$\angle EFG=\angle ACB$. 另一方面由 CD 垂直于 AB，且 CD 是$\odot O$的直径，可得$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，而$\angle AOD$是$\overset{\frown}{AD}$所对的圆心角，所以$\angle AOG=\angle ACB$，从而也可以完成分析.

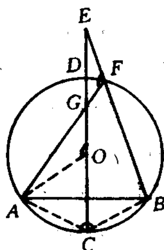


图 6・407

例 54 已知：AE 是$\odot O$的直径，BC 与$\odot O$相切于 B，$CO\perp AE$ 交 AB 于 D.

求证：$2CD\cdot OD=AD\cdot BD$.

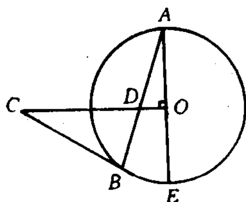


图 6・408

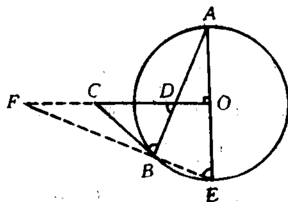


图 6・409

分析：本题要证明的结论中出现了线段积的 2 倍，所以就是线段之间的倍半关系，然而在这个比例式中，这个数字 2 是可以和任何一条线段组合在一起的. 如考虑将 2 与 CD 组合，则根据线段倍半关系的定义，作出 CD 的 2 倍，也就是延长 DC 到 F，使 $FC=CD$，则 $FD=2CD$，问题就成为要证 $FD\cdot OD=AD\cdot BD$. 经过描图可以发现两组相乘线段分别重叠在一直线上，所以可添加逆平

行线型相似三角形进行证明.由于这两组重叠的相乘线段有一个公共的内分点 D,所以添加的方法是将这四个端点两两连结起来,于是连结 BF,问题就应证$\triangle ADO\backsim\triangle FDB$,并进一步应转化为证 $FD\cdot OD=AD\cdot BD$ 的等价性质$\angle AOD=\angle FBD$.但已知$\angle AOD=90°$,所以就要证$\angle FBD=90°$.由条件 CB 与$\odot O$ 相切于 B,BA 是过切点的弦,所以应用弦切角的基本图形的性质,连结 BE 后,有$\angle CBD=\angle E$.而由 AE 是$\odot O$ 的直径,B 是半圆上的点,又可得$\angle ABE=90°$,而$\angle AOD=90°$,所以 O、D、B、E 四点共圆,$\angle CDB=\angle E$,从而就可得$\angle CBD=\angle CDB$,$CD=CB$,而我们已作 $CF=CD$,所以$\angle FBD=90°$就可以证明.

如考虑将 2 与 OD 组合,则延长 DO 到 F,使 $OF=OD$,则 $FD=2OD$,问题就成为要证$CD\cdot FD=AD\cdot BD$.经过描图后也发现两组相乘线段分别重叠在一直线上,从而也可以添加逆平行线型相似三角形进行证明,于是连结 AF,应证$\triangle AFD\backsim\triangle CBD$,也就应证$\angle AFD=\angle CBD$.但由 $AO\perp DF$,$DO=FO$ 可得$\triangle ADF$ 是等腰三角形,所以又要证$\triangle CBD$ 是等腰三角形,$CB=CD$,由于这一性质可以证明,所以分析可完成.

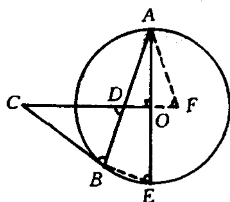


图 6・410

如考虑将 2 与 AD 组合,则结论可转化为$CD\cdot OD=\frac{1}{2}AD\cdot BD$.于是根据线段倍半关系的定义应将$\frac{1}{2}AD$ 作出,即取 AD 的中点 F,则 FD 就等于$\frac{1}{2}AD$,问题就成为要证 $CD\cdot OD=BD\cdot FD$.经过描图可以发现,两组相乘线段分别重叠在一直线上且在

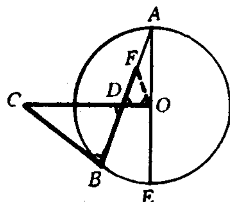


图 6・411

内分点 D 相交，从而可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 于是连结 OF，问题就成为要证 $\triangle CDB \backsim \triangle FDO$. 但由条件 $AE \perp CO$，可知 F 为直角 $\triangle ADO$ 的斜边的中点，因此 $FD=FO$，从而只要证明 $CD=CB$，而这个性质是可以证明的.

如考虑将 2 与 BD 组合，那就要将结论转化为 $CD \cdot OD = AD \cdot \frac{1}{2}BD$. 于是取 BD 的中点 F，然后应证 $CD \cdot OD = AD \cdot FD$. 经过描图可以发现，两组相乘线段分别重叠在一直线上且在内分点 D 相交，从而可添加逆平行线型相似三角形进行证明，于是连结 CF，应证 $\triangle ADO \backsim \triangle CDF$，从而又应证明 $CD \cdot OD = AD \cdot FD$ 的等价性质 $\angle CFD = \angle AOD = 90°$，但因 $BF=DF$，所以只要证明 $\triangle CBD$ 是等腰三角形. 由于这个性质可以证明，分析完成.

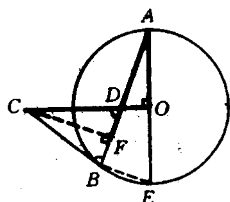


图 6・412

例 55 已知：等边 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，M、N 分别是 BC、AC 的中点，直线 MN 交 $\odot O$ 于 D、E，AD 交 BC 于 F，AE 的延长线交 BC 的延长线于 G. 求证：$CF^2 = BF \cdot BC$；$CG^2 = BG \cdot BC$.

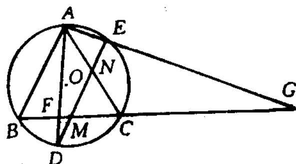


图 6・413

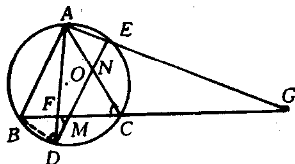


图 6・414

分析：由条件 M、N 是 BC、AC 的中点，所以应用三角形中位线的性质可得 $MN \parallel AB$，$\triangle CMN \backsim \triangle CBA$，而已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以可得 $\angle BMD = \angle CMN = 60°$，又因为 A、B、D、C 四点共圆，所以连结 BD 后，有 $\angle ADB = \angle ACB = 60°$，$\angle BDF =$

$\angle BMD$,这样就出现了 DF 是$\triangle BDM$ 内过顶点 D 的边 MD 的逆平行线,所以得$\triangle BDF \backsim \triangle BMD$, $BD^2 = BF \cdot MB = BF \cdot \frac{1}{2}BC$, $BF \cdot BC = 2BD^2$,问题就转化为要证 $CF^2 = 2BD^2$.

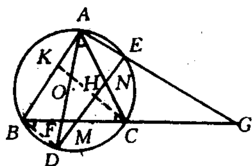


图 6・415

由条件 $BM = CM$,且 BC、DE 在 M 点相交,就出现了两条相等线段在一组对顶角的两边且成一直线,所以可添加中心对称型全等三角形进行证明. 于是过端点 C 作 $CK \parallel DB$ 交 DE、AB 于 H、K,就可得$\triangle BDM \cong \triangle CHM$, $CH = KH = BD$, $KC = 2BD$. 且$\angle BCK = \angle CBD = \angle CAD$, CK, AF 是与等边$\triangle ABC$ 的两边交成等角的线段,所以就出现了一对绕等边三角形的中心旋转 60°的全等三角形,也就是由 $AC = CB$. $\angle ACF = \angle CBK = 60°$ 和$\angle CAF = \angle BCK$,可得$\triangle CAF \cong \triangle BCK$, $CF = BK$,这样问题就转化为要证 $BK^2 = 2BD^2 = 2BD \cdot BD = KC \cdot KH$. 经过描图,又可发现两组相乘线段分别重叠在一直线上,且有一公共端点 K,同时也出现了线段 BK 的平方,所以可添加由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明,于是连结 BH,问题就成为要证 $\angle KBH = \angle KCB$. 由 A、B、D、C 四点共圆,连结 DC 后可得$\angle BAD = \angle BCD$,而由 $BD \perp\!\!\!= HC$,可得四边形 $BDCH$ 是平行四边形, $\angle BCD = \angle CBH$,所以 $\angle BAD = \angle CBH$,而 $\angle BAD = \angle ACK$,从而就可证明$\angle CBH = \angle ACK$, $\angle KBH = \angle KCB$,分析完成.

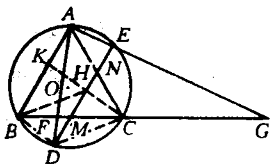


图 6・416

本题给出了条件 A、B、D、C 四点共圆,所以应用圆周角的基本图形的性质,连结 BD 后可得$\angle DBC = \angle DAC$,同时由 M、N 分

别是 BC、AC 的中点，又可证明$\angle BMD=\angle NMC=\angle MCN=60°$，所以$\triangle BDM\backsim\triangle AFC$，$\frac{BD}{AF}=\frac{DM}{CF}=\frac{BM}{AC}=\frac{1}{2}$，又因 $DM\parallel BA$，$\triangle DMF\backsim\triangle ABF$，$\frac{FM}{FB}=\frac{DM}{AB}$，而 $FM=CF-CM=CF-\frac{1}{2}AB$，

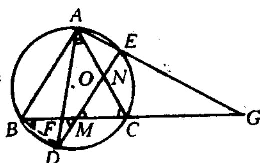


图 6・417

$BF=AB-CF$，$DM=\frac{1}{2}CF$，所以$\frac{CF-\frac{1}{2}AB}{AB-CF}=\frac{CF}{2AB}$，$2AB\cdot CF-AB^2=AB\cdot CF-CF^2$，从而就可证明 $CF^2=AB^2-AB\cdot CF=AB\cdot(AB-CF)=BF\cdot BC$.

由条件 A、B、C、E 四点共圆，所以应用圆周角的基本图形的性质，可得连结 CE 后有$\angle DEC=\angle DAC$. 又因 $DE\parallel BA$，所以延长 CE 交 BA 的延长线于 H 后，可得$\angle DEC=\angle H$，$\angle DAC=\angle H$. 又因为$\angle AEC=180°-\angle ABC=120°$，$\angle ACG=180°-\angle ACB=120°$，所以$\angle AEC=\angle ACG$，

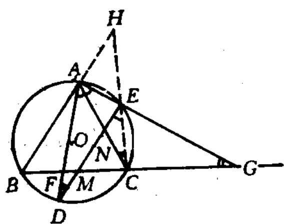


图 6・418

$\angle ACE=\angle AGC$. 从而在$\triangle HAC$ 和$\triangle ACG$ 中可推得$\angle CAG=\angle AHC$，那末就有$\angle FAC=\angle GAC$，应用三角形的内角平分线性质就可得$\frac{FC}{GC}=\frac{AF}{AG}$. $CG=\frac{FC\cdot AG}{AF}$. 又因 $AB\parallel ED$，所以$\angle BAD=\angle ADE=\angle ACE=\angle BGA$，所以 AF 也是$\triangle ABG$ 内过顶点 A 的边 GA 的逆平行线，所以$\triangle BAF\backsim\triangle BGA$，$\frac{AF}{GA}=\frac{AB}{GB}$，于是就有 $CG=\frac{FC\cdot BG}{AB}$，$CG^2=\frac{FC^2\cdot BG^2}{AB^2}$，但我们已证 $CF^2=BF\cdot BC$，而 $BC=AB$，所以 $CG^2=\frac{BF\cdot BG^2}{AB}$. 而由$\angle BAF=\angle BGA$，$\triangle BAF\backsim$

$\triangle BGA$，还可得 $BA^2=BF\cdot BG$，所以 $CG^2=\dfrac{BA^2\cdot BG}{AB}=BG\cdot BC$ 就可以证明.

例 56 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=20°$. 求证：$AB^3+BC^3=3\cdot BC\cdot AB^2$.

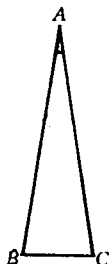


图 6・419

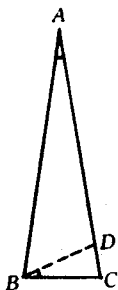


图 6・420

分析：本题要证明的结论是线段之间的立方和关系，所以可首先考虑降次，于是可将要证的结论转化为$\dfrac{AB^3}{BC}+BC^2=3AB^2$. 于是经描图可发现 BC 和 BC，AB 和 AB 这两组相乘线段都分别重叠在一直线上，所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 由于出现了线段 BC 的平方，所以可添加过三角形顶点的逆平行线，也就是以 BC 为边，B 为顶点作 $\angle CBD=\angle A$ 交 AC 于 D 后，可得$\triangle CBD\backsim\triangle CAB$，$CB^2=CD\cdot CA$. 但已知$\angle A=20°$，所以$\angle CBD=20°$，而由 $AB=AC$，可得$\angle ABC=\angle ACB=80°$，所以$\angle ABD=80°-20°=60°$. 这样又可以应用特殊角三角形的基本图形的性质进行证明，于是过特殊角，即$\angle ABD$ 一边上的点 A 向另一边作垂线，也就是过 A 作 $AE\perp BD$，交 BD 的延长线于 E，就可得 $BE=\dfrac{1}{2}AB$，$AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$. 而 $BD=BC$，所以 $AD^2=$

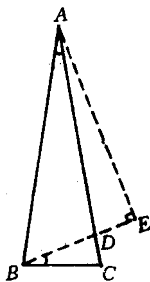


图 6・421

$AE^2+DE^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}AB\right)^2+\left(\frac{1}{2}AB-BC\right)^2=AB^2-AB\cdot BC+BC^2$. 另一方面又有 $AD^2=(AC-CD)^2=(AB-CD)^2=AB^2-2AB\cdot CD+CD^2$，而由 $BC^2=CD\cdot CA$，又可得 $CD=\frac{BC^2}{CA}$，所以 $AD^2=AB^2-2BC^2+\frac{BC^4}{AB^2}=AB^2-AB\cdot BC+BC^2$，$\frac{BC^4}{AB^2}=-AB\cdot BC+3BC^2$，就可证明结论.

如考虑出现的是 AB 的平方，则逆平行线可过顶点 A 作，也就是作 $\angle BAD=\angle B=80°$ 交 BC 的延长线于 D，可得 $\triangle BAC\backsim\triangle BDA$，$BA^2=BC\cdot BD$. 由于这时出现了 $\angle DAC=60°$，所以过 D 作 $DE\perp AC$ 交 AC 的延长线于 E，可得 $AE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BD$，$DE=\frac{\sqrt{3}}{2}BD$，从而有 $CD^2=DE^2+CE^2=BD^2-BD\cdot AB+AB^2$. 而由 $CD=BD-BC$，又可得 $CD^2=BD^2-2BD\cdot BC+BC^2=BD^2-2AB^2+\left(\frac{BA^2}{BD}\right)^2=BD^2-BD\cdot AB+AB^2$，所以有 $AB^3+BD^3=3AB\cdot BD^2$. 但由 $\triangle ABC\backsim\triangle DAB$，可得 $\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}$，$BD=\frac{AB^2}{BC}$，所以 $AB^3+\frac{AB^6}{BC^3}=3AB\cdot\frac{AB^4}{BC^2}$，也就可以证明结论.

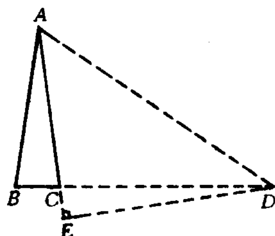


图 6・422

例 57 已知：AB 是⊙O 的直径，CA 与⊙O 相切于 A. 且 $AC=AB$，OC 交⊙O 于 D，BD 的延长线交 AC 于 E. 求证：CD 是 $\triangle ADE$ 的外接圆的切线，$AE=CD$.

分析：本题要证明 CD 是 $\triangle ADE$ 的外接圆的切线，而 CEA 是这个圆的割线，所以可应用由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明. 于是连结 AD 后，应证 $\angle CDE=\angle CAD$. 由条件 CO、BE 相交于 D，$\angle CDE=\angle ODB$，由 $OD=$

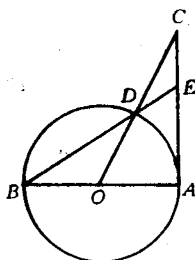


图 6・423

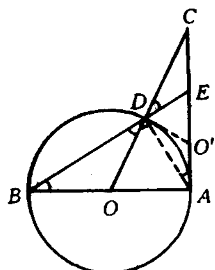


图 6・424

OB，得$\angle ODB=\angle OBD$. 又因为 AB 是$\odot O$ 的直径 D 是半圆上的点，$\angle ADB=90°$，且 EA 与$\odot O$ 相切于 A，$\angle EAB=90°$，$\angle EAD=\angle ABD$，所以$\angle CDE=\angle CAD$ 可以证明.

由$\angle ADB=90°$，B、D、E 成一直线，可得$\angle ADE=90°$，所以$\triangle ADE$ 的外接圆就是以 AE 为直径的圆，所以要证明 $CD=AE$，就是要证 CD 也是和这个圆的直径相等，也就应等于这个圆的半径的 2 倍. 于是应将这个圆的半径作出，也就是取 AE 的中点 O'，并连结 $O'D$. 就有 $O'D=O'E=O'A$，问题就应证 $CD=2O'D$. 但由 $O'D=O'A$，可得$\angle O'DA=\angle O'AD$，而 $OD=OA$，$\angle ODA=\angle OAD$，$\angle OAD+\angle O'AD=90°$，所以$\angle ODA+O'DA=90°$，$\angle O'DC=90°$，这样 DO' 也就成为$\triangle OAC$ 内边 AO 的逆平行线，所以可证$\triangle CO'D\backsim\triangle COA$，根据条件有 $AC=2OA$，所以 $CD=2O'D$，分析就可以完成.

例 58 已知：矩形 $ABCD$ 中，$CE\perp BD$ 交 BD 于 E，$\angle BAD$ 的平分线交 BD 于 G，交 EC 的延长线于 F. 求证：$\dfrac{FG}{AG}-\dfrac{AC}{CE}=1$.

分析：本题要证明的结论是线段之间两两比的差，实质上也是线段之间的比例关系，经过描图可以发现，相比两线段 FG 和 AG 重叠在一直线上，从而可添加平行线型相似三角形进行证明. 由于 EG 和 AF 在内分点 G 相交，所以平行线可过端点作，如取过端点

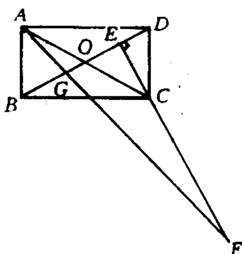


图 6・425

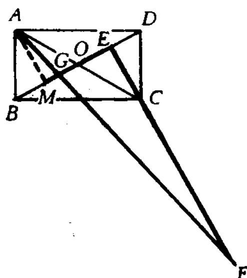


图 6・426

F 的线段 FE 为平行方向线段，则平行线可过另一个端点 A 作，也就是过 A 作 $AM \parallel EF$ 交 BD 于 M，得 $AM \perp BD$、$\triangle AGM \backsim \triangle FGE$ 和 $\frac{FG}{AG}=\frac{FE}{AM}$. 而由 $AM \parallel EC$、$AO=CO$，又出现了 $\triangle AOM$ 和 $\triangle COE$ 是一对中心对称型的全等三角形，则 $AM=CE$. 于是 $\frac{FE}{AM}=\frac{FC+CE}{AM}=\frac{FC}{AM}+\frac{AM}{AM}=\frac{FC}{CE}+1$. 而我们要证明 $\frac{FG}{AG}=\frac{AC}{CE}+1$，这样问题就成为要证 $FC=AC$，从而又只要证明 $\angle F=\angle CAF$. 而 $\angle F=\angle MAG$. 由 AM 是 $Rt\triangle ABD$ 的斜边上的高，可得 $\angle BAM=\angle ADB$，已知四边形 $ABCD$ 是矩形，又可得 $\angle ADB=\angle OAD$，$\angle BAM=\angle OAD$，再由 AF 是 $\angle BAD$ 的角平分线，就可得 $\angle MAG=\angle CAF$，所以分析可以完成.

例 59 已知：AB 是 $\odot O$ 的直径，C 为 $\odot O$ 上的一点，CD 是 $\odot O$ 的切线，过 A 作 $AE \perp CD$，垂足为 D 且交 BC 的延长线于 E. 求证：$AE=AB$.

分析：由 AB 是 $\odot O$ 的直径，C 是 $\odot O$ 上的一点，就可应用半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明，于是连结 AC 后，可得 $\angle ACB=90^\circ$，而 B、C、E 成一直线，所以 $\angle ACE$ 也等于 90°，而已知 $CD \perp AE$，这样 CD 就成为直角 $\triangle AEC$ 的斜边上的高，应用直角三角形斜边上的高的基本图形性质，可得 $\angle ACD=\angle E$. 又因为

图 6・427

图 6・428

DC 与⊙O 相切于 C,CA 是过切点的弦,所以应用弦切角的基本图形的性质,又可得$\angle ACD=\angle B$,从而可得$\angle B=\angle E$,结论就可以证明.

例 60 已知:AB 是⊙O 的直径,AG 是任一弦,C 是$\overset{\frown}{AG}$的中点,$CD\perp AB$ 交 AG 于 E,D 是垂足,BC 交 AG 于 F.

求证:$AE=FE$.

图 6・429

分析:由条件 AB 是⊙O 的直径,C 是半圆上的一点,所以连结 AC 后,可得$\angle ACB=90°$,而我们要证明 $AE=FE$,这样就出现了 E 应是直角△AFC 的斜边 AF 的中点,从而就可以应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明,即要证明 AE、FE 都和 CE 相等,这样又应转而证 $AE=FE$ 的等价性质$\angle CAE=\angle ACE$. 由条件 $CD\perp AB$,所以 CD 就成为直角△ABC 的斜边上的高,应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质,可得$\angle ACE=\angle B$,从而问题又转化为要证$\angle CAE=\angle B$. 因这两个角都是⊙O 的圆周角,且它们所对的弧$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{GC}$是相等的,所以就可证明这两个角相等.

图 6・430

本题在转化为要证明$\angle CAE=\angle ACE$后，由于这两个角都是圆周角，所以也可直接应用圆周角的性质进行证明，于是根据圆周角的定义，延长 CD 交$\odot O$ 于 H，这样要证明这两个角相等，就可以转化为证$\overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{CG}$，但已知$\overset{\frown}{CG}=\overset{\frown}{AC}$，而由 AB 是$\odot O$ 的直径，且 $AB\perp CH$，又可得$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AH}$，所以分析可以完成.

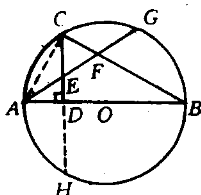


图 6・431

本题在应用直角三角形斜边上的中线的基本图形性质进行证明时，也可以转而证明 $AE=FE$ 的等价性质$\angle ECF=\angle EFC$，而$\angle EFC$ 是圆内角，它的度数等于$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BG}$的度数的一半，而$\angle BCD$ 是圆周角，于是延长 CD 交$\odot O$ 于 H，可得$\angle ECF$ 的度数等于$\overset{\frown}{BH}$的度数的一半，而 AB 是$\odot O$ 的直径，$AB\perp CH$，可得$\overset{\frown}{BH}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BG}+\overset{\frown}{CG}$，而$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CG}$，所以分析可以完成. 而在证明$\angle ECF=\angle EFC$ 时，也可以根据$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，得$\angle BCD=\angle BAC$. 而$\angle BAC$ 的度数等于$\overset{\frown}{BC}$的度数的一半，而$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BG}+\overset{\frown}{CG}=\overset{\frown}{BG}+\overset{\frown}{AC}$，从而也可以完成分析.

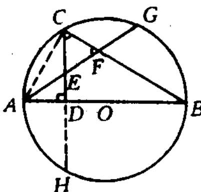


图 6・432

本题在连结 AC，并得到$\angle ACB=90°$后，也可转而证明 $AE=FE$ 的等价性质$\angle FEC=2\angle EAC$. 由条件 C、A、B、G 四点共圆，应用圆周角的基本图形的性质，连结 BG 后可得$\angle CAG=\angle CBG$. 而由 AB 是$\odot O$ 的直径，G 是$\odot O$ 上的一点，又可得$\angle AGB=90°$，而已知$\angle BDE=90°$，所以 E、D、B、G 四点共圆，$\angle FEC=\angle ABG$，这样问题就成为要证$\angle ABG=2\angle CBG$，由条件

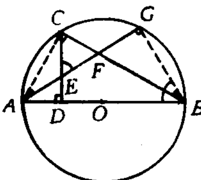


图 6・433

$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CG}$,即可证明.

例 61 已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$CD\perp AB$ 垂足是 D,角平分线 AF 交 CD、CB 于 E、F,$FG\perp AB$ 垂足是 G. 求证:四边形 $CEGF$ 是菱形.

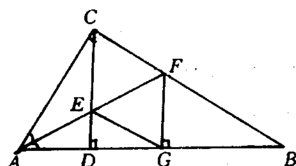


图 6·434

分析:由条件 $\angle ACB=90°$ 和 $CD\perp AB$,可得 CD 是直角 $\triangle ABC$ 的斜边上的高,所以可应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质得 $\angle ACD=\angle B$. 由条件 $\angle CAE=\angle BAE$,从而应用三角形的外角定理,可证明 $\angle CEF=\angle CFE$,$CE=CF$. 而由 AF 是 $\angle CAB$ 的平分线、$FC\perp AC$ 和 $FG\perp AB$,可得 $\triangle AFC$ 和 $\triangle AFG$ 是一对轴对称型全等三角形,所以 $FG=FC$,$FG=CE$,又因 $FG\parallel CE$,所以四边形 $CEGF$ 是平行四边形,同时它有一组邻边 CE 和 CF 相等,所以四边形 $CEGF$ 是菱形.

例 62 已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,M 是 AC 的中点,$MD\perp AB$ 交 AB 于 D. 求证:$AC^2=2AB\cdot AD$;$BD^2-AD^2=BC^2$.

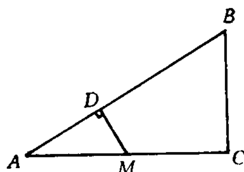


图 6·435

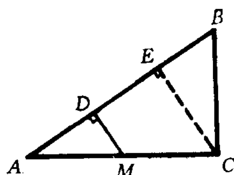


图 6·436

分析:由于要证的结论中出现了 AB 和 AD 的积的 2 倍,所以可根据线段倍半关系的定义,将线段 $2AD$ 作出,也就是在 DB 上截取 $DE=AD$,则 $AE=2AD$. 但现在 M、D 分别是 AC、AE 的中点,是多个中点问题,所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 于是连结 CE,可得 $MD\parallel CE$,从而有 $CE\perp AB$,这样

CE 就成为直角$\triangle ABC$ 的斜边上的高，于是 $AC^2=AB\cdot AE=2AB\cdot AD$. 同时又可得 $BC^2=BE\cdot AB=(BD-DE)(BD+AD)=(BD-AD)\cdot(BD+AD)=BD^2-AD^2$.

例 63 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，以 AB 为直径作$\odot O$ 交 AC 于 D，E 是 BC 上的一点，AE 交$\odot O$ 于 F. 求证：$AD\cdot AC=AF\cdot AE$.

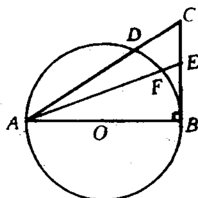


图 6・437

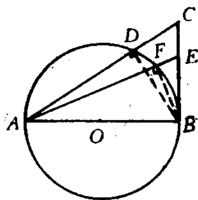


图 6・438

分析：由条件 AB 是$\odot O$ 的直径，D 是$\odot O$ 上的一点，应用半圆上的圆周角的基本图形的性质，连结 BD 后，可得$\angle ADB=90°$，而已知$\angle ABC=90°$，所以 BD 就成为 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 AC 上的高，应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，可得 $AB^2=AD\cdot AC$. 根据同样的道理，连结 BF 后，可证明 $AB^2=AF\cdot AE$，所以 $AD\cdot AC=AF\cdot AE$ 就可以证明.

本题要证明的结论是线段之间的比例关系，经过描图可以发现，两组相乘线段 AD、AC 和 AF、AE 分别重叠在一直线上，所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 由于这两组相乘线段具有公共端点 A，所以添加的方法是将端点和端点，内分点和内分点分别连结起来，于是连结 DF，问题就成为要证$\triangle AFD\backsim\triangle ACE$，也就进一步转而证 $AD\cdot AC=AF\cdot AE$ 的等价性质

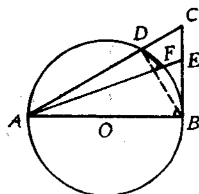


图 6・439

$\angle AFD=\angle ACE$. 但由 A、B、F、D 四点共圆，连结 BD 后可得 $\angle AFD=\angle ABD$. 而由 AB 是⊙O 的直径，又可得 $BD\perp AC$，BD 是直角△ACB 的斜边上的高，所以 $\angle ABD=\angle ACE$，从而也可完成分析.

例 64 已知：OA 是⊙O 的半径，以 OA 为直径作⊙O'，过 OA 上任意一点 B 作 OA 的垂线交⊙O、⊙O' 于 D、C. 求证：$AD^2=2AC^2$.

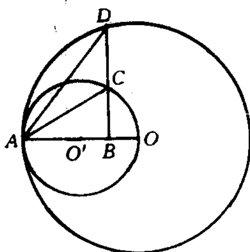


图 6・440

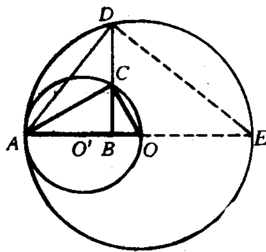


图 6・441

分析：由条件 OA 是⊙O' 的直径，C 是⊙O' 上的一点，所以应用直径的性质，连结 OC 后，可得 $\angle ACO=90°$，又因 $CB\perp OA$，所以 BC 就成为直角△AOC 的斜边 AO 上的高，于是应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质可得 $AC^2=AB\cdot AO$，从而问题就转化为应证 $AD^2=2AB\cdot AO$. 而 AO 是⊙O 的半径，$2AO$ 就应是⊙O 的直径，于是应先将⊙O 的直径作出，也就是延长 AO 交⊙O 于 E，则 $AE=2AO$，但现在 AE 是⊙O 的直径，D 是⊙O 上的一点，所以连结 DE 后，又可得 $\angle ADE=90°$，从而又有 $AD^2=AB\cdot AE=2AB\cdot AO$. 分析就可以完成.

例 65 已知：AB 是⊙O 的直径，C 是⊙O 上的一点，$CD\perp AB$ 垂足是 D，E 是 CD 上的一点，AE 的延长线交⊙O 于 F. 求证：$AC^2=AE\cdot AF$.

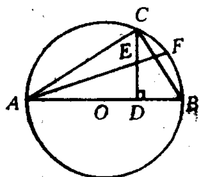


图 6・442

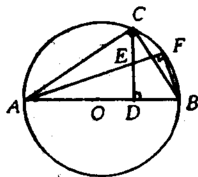


图 6・443

分析:由条件 AB 是⊙O 的直径,C 是⊙O 上的点,可得 $\angle ACB=90°$,而已知 $CD\perp AB$,所以 CD 就成为 $Rt\triangle ABC$ 的斜边上的高,从而就可得 $AC^2=AD\cdot AB$. 又因为 AB 是⊙O 的直径,F 也是⊙O 上的点,所以连结 BF 后,可得 $\angle AFB=90°$,$\angle AFB=\angle BDE$,DE 就是 $\triangle ABF$ 内边 FB 的逆平行线,从而可证 $\triangle ADE\backsim\triangle AFB$,就可得 $AE\cdot AF=AD\cdot AB$,所以结论可以证明.

本题要证的结论是线段之间的比例关系,经过描图,可以发现两组相乘线段 AC、AC 和 AE、AF 都分别重叠在一直线上,所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 由于两组重叠的相乘线段有公共端点 A,且出现了线段 AC 的平方,所以可添加由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明. 于是连结 CF,应证 $\triangle ACE\backsim\triangle AFC$,并进一步应转而证 $AC^2=AE\cdot AF$ 的等价性质 $\angle ACE=\angle AFC$. 由条件 AB 是⊙O 的直径,可得 $\angle ACB=90°$,再由 $CD\perp AB$,应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质,可得 $\angle ACD=\angle B$,再由 A、B、F、C 四点共圆,又可得 $\angle B=\angle AFC$,所以 $\angle ACE=\angle AFC$ 就可以证明.

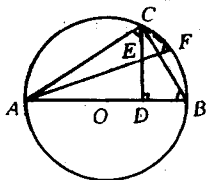


图 6・441

例 66 已知:以 AB 为直径作⊙O,过 A 作两直线交⊙O 于 C、D,交过 B 所作⊙O 的切线于 E、F. 求证:$\angle ECF=\angle EDF$.

图 6・445　　　　图 6・446

分析：由条件 AB 是⊙O 的直径，BE 是⊙O 的切线，可得 $\angle ABE=90°$，同时由 C 是⊙O 上的点，所以连结 BC 后，得 $\angle ACB=90°$，所以 BC 就成为直角△AEB 的斜边上的高，于是 $AB^2=AC\cdot AE$. 根据同样的道理，连结 BD 后，又可证得 $AB^2=AD\cdot AF$，所以 $AC\cdot AE=AD\cdot AF$. 这是线段之间的比例关系，经过描图可以发现，两组相乘线段 AC、AE 和 AD、AF 分别重叠在一直线上，所以可应用逆平行线型相似三角形进行证明. 由于这两组重叠的相乘线段有公共端点 A，且出现了端点和内分点交叉连结的逆平行线 CF 和 DE，所以就可证明 $\triangle ACF\backsim\triangle ADE$，$\angle ACF=\angle ADE$，所以 $\angle ECF=\angle EDF$ 可以证明.

例 67　已知：△ABC 中，$\angle ACB=90°$，CD 是 AB 上的高，$DF\perp AC$，$DE\perp BC$，垂足分别为 F、E. 求证：$\frac{BC^3}{AC^3}=\frac{BE}{AF}$.

图 6・447

分析：由条件 $\angle ACB=90°$、$CD\perp AB$，可知 CD 为直角△ABC 的斜边 AB 上的高，所以应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，可得 $AC^2=AD\cdot AB$，$BC^2=BD\cdot AB$. 这样就有 $\frac{BC^3}{AC^3}=$

$\frac{BD \cdot AB \cdot BC}{AD \cdot AB \cdot AC}=\frac{BD \cdot BC}{AD \cdot AC}$,问题就转化为应证$\frac{BD \cdot BC}{AD \cdot AC}=\frac{BE}{AF}$,即要证$\frac{AF \cdot BD \cdot BC}{BE \cdot AD \cdot AC}=1$.这是线段之间的比例关系,经过描图可以发现,两组相比线段 AF 和 AC,BC 和 BE 分别重叠在一直线上,从而可应用平行线型相似三角形进行证明.于是由 $DF /\!/ CB$,可得 $\triangle AFD \backsim \triangle ACB$,则 $\frac{AF}{AC}=\frac{AD}{AB}$,由 $DE /\!/ AC$,可得 $\triangle BED \backsim \triangle BCA$,$\frac{BC}{BE}=\frac{AB}{BD}$.从而就可证明$\frac{AF \cdot BD \cdot BC}{BE \cdot AD \cdot AC}=\frac{AD}{AB} \cdot \frac{BD}{AD} \cdot \frac{AB}{BD}=1$.

由于条件中给出了 CD 是直角$\triangle ABC$ 的斜边上的高,所以 $AC^2=AD \cdot AB$,$BC^2=BD \cdot AB$,则 $AC^4=AD^2 \cdot AB^2$,$BC^4=BD^2 \cdot AB^2$,于是$\frac{BC^3}{AC^3}=\frac{BD^2 \cdot AB^2}{BC} \cdot \frac{AC}{AD^2 \cdot AB^2}=\frac{BD^2 \cdot AC}{AD^2 \cdot BC}$.由于现在 DE 也是直角$\triangle BCD$ 的斜边上的高,所以 $BD^2=BE \cdot BC$,而 DF 也是直角$\triangle ACD$ 的斜边上的高,$AD^2=AF \cdot AC$.所以$\frac{BD^2 \cdot AC}{AD^2 \cdot BC}=\frac{BE \cdot BC \cdot AC}{AF \cdot AC \cdot BC}=\frac{BE}{AF}$,分析也可以完成.

例 68 已知:D 是以 AB 为直径的半圆上一点,$DC \perp AB$,垂足是 C,以 AC 为直径作半圆 O',BE 与半圆 O' 相切于 E,F 是 DE 的中点.求证:$BF \perp DE$.

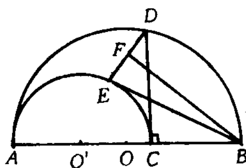


图 6・448

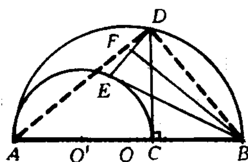


图 6・449

分析:由条件 F 是 DE 的中点,所以 BF 应是边 DE 上的中

线，而我们要证明 $BF \perp DE$，所以 BF 必是 DE 的中垂线，从而可应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质进行证明，于是连结 BD，应证明 $BD=BE$. 由于 BE 与半圆 O' 相切于 E，BCA 是半圆 O' 的割线，所以应用切割线定理可得 $BE^2=BC \cdot BA$. 又因为 AB 是半圆 O 的直径，D 是半圆上的一点，所以连结 AD 后，可得 $\angle ADB=90°$，而 $DC \perp AB$，这样 CD 就成为直角 $\triangle ABD$ 的斜边上的高，所以应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质可得 $BD^2=BC \cdot BA$，于是 $BD=BE$ 就可以证明.

例 69 已知：AB 是半圆 O 的直径，$\odot O'$ 与半圆 O 内切于 G，与 AB 相切于 E，C 是半圆 O 上的一点，$CD \perp AB$，垂足是 D，且 CD 与 $\odot O'$ 相切于 F. 求证：$AC=AE$.

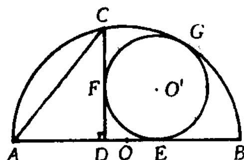


图 6・450

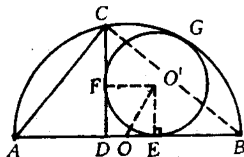


图 6・451

分析：由本题的条件 AB 是半圆 O 的直径，C 是半圆上的一点，所以连结 BC，可得 $\angle ACB=90°$，又因为 $CD \perp AB$. 所以 CD 就是直角 $\triangle ABC$ 的斜边上的高，于是应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，可得 $AC^2=AD \cdot AB$. 从而问题就成为应证 $AE^2=AD \cdot AB$.

又因为条件给出 $\odot O'$ 与半圆 O 内切于 G，所以应用两圆内切的性质，连结 OO'、$O'E$ 后，可得 $OO'=OA-O'E$. 又因为 DE、DF 分别与 $\odot O'$ 相切于 E、F，且 $\angle EDF=90°$，所以连结 $O'F$ 后，可得四边形 $DEO'F$ 是正方形，$DE=O'E$. 而 $AE=AO+OE$，$OE=\sqrt{OO'^2-O'E^2}=\sqrt{(OA-O'E)^2-O'E^2}=$

$\sqrt{OA^2-2OA\cdot O'E}$，所以 $AE^2=(AO+\sqrt{OA^2-2OA\cdot O'E})^2=AO^2+2AO\cdot\sqrt{OA^2-2OA\cdot O'E}+AO^2-2OA\cdot O'E=2AO[AO+\sqrt{OA^2-2OA\cdot O'E}-O'E]=2AO(AO+OE-DE)=AB\cdot AD$，结论就可以证明.

例 70 已知：F 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 的中点，E 是 AD 上的一点，$AE=\frac{1}{4}AD$，$FG\perp CE$ 垂足是 G. 求证：$FG^2=EG\cdot CG$.

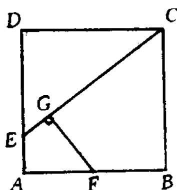


图 6・452

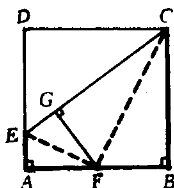


图 6・453

分析：本题要证明的结论是线段之间的比例关系，经过描图可以发现这是由一点 G 发出的四条成比例线段，或者也可以看作是 FG 和 FG 这一组相乘线段重叠，但由 $FG\perp CE$ 可知这一组相乘线段是重叠在一个平角的角平分线上，所以可应用旋转型相似三角形进行证明. 于是将由公共点 G 发出的这四条成比例线段两两组成三角形，于是连结 FE、FC，应证明$\triangle EFG\backsim\triangle FCG$，也就是应证$\angle EFG=\angle FCG$. 但这两个角相等一出现，$GF$ 和 FC 就是一组逆平行线，所以问题又成为要证$\angle EFC=\angle EGF=90^\circ$，也就是要证明$\angle EFA+\angle CFB=90^\circ$，而$\angle B=90^\circ$，故问题又转化为要证$\angle EFA=\angle FCB$. 由于$\angle A=\angle B=90^\circ$，所以又应证$\triangle EFA\backsim\triangle FCB$，由条件 $AE=\frac{1}{4}AB$、$AF=BF=\frac{1}{2}AB$，可得$\frac{AE}{BF}=\frac{AF}{BC}=\frac{1}{2}$，所以上述性质可以证明.

例 71 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$CD\perp AB$ 垂足是 D，F 是

BC 上的任一点，$FE \perp AB$ 垂足是 E. 求证：$AC^2 = AD \cdot AE + CD \cdot EF$.

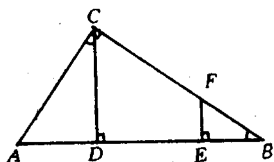


图 6・454

分析：本题条件中给出 $\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$，所以应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，可得 $\angle ACD = \angle B$，$AC^2 = AD \cdot AB = AD(AE + BE) = AD \cdot AE + AD \cdot BE$. 于是问题转化为要证 $CD \cdot EF = AD \cdot BE$. 由于 $\angle ADC = \angle FEB = 90°$，$\angle ACD = \angle FBE$，可证明 $\triangle ACD \backsim \triangle FBE$，$\frac{CD}{BE} = \frac{AD}{FE}$，所以结论就可以证明.

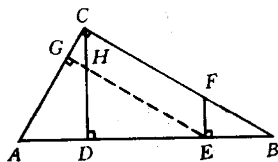


图 6・455

本题要证明的结论实质上是线段之间的比例关系，经过描图可以发现 AD、AE 这一组相乘线段现在重叠在一直线上，且有一公共端点 A，所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 如取过内分点 D 的线段 DC 为逆平行方向线段，则逆平行线可过端点 E 作，于是过 E 作 $EG \perp AC$，垂足是 G，且交 CD 于 H，则由 $\angle ADC = \angle AGE = 90°$，就可推得 $\triangle ACD \backsim \triangle AEG$，$AD \cdot AE = AG \cdot AC$，于是问题成为要证 $AC^2 = AG \cdot AC + CD \cdot EF$，$AC(AC - AG) = CD \cdot EF$，也就是要证 $AC \cdot CG = CD \cdot EF$. 而由 $\angle CGH = \angle CDA = 90°$，又可得 $\triangle CHG$ 和 $\triangle CAD$ 也是一对逆平行线型相似三角形，从而有 $CA \cdot CG = CD \cdot CH$，这样问题就成为要证 $CH = FE$，而由 $FE // CH$ 和 $CF // HE$，就可以证明这一性质.

例 72 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，CD 是斜边 AB 上的高，以 A 为圆心，AC 为半径画 $\odot A$，K 是 $\odot A$ 上一点，过 A、K、B 三点作 $\odot O$，AE 是 $\odot O$ 的直径. 求证：$KD \perp AE$.

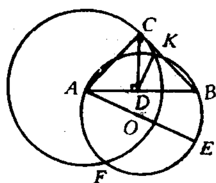


图 6・456

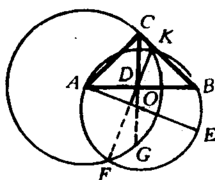


图 6・457

分析：由于条件中出现了⊙A、⊙O 相交于 K，且 AO 是两圆的连心线，所以要证明 $KD\perp AO$，就是要证 KD 是两圆公共弦的一部分，于是延长 KD 交⊙A 于 F，问题就是要证明 F 也在⊙O 上，即证 B、K、A、F 四点共圆. 由条件 CD 是直角△ABC 的斜边上的高，所以 $CD^2=AD\cdot BD$，而 AB 经过⊙A 的圆心 A，所以可应用垂径定理延长 CD 交⊙A 于 G 后，有 $CD=GD$. 于是 $AD\cdot BD=CD^2=CD\cdot GD$. 而在⊙$A$ 中，CG、KF 是相交于 D 点的两条弦，所以 $CD\cdot GD=KD\cdot FD$，这样也就可得 $KD\cdot FD=AD\cdot BD$. 经过描图可以发现，这两组相乘线段分别重叠在一直线上，且在内分点 D 相交，从而可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 于是连结 AF、BK，可得△AFD∽△KBD，于是 $KD\cdot FD=AD\cdot BD$ 的等价性质∠F=∠KBD 成立，从而就可以证明 K、A、F、B 四点共圆.

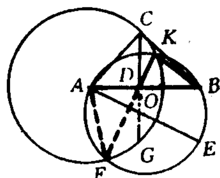


图 6・458

例 73　已知：⊙O、⊙O' 外切于 P，AB 是⊙O、⊙O' 的外公切线，切点分别是 A、B，AP、BP 的延长线分别交⊙O'、⊙O 于 C、D. 求证：$AB^2=AP\cdot PC+BP\cdot PD$.

分析：本题给出了条件⊙O、⊙O' 外切于 P，所以可通过添加过切点的内公切线将问题转化到每一个圆中的弦切角问题来进行分析. 于是过 P 作⊙O、⊙O' 的内公切线交 AB 于 E. 就可得

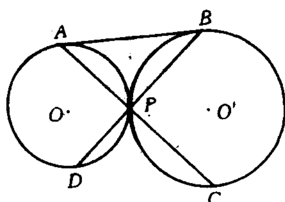


图 6・459

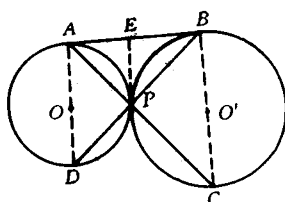


图 6・460

$\angle EPA=\angle EAP$，$\angle EPB=\angle EBP$，$\angle APB=\angle EPA+\angle EPB=\frac{1}{2}\cdot 180°=90°$，所以$\angle BPC=90°$，这样就出现了 90°的圆周角，所以连结 BC，BC 应是$\odot O'$ 的直径. 根据同样的道理，连结 AD 后，AD 也应是$\odot O$ 的直径. 又因为 AB 与$\odot O'$ 相切于 B，所以$\angle ABC=90°$，这样 BP 就成为直角$\triangle ACB$ 的斜边 AC 上的高，应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，可得 $AB^2=AP\cdot AC$，于是问题就成为要证 $AP\cdot AC=AP\cdot PC+BP\cdot PD$，$AP(AC-PC)=BP\cdot PD$，$AP^2=BP\cdot PD$. 但我们可证明 AP 也是直角$\triangle ABD$ 的斜边 BD 上的高，所以再应用一次直角三角形斜边上的高的基本图形的性质. 就可以证明结论.

例 74 已知：$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，AE 是$\odot O$ 的直径，D 是 BC 的中点，过 D 作 $DF\perp AE$，垂足是 G，且交$\odot O$ 于 F，求证：$AB^2+AC^2=2AF^2$.

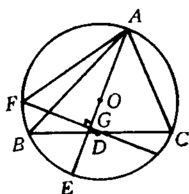


图 6・461

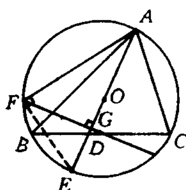


图 6・462

分析:由本题的条件 AE 是⊙O 的直径,F 是⊙O 上的一点,可得连结 FE 后,有$\angle AFE=90°$,而 $FG\perp AE$,所以 FG 就是直角$\triangle AEF$ 的斜边上的高,从而可得 $AF^2=AG\cdot AE$. 问题就转化为要证 $AB^2+AC^2=2AG\cdot AE$. 这个关系式实质上还是线段之间的比例关系,经过描图可以发现 AB 和 AB 这一组相乘线段重叠在一直线上,所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 由于出现的是线段 AB 的平方,所以应添加由过三角形顶点的逆平行线组成的逆平行线型相似三角形. 由于 AE 是⊙O 的直径,B 是⊙O 上的一点,所以连结 BE 后,可得$\angle ABE=90°$,于是过 B 作 AE 的垂线交 AE 于 M,就可得 BM 是直角$\triangle AEB$ 的斜边上的高,于是有 $AB^2=AM\cdot AE$. 根据同样的道理,连结 CE,过 C 作 $CN\perp AE$ 交

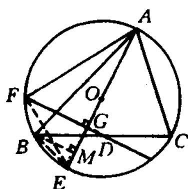


图 6 · 163

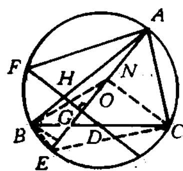


图 6 · 164

AE 于 N 后,可得 $AC^2=AN\cdot AE$,这样问题就成为要证 $2AG\cdot AE=AM\cdot AE+AN\cdot AE$,$2AG=AM+AN$. 也就是要证 $MN=2GN$. 显然由 D 是 BC 的中点,$DF/\!/CN$,可得连结 BN 交 GF 于 H 后,有 $BH=NH$,再由 $HG/\!/BM$,就可证明 $MG=NG$,$MN=2GN$,分析就可以完成.

例 75 已知:PA、PB 与⊙O 相切于 A、B,割线 PDC 交⊙O 于 D、C,AB 交 PO 于 E. 求证:$\angle DEC=2\angle DBC$.

分析:本题要证的结论$\angle DEC=2\angle DBC$,是两个角之间的倍半关系,而其中的半角$\angle DBC$ 是⊙O 的圆周角,所以应考虑应用圆周角的性质,即圆周角的 2 倍应等于它所对的弧所对的圆心角,

因此根据圆心角的定义，连结 DO、CO，可得$\angle DOC=2\angle DBC$，于是问题就成为要证$\angle DEC=\angle DOC$，即证 D、E、O、C 四点共圆. 但 P、E、O 成一直线，出现了这个四边形的外角$\angle PED$，所以问题又转化成要证$\angle PED=\angle PCO$. 而这两个角相等一出现，就出现了 DE 是$\triangle POC$ 内的边 OC 的

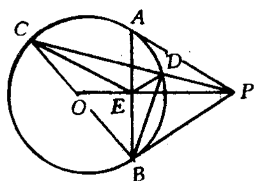


图 6・465

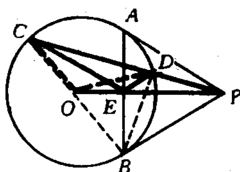


图 6・466

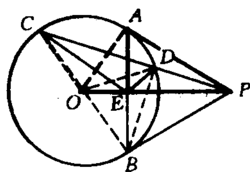


图 6・467

逆平行线，从而就可应用逆平行线型相似三角形进行证明，也就是要证$\triangle PED\backsim\triangle PCO$，并进一步应转而证明$\angle PED=\angle PCO$ 的等价性质 $PD\cdot PC=PE\cdot PO$. 由于 PA 与$\odot O$ 相切于 A，PDC 是割线，故应用切割线定理可得 $PA^2=PD\cdot PC$，于是只要证明 $PA^2=PE\cdot PO$. 而由 PA 是$\odot O$ 的切线，可得连结 AO 后，有$\angle PAO=90°$，而由 PA、PB 是圆的切线，AB 是连结切点的弦，又可得$\angle AEP=90°$，所以 AE 就成为直角$\triangle PAO$ 的斜边上的高，于是 $PA^2=PE\cdot PO$ 可以证明.

例 76　已知：PA、PB 与$\odot O$ 相切于 A、B，C、D 分别是 PA、PB 的中点，M 是CD 上的任一点，ME 与$\odot O$ 相切于 E. 求证：$ME=MP$.

分析：由条件 C、D 分别是 PA、PB 的中点，是多个中点问题，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 由于 C、D 所在的 PA、PB 有公共端点 P，可以组成三角形，所以 CD 这两个

中点的连线就是三角形的中位线，而现在图形中是有中位线而三角形不完整，于是连结 AB，可得 $CD /\!/ AB$. 另一方面由于 PA、PB 是⊙O 的切线，故应用切线长定理及其推论，连结 PO 交 AB、CD 于 F、G 后可得 $AB \perp PO$，于是 $CD \perp PO$，$FG = PG$，则 CD 就成为 PF 的中垂线. 应用线段中垂线的性质，连结 MF 后，可得 $MF = MP$，这样要证明 $ME = MP$，就是要证明 ME 和 MP、MF 都相等，也就是要证明 M 应是

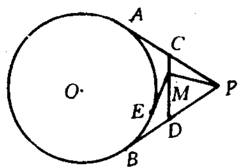


图 6・468

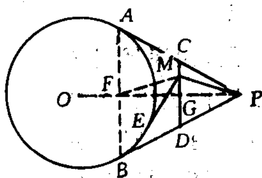


图 6・469

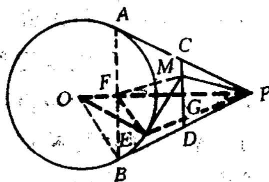


图 6・470

$\triangle PEF$ 的外心. 于是应先连结 PE、FE，由于已证 CD 是 PF 的中垂线，所以 $\triangle PEF$ 的外心必定在 CD 上. 又因为 PB 与⊙O 相切于 B，应用切线的性质，连结 OB 后，可得 $\angle PBO = 90°$，这样 BF 就成为直角 $\triangle POB$ 的斜边上的高，于是应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质可得 $OB^2 = OF \cdot OP$. 又因为条件中还给出 ME 与⊙O 相切于 E，所以再一次应用切线的性质，连结 OE 后，可得 $\angle MEO = 90°$，且 $OB = OE$，所以又可得 $OE^2 = OF \cdot OP$. 这是线段之间的比例关系，经过描图可以发现，两组相乘线段 OF 和 OP、OE 和 OE 分别重叠在一直线上，且有公共端点 O，同时这个比例关系中还出现了线段 OE 的平方，所以可应用由过三角形顶点的逆平行线得到的逆平行线型相似三角形进行证明，也就是可得 $\triangle OEF \backsim \triangle OPE$，所以 $OE^2 = OF \cdot OP$ 的等价性质 $\angle OEF =$

$\angle OPE$ 成立，于是可得 OE 与 $\triangle PEF$ 的外接圆相切于 E. 而 $ME \perp OE$，所以 ME 过 $\triangle PEF$ 的外心，也即 $\triangle PEF$ 的外心应是 ME 和 CD 的公共点 M，从而就可以证明结论.

第三节　旋转型

【分析方法导引】

如果几何问题中直接出现了绕三角形的一个顶点旋转的相似三角形时，可直接应用相似三角形的判定定理或性质来进行分析和证明.

对于一个线段之间的比例关系，如果经描图后发现它们是由一点发出的四条成比例线段，就可想到要应用旋转型相似三角形进行证明. 这时首先应检查它们之间两两是否夹成等角，如果确定它们两两之间夹成等角，则它们必定相应地两两组成旋转型相似三角形，接下来就应将四个端点两两连结起来组成相似三角形. 然后就可以应用圆周角的基本图形的性质来完成分析.

对于一个线段之间的比例关系，如果经描图后发现其中的一组相乘线段或相比线段重叠在一个角的角平分线上时，就可以想到要应用旋转型相似三角形，而且是旋转角等于三角形的内角的旋转型相似三角形来进行证明. 然后再根据由一点发出的四条两两交成等角的成比例线段两两组成相似三角形的方法完成分析. 在上述情况中，如果旋转角等于三角形的内角等于 90°时，旋转型相似三角形的基本图形就成为直角三角形斜边上的高的基本图形，因

此分析方法是完全一致的.

例 77 已知:$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$,AD 是高,AE 是$\odot O$ 的直径.求证:$AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

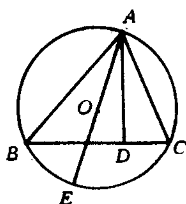


图 6・471

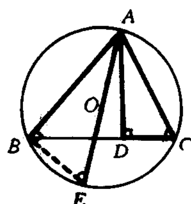


图 6・472

分析:本题要证的结论是线段之间的比例关系,经过描图可以发现,这是由一点发出的四条成比例线段,从而可考虑添加旋转型相似三角形进行证明.添加的方法是将这四条成比例线段两两组成相似三角形.如考虑将 AB、AE 和 AD、AC 分别组成三角形,则连结 BE.问题就成为应证明$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$.由条件 AE 是$\odot O$ 的直径,B 是$\odot O$ 上的一点,所以

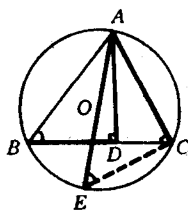


图 6・473

$\angle ABE = 90°$,而已知$\angle ADC = 90°$,所以$\angle ABE = \angle ADC$.又因为 A、B、E、C 四点共圆,又可得$\angle E = \angle C$,所以结论就可以证明.

如考虑将 AB、AD 和 AE、AC 分别组成三角形,则连结 CE,可得$\angle ACE = \angle ADB = 90°$,$\angle E = \angle B$,所以$\triangle ADB \backsim \triangle ACE$,也可以完成分析.

例 78 已知:$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$,角平分线 AD 的延长线交$\odot O$ 于 E.求证:$AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

分析:本题要证的结论是线段之间的比例关系,经过描图可以发现,这是由一点发出的四条成比例线段,本题也可发现 AD 和

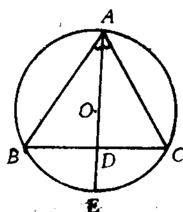


图 6 · 474

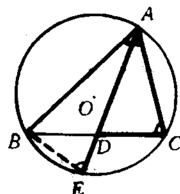


图 6 · 475

AE 这一组相乘线段重叠在一直线上，但由于它们是重叠在一条角平分线上，所以应仍将它们看作是由一点发出的四条成比例线段，所以可添加旋转型相似三角形进行证明. 添加的方法是将成比例的四条线段两两组成相似三角形. 如考虑将 AB、AE 和 AD、AC 分别组成三角形，则连结 BE，就可证明 $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$. 而由条件 $\angle BAE = \angle DAC$ 和由 A、B、E、C 四点共圆得到的 $\angle E = \angle C$ 就可以完成分析.

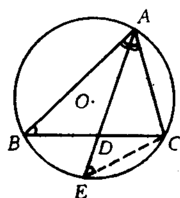


图 6 · 476

如考虑将 AB、AD 和 AE、AC 分别组成三角形，则连结 CE，那末由 $\angle BAD = \angle EAC$ 和 $\angle B = \angle E$，也可证明 $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$，从而也可以完成分析.

例 79 已知：AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 求证：$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$.

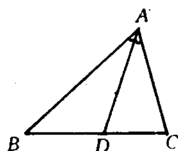


图 6 · 477

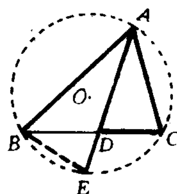


图 6 · 478

分析:本题结论中出现了 $AB \cdot AC$ 是三角形两条边的积,所以可通过添加三角形的外接圆,并进一步应用旋转型相似三角形的性质来进行证明. 于是首先作$\triangle ABC$的外接圆 O,并延长 AD 交$\odot O$于 E,连结 BE,可得$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$、$AB \cdot AC = AD \cdot AE$. 于是问题转化为应证 $AD^2 = AD \cdot AE - BD \cdot CD$. 因 BC、AE 是$\odot O$的两条相交于 D 的弦,应用相交弦定理可得 $BD \cdot CD = AD \cdot DE = AD(AE - AD) = AD \cdot AE - AD^2$,所以 $AD^2 = AD \cdot AE - BD \cdot CD$ 就可以证明.

例 80 已知:AD 是$\triangle ABC$的外角平分线. 求证:$AB \cdot AC - CD^2 = BC \cdot CD - AD^2$.

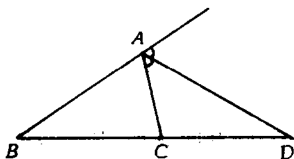


图 6・179

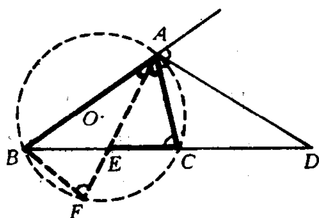


图 6・180

分析:本题的结论中出现了 $AB \cdot AC$ 是三角形两条边的积,所以可通过添加三角形的外接圆,并进一步应用旋转型相似三角形的性质来进行证明,从而首先作$\triangle ABC$的外接圆 O,再作$\triangle ABC$的内角平分线 AE 并延长 AE 交$\odot O$于 F,连结 BF,从而就可证明$\triangle ABF \backsim \triangle AEC$,$AB \cdot AC = AE \cdot AF$. 这样问题转化为应证 $AE \cdot AF - CD^2 = BC \cdot CD - AD^2$. 但 AD、AE 是$\triangle ABC$的外、内角平分线,所以 $AD \perp AE$,$AD^2 = DE^2 - AE^2$,从而又应证 $AE \cdot AF - CD^2 = BC \cdot CD - DE^2 + AE^2$,$AE \cdot AF - AE^2 = BC \cdot CD + CD^2 - DE^2$,$AE \cdot FE = BC \cdot CD + CD^2 - DE^2$,但 AF、BC 是$\odot O$的两条相交于 E 的弦,所以 $AE \cdot FE = BE \cdot CE$,这样问题又

转化为应证 $BE \cdot CE = BC \cdot CD + CD^2 - DE^2$，而 $DE = DC + CE$，所以又应证 $BE \cdot CE = BC \cdot CD + CD^2 - CD^2 - CE^2 - 2CD \cdot CE$，就是要证 $BE \cdot CE + CE^2 = BC \cdot CD - 2CD \cdot CE$，$CE \cdot (BE + CE) = BC \cdot CD - 2CD \cdot CE$，$BC \cdot CD = CE \cdot BC + 2CD \cdot CE$，$BC \cdot CD - CD \cdot CE = CE \cdot BC + CD \cdot CE$，即证 $CD \cdot BE = CE \cdot BD$. 由于 AE、AD 是 $\triangle ABC$ 的内外角平分线，这个性质是成立的，所以分析就可以完成.

本题的结论可转化为 $AB \cdot AC + AD^2 = BC \cdot CD + CD^2$，$AB \cdot AC + AD^2 = BD \cdot CD$. 这是线段之间的比例关系，经过描图可以发现，相乘两线段 BD 和 CD 重叠在一直线上，且有一公共的端点 D，所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 添加的方法是过端点 B 和内分点 C 作逆平行线，如取过内分点 C 的线段 CA 为逆平行方向线段，则以 BD 为边，B 为顶点，作 $\angle DBE = \angle DAC$ 交 DA 的延长线于 E. 由于这时必然有 A、E、B、C 四点共圆，所以也可以作 $\triangle ABC$ 的外接圆 O，延长 DA 交 $\odot O$ 于 E，连结 BE，就可得 $\triangle DAC \backsim \triangle DBE$，$BD \cdot CD = ED \cdot AD$，从而问题就应证 $AB \cdot AC + AD^2 = ED \cdot AD$，也就是证 $AB \cdot AC = EA \cdot DA$. 这是线段之间的比例关系，经过描图可以发现，这是由一点发出的四条成比例线段，从而可应用旋转型相似三角形的性质进行证明. 根据由这四条成比例线段两两组成相似三角形的方法，如考虑 AE 和 AB，AC 和 AD 分别组成三角形，则应证 $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$，而由 $\angle DAC = \angle FAD = \angle BAE$，和根据 A、E、B、C 四点共圆得到的 $\angle DCA = \angle AEB$，就可证明这两个三角形相似.

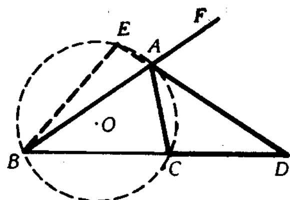


图 6・481

如考虑 AE 和 AC，AB 和 AD 分别组成三角形，则连结 EC，

应证$\triangle ACE \backsim \triangle ADB$. 由 A、E、B、C 四点共圆，可得$\angle AEC = \angle ABD$，而由$\angle CAD = \angle FAD = \angle BAE$，又可得 $\angle EAC = \angle BAE + \angle BAC = \angle CAD + \angle BAC = \angle BAD$，所以分析也可以完成.

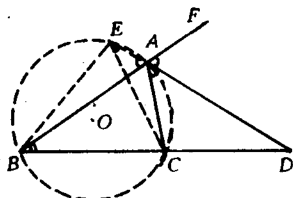


图 6・482

例 81 已知：⊙O、⊙O' 相交于 A、B，⊙O 的弦 AC 交⊙O' 于 D，⊙O'的弦 AE 交⊙O 于 F. 求证：$BC \cdot BE = BD \cdot BF$.

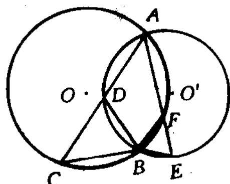


图 6・483

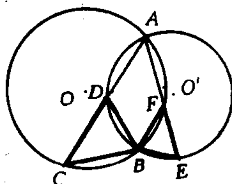


图 6・484

分析：本题要证的结论是线段之间的比例关系. 经过描图可以发现，这是由一点发出的四条成比例线段，从而可考虑应用旋转型相似三角形来进行证明. 应用的方法是将成比例的四条线段两两组成相似三角形. 如考虑将 BC 和 BD，BF 和 BE 分别组成三角形，则应证$\triangle BDC \backsim \triangle BEF$. 因为 A、C、B、F 四点共圆，可得$\angle BCD = \angle BFE$，而由 A、D、B、E 四点共圆，又可得$\angle BDC = \angle BEF$，从而就可以证明结论.

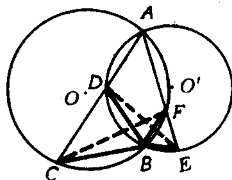


图 6・485

如考虑将 BC 和 BF，BD 和 BE 分别组成三角形，则连结 DE、FC，证明$\triangle BED \backsim \triangle BFC$. 由于这是两圆相交的问题，所以可转化成为一个圆中的圆周角的基本图形的

问题来进行讨论. 于是由 A、C、B、F 四点共圆，连结公共弦 AB 后有 $\angle FCB=\angle FAB$. 而由 A、D、B、E 四点共圆，又可得 $\angle EDB=\angle FAB$，所以 $\angle EDB=\angle FCB$，根据同样的道理，还可以证明 $\angle BED=\angle BFC$，所以分析也可以完成.

例 82 已知：$\odot O$、$\odot O'$ 相交于 A、B，过 A 任作两割线 CAD、EAF 交 $\odot O$、$\odot O'$ 于 C、E 和 D、F. 求证：$BE\cdot BD=BC\cdot BF$.

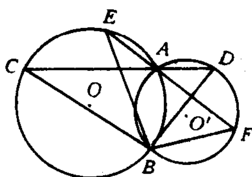


图 6・486

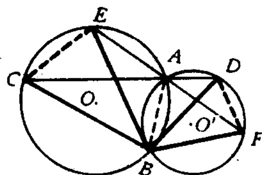


图 6・487

分析：本题要证的结论是线段之间的比例关系. 经过描图可以发现，这是由一点发出的四条成比例线段，从而可考虑应用旋转型相似三角形的性质进行证明. 根据由这四条成比例线段两两组成相似三角形的方法，如考虑将 BC 和 BD，BE 和 BF 分别组成三角形，则应证 $\triangle BCD\backsim\triangle BEF$. 由条件 A、E、C、B 四点共圆，$\angle E=\angle C$，和 A、B、F、D 四点共圆，$\angle F=\angle D$，这两个三角形相似是可以证明的.

如考虑 BC 和 BE，BD 和 BF 分别组成三角形，则连结 CE、DF，就应证明 $\triangle BEC\backsim\triangle BFD$. 于是由 A、E、C、B 四点共圆，连结 AB 后，有 $\angle BCE=\angle BAF$，而由 A、B、F、D 四点共圆，可得 $\angle BAF=\angle BDF$，所以 $\angle BCE=\angle BDF$，根据同样的道理可证明 $\angle BEC=\angle BAC=\angle BFD$，从而也可以完成分析.

例 83 已知：C 是线段 AB 上的一点，过 C 作 AB 的垂线交以 AB 为直径的半圆于 D，在 CD 的延长线上取一点 G，BG 交半圆于 F，AF 交 CD 于 E. 求证：$CD^2=CE\cdot CG$.

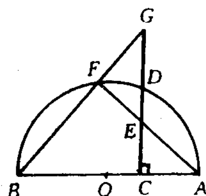


图 6・488

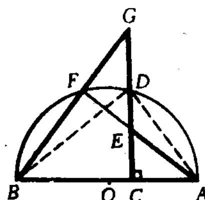


图 6・489

分析:由条件 AB 是半圆的直径,D 是半圆上的一点,可得连结 AD、BD 后,有$\angle ADB=90°$. 因 $CD\perp AB$,所以 CD 就成为直角$\triangle ABD$ 的斜边上的高,于是应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质可得 $CD^2=BC\cdot AC$,这样问题转化为要证明 $BC\cdot AC=CE\cdot CG$. 这是线段之间的比例关系,经过描图可以发现,这是由 C 点发出的四条成比例线段,虽然在描图中也可以发现 CE 和 CG 这一组相乘线段重叠,但由$\angle BCG=\angle ACG=90°$,可知 CE 和 CG 是重叠在一个平角的角平分线上,所以仍然看作是由一点发出的四条成比例线段,从而可应用旋转型相似三角形的性质进行证明. 根据这四条成比例线段两两组成相似三角形的方法,如考虑将 CB 和 CG,CE 和 CA 分别组成三角形,则应证 $\triangle BGC\backsim\triangle EAC$,由 $\angle AFB=90°$和$\angle ACE=90°$,可得 E、F、B、C 四点共圆,$\angle GBC=\angle AEC$,而$\angle GCB=\angle ACE=90°$,所以这两个三角形相似就可以证明.

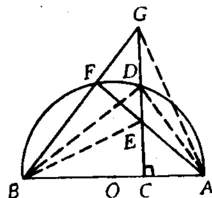


图 6・490

如考虑将 CB、CE 和 CG、CA 分别组成三角形,则应连结 BE、AG 后,证明$\triangle CBE\backsim\triangle CGA$,由于$\angle BCE=\angle GCA=90°$,所以还应证明一个性质. 由条件 GC 和 AF 分别是$\triangle ABG$ 的两条高,所以 E 是$\triangle ABG$ 的垂心,所以 $BE\perp AG$,就可证明$\angle EBC=\angle AGC$,或者也可证明$\angle BEC=\angle GAC$,所以这两个三角形相似

也可以证明.

例 84 已知:AD、BE 是$\triangle ABC$ 的角平分线,$DF\perp BE$ 交 AB 于 F,CM 是$\angle C$ 的外角平分线,$DG\perp CM$ 交 AC 的延长线于 G. 求证:$AD^2=AF\cdot AG$.

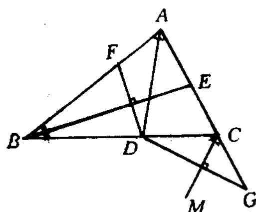


图 6·491

分析:本题要证明的结论 $AD^2=AF\cdot AG$ 是线段之间的比例关系,经过描图可以发现,相乘两线段 AD 和 AD 重叠在角平分线上,从而仍可看作是由一点 A 发出的四条成比例线段,所以可应用旋转型相似三角形的性质进行证明. 按照成比例的四条线段两两组成相似三角形的办法,就有 AF 和 AD,AD 和 AG 应分别组成三角形,从而应证$\triangle AFD\backsim\triangle ADG$. 在这两个三角形中,已经有$\angle FAD=\angle DAG$,所以还应证明$\angle AFD=\angle ADG$,由 $DF\perp BE$、$\angle AFD=90°+\frac{1}{2}\angle B$ 和$\angle ADG=180°-\frac{1}{2}\angle A-\angle G$,可知问题转化为应证$\angle G=\frac{1}{2}\angle ACB$. 但由于 CM 是$\angle BCG$ 的平分线,且 $DG\perp CM$,所以就可得$\triangle CDG$ 是等腰三角形,即 $CD=CG$,从而就可以证明$\angle G=\frac{1}{2}\angle ACB$.

例 85 已知:$\odot O$、$\odot O'$ 相交于 A、B,过 B 的割线交两圆于 C、D. 求证:$OA\cdot AD=CA\cdot O'A$.

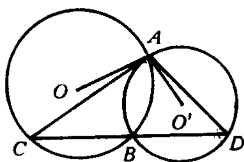


图 6·492

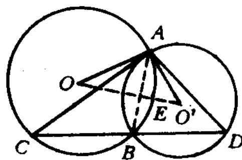


图 6·493

分析:本题要证明的结论是线段之间的比例关系,经过描图可

以发现，这是由一点 A 发出的四条成比例线段，从而可添加旋转型相似三角形进行证明. 添加的方法是将四条成比例线段两两组成三角形. 如考虑将 AO 和 AO'，AC 和 AD 分别组成三角形，则连结 OO'，应证明$\triangle AOO' \backsim \triangle ACD$，进一步也就是要证$\angle O=\angle C$，$\angle O'=\angle D$. 由于$\angle C$ 是圆周角而$\angle O$ 是圆心角，所以又只要证明$\angle C$ 所对的$\overset{\frown}{AB}$等于$\angle O$ 所对的$\overset{\frown}{AE}$的两倍，这时可先设 OO' 交$\odot O$ 于 E. 由于 OO' 是相交两圆的连心线，所以应用相交两圆的性质，连结 AB 后，可得 $OO' \perp AB$，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$，所以$\angle O=\angle C$. 根据同样的道理，可证明$\angle O'=\angle D$，所以分析可以完成.

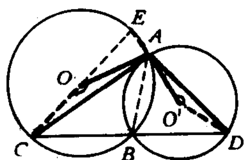


图 6・194

如考虑将 AO 和 AC，AO' 和 AD 分别组成三角形，则连结 OC、$O'D$，应证$\triangle AOC \backsim \triangle AO'D$. 由于这两个三角形都是等腰三角形. 所以只要证明$\angle O=\angle O'$. 由条件$\odot O$ 和$\odot O'$ 相交于 A、B，所以可将问题转化到每一个圆中的圆周角的基本图形问题来进行讨论. 于是连结 AB，可得$\angle O'=2\angle ABD$，再延长 CO 交$\odot O$ 于 E，连结 AE，可得$\angle O=2\angle E$，而由 A、E、C、B 四点共圆，又可得$\angle ABD=\angle E$，分析完成.

例 86 已知：PA 与$\odot O$ 相切于 A，割线 PBC 交$\odot O$ 于 B、C，M 是$\overset{\frown}{AB}$上的一点，$MD\perp AB$，$ME\perp AC$，$MF\perp PA$，$MG\perp PC$，垂足分别为 D、E、F、G. 求证：$MD \cdot ME=MF \cdot MG$.

分析：本题要证明的结论是线段之间的比例关系，经过描图可以发现这是由一点 M 发出的四条成比例线段，所以可考虑应用旋转型相似三角形进行证明. 根据由这四条成比例线段两两组成相似三角形的方法，如考虑 ME、MF 和 MG、MD 分别组成三角形，则连结 EF，GD，可证明$\triangle MEF \backsim \triangle MGD$. 由条件$\angle MEA=$

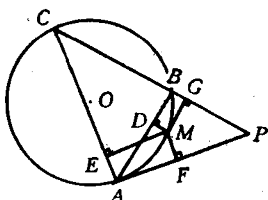


图 6·495

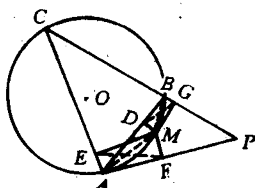


图 6·496

$\angle MFA=90°$，所以 M、E、A、F 四点共圆，连结 MA 后，可得 $\angle MEF=\angle MAF$，根据同样的道理，连结 MB 后，可得 $\angle MGD=\angle MBD$. 又因 PA 与⊙O 相切于 A，AM 是过切点的弦，所以 $\angle MAF=\angle MBD$，从而可得 $\angle MEF=\angle MGD$. 另一方面，由 M、E、A、F 和 M、G、B、D 四点共圆，又可得 $\angle MFE=\angle MAE$，$\angle MDG=\angle MBG$，而由 B、C、A、M 四点共圆，又可得 $\angle MBG=\angle MAE$，所以 $\angle MFE=\angle MDG$，从而就可证明这两个三角形相似.

如考虑将 MD、MF 和 ME、MG 分别组成三角形，则连结 DF，EG，应证 $\triangle MDF\backsim\triangle MGE$. 那末再由 M、D、A、F 四点共圆，连结 MA 后，可得 $\angle MDF=\angle MAF$，由 M、G、C、E 四点共圆，连结 MC 后，可得 $\angle MGE=\angle MCE$，而由 PA 与⊙O 相切于 A，AM 是过切点的弦，可得 $\angle MAF=\angle MCA$，所以 $\angle MDF=\angle MGE$. 又因为 $\angle MFD=\angle MAD=\angle MCB=\angle MEG$，所以分析也可以完成.

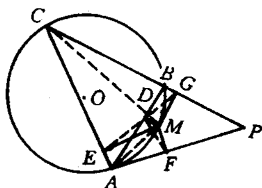


图 6·497

由条件 PA 与⊙O 相切于 A，所以应用弦切角的基本图形的性质，连结 MA、MB 后，可得 $\angle MAF=\angle MBD$，又因 $\angle MFA=\angle MDB=90°$，所以 $\triangle MAF\backsim\triangle MBD$，是一对旋转型相似三角形，

所以由公共端点 M 发出的四条线段一定成比例，也就可得$\frac{MD}{MF}=\frac{MB}{MA}$. 又因为 M、B、C、A 四点共圆，$\angle MBG=\angle MAE$，且$\angle MGB=\angle MEA=90^\circ$，所以$\triangle MBG\backsim\triangle MAE$，也是一对旋转型相似三角形，所以又可得$\frac{MG}{ME}=\frac{MB}{MA}$，从而也可完成分析.

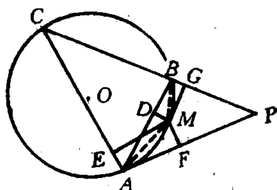


图 6・498

例 87 已知：$\odot O$ 的弦 AB、CD 相交于 P，M 是$\overset{\frown}{BC}$上的一点，$ME\perp CD$，$MF\perp AB$，$MG\perp CB$，$MH\perp AD$，垂足分别为 E、F、G、H. 求证：$ME\cdot MF=MG\cdot MH$.

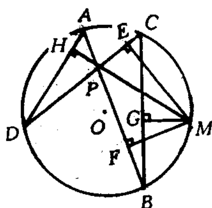


图 6・499

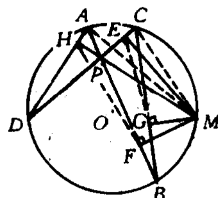


图 6・500

分析：本题要证的结论 $ME\cdot MF=MG\cdot MH$ 是线段之间的比例关系，经过描图可以发现这是由一点 M 发出的四条成比例线段，所以可考虑添加旋转型相似三角形进行证明. 根据由成比例的四条线段两两组成相似三角形的方法，如考虑将 ME、MG 和 MH、MF 分别组成三角形，则连结 EG，HF，应证$\triangle MEG\backsim\triangle MHF$，由条件$\angle MEC=\angle MGC=90^\circ$，可得连结 MC 后，有$\angle MEG=\angle MCB$，由 B、M、C、A 四点共圆，可得连结 MA 后有$\angle MCB=\angle MAB$，再由$\angle MFA=\angle MHA=90^\circ$，又可得 M、F、H、A 四点共圆，$\angle MAB=\angle MHF$，所以$\angle MEG=\angle MHF$. 根据同样的道理可证明$\angle GME=\angle GCE=\angle BAD=\angle FMH$，所以这

两个三角形相似可以证明.

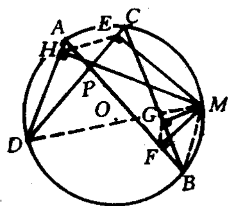


图 6・501

如考虑ME、MH和MG、MF分别组成相似三角形,则连结EH,GF,由$\angle MED=\angle MHD=90°$,可得$\angle EMH=\angle EDH$由$A$、$D$、$B$、$C$四点共圆,可得$\angle CDA=\angle CBA$,由$\angle MGB=\angle MFB=90°$,可得$\angle CBA=\angle GMF$,所以$\angle EMH=\angle GMF$.根据同样的道理,连结$DM$后,可得$\angle EHM=\angle EDM=\angle CBM=\angle GFM$.分析完成.

例 88 已知:$\odot O$、$\odot I$是$\triangle ABC$的外接圆和内切圆,两圆半径分别为R、r,AI的延长线交$\odot O$于D.求证:$AI\cdot DI=2Rr$.

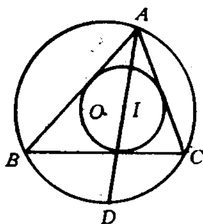


图 6・502

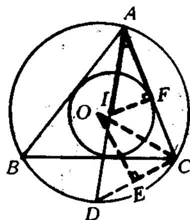


图 6・503

分析:设AC与$\odot I$相切于F,则应用切线的性质连结IF后,可得$IF\perp AC$,$IF=r$.又因为A、B、D、C四点共圆,所以应用圆周角的基本图形的性质,连结DC后,可得$\angle DCB=\angle DAB=\angle CAD$,而$CI$是$\angle ACB$的角平分线,所以可推得$\angle DCI=\angle DIC$,$DI=DC$.这样问题就成为要证$AI\cdot CD=2Rr$,由于$AI$和$r$(亦即$IF$)组成$\triangle AIF$,所以比例关系中的2就可以和$CD$或$R$组合在一起.如将2与$CD$组合,则要证的性质可转化为$\dfrac{AI}{R}=\dfrac{r}{\frac{1}{2}CD}$,于是可根据线段之间倍半关系的定义,取$CD$的中点$E$,则

$CE=\frac{1}{2}CD$. 由于 E 是弦 CD 的中点，所以连结 OE 后，可得 $OE\perp DC$，而由 C 是⊙O 上的一点，连结 OC 后，可得 $OC=R$. 所以问题就成为要证 $\frac{AI}{OC}=\frac{IF}{CE}$，也就是要证 $\triangle AIF\backsim\triangle OCE$. 而由 $OE\perp CD$，又可证明 $\angle DAC=\angle EOC$，且 $\angle IFA=\angle CEO=90°$，所以 $\triangle IFA\backsim\triangle CEO$ 就可以证明.

如将 2 和 R 组合，则要证的结论转化为 $\frac{AI}{2R}=\frac{IF}{CD}$. 于是应将过 CD 的端点的 $2R$ 也就是⊙O 的直径作出，也就是过 C 作⊙O 的直径 CE，并连接 DE，就可得 $\angle EDC=\angle AFI=90°$，且由 A、E、D、C 四点共圆，可得 $\angle CED=\angle IAF$，所以 $\triangle EDC\backsim\triangle AFI$，从而也可完成分析.

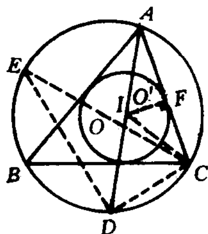


图 6・504

例 89 已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的外接圆分别是⊙O、⊙O_1、⊙O_2，⊙O 的半径为 R. $\triangle ABC$ 的三边为 a、b、c. 求证：$OO_1=OO_2=\frac{aR}{b+c}$.

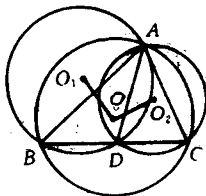


图 6・505

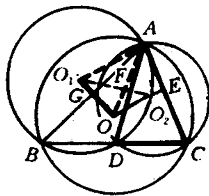


图 6・506

分析：本题要证明 $OO_1=OO_2$ 是两条具有公共端点的相等线段，所以可组成一个等腰三角形，是一个等腰三角形的判定问题，所以连结 O_1O_2，问题就成为要证明 $\angle OO_1O_2=\angle OO_2O_1$. 由于 OO_1、OO_2、O_1O_2 是连心线，AB、AD、AC 是相应的公共弦，所以

$OO_1 \perp AB$、$O_1O_2 \perp AD$、$OO_2 \perp AC$. 如设垂足分别为 G、F、E，那末 A、O_1、G、F 四点共圆，$\angle OO_1O_2 = \angle GAF = \frac{1}{2}\angle BAC$. 根据同样的道理，可证 A、F、O_2、E 四点共圆，$\angle OO_2O_1 = \angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAC$，从而即可证明 $OO_1 = OO_2$.

又因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，故 $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$，于是 $\frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB+AC}$，$CD = \frac{a \cdot b}{b+c}$，这样问题转化为应证 $\frac{OO_1}{CD} = \frac{R}{b} = \frac{OA}{CA}$，这是线段之间的比例关系，经过描图可以发现它们两两组成一对旋转型相似三角形，于是就应证 $\triangle AOO_1 \backsim \triangle ACD$. 由 $\angle AOO_1$ 是圆心角、$OO_1 \perp AB$ 和 $\angle ACB$ 是圆周角，可得 $\angle AOO_1 = \angle ACD$，同理可证 $\angle AOO_2 = \angle B$. 且 $\angle AO_1O_2 = \angle B$，因 $\angle AO_1O = \angle AO_1O_2 + \angle OO_1O_2 = \angle B + \frac{1}{2}\angle BAC$，而 $\angle ADC = \angle B + \frac{1}{2}\angle BAC$，所以 $\angle AO_1O = \angle ADC$，于是这两个三角形相似是可以证明的.

例 90 已知：四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，过 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的延长线于 E. 求证：$CE \cdot AB = AD \cdot CD$.

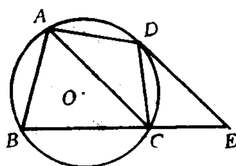


图 6・507

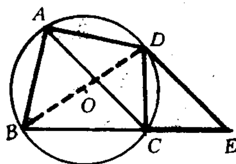


图 6・508

分析：本题要证明的结论 $CE \cdot AB = AD \cdot CD$ 是线段之间的比例关系，经过描图可以发现，这四条成比例线段两两可以组成一对旋转型相似三角形，于是连结 BD 后，应证 $\triangle ADB \backsim \triangle CED$. 由四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形、$\angle DAB = \angle ECD$ 和由 $DE \parallel AC$，得到的 $\angle ABD = \angle ACD = \angle CDE$，就可证明这两个三角形相似.

例 91 已知:$\triangle ABC$ 中,I 是内心,过 I 作 AI 的垂线交 AB、AC 于 D、E. 求证:$\frac{BI^2}{CI^2}=\frac{BD}{CE}$.

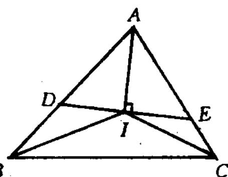


图 6・509

分析:本题要证明的结论是线段之间的比例关系,经过描图可以发现 BI 和 BI 这一组相乘线段重叠,且已知 BI 是$\angle ABC$ 的角平分线,所以就出现了相乘两线段重叠在一条角平分线上,于是就可以应用旋转型相似三角形进行证明. 由条件$\angle DBI=\angle IBC=\frac{1}{2}\angle ABC$. 由$\angle AID=90°$,可得$\angle BID=180°-\angle IBA-\angle IAB-90°=90°-\frac{1}{2}\angle ABC-\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\angle ACB=\angle BCI$. 从而就可得$\triangle BID\backsim\triangle BCI$,$BI^2=BD\cdot BC$. 根据同样的道理,也可证明$\triangle CIE$ 和$\triangle CBI$ 也是一对旋转型相似三角形,所以 $CI^2=CE\cdot CB$,所以结论就可以证明.

例 92 已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,$AD\perp BC$ 垂足是 D,$\angle ABC$ 的角平分线交 AD、AC 于 E、F. 求证:$\frac{BE}{BF}=\frac{AF}{CF}$.

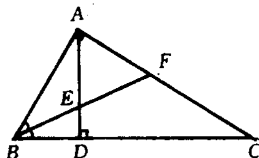


图 6・510

分析:由条件$\angle BAC=90°$和 $AD\perp BC$,应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质,可得$\angle BAD=\angle C$,而已知$\angle ABE=\angle CBF$,所以$\triangle ABE\backsim\triangle CBF$,$\frac{BE}{BF}=\frac{AE}{CF}$,这样问题就成为要证 $AE=AF$. 由于$\angle AEB=\angle CFB$,所以可证明$\angle AEF=\angle AFE$,就可完成分析.

例 93 已知:$\triangle ABC$ 中,以 AB、BC、AC 为边向形外作等边$\triangle ABD$,等边$\triangle BCE$,等边$\triangle ACF$,O_1、O_2、O_3 分别是这三个等边

三角形的中心.求证:$\triangle O_1O_2O_3$是等边三角形.

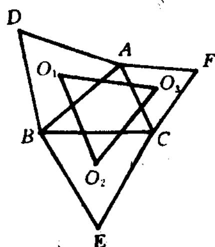


图 6・511

分析:本题条件中给出了三个两两具有一个公共顶点的等边三角形,所以必定可以组成旋转型全等三角形.根据由公共顶点发出的两组相等线段两两组成全等三角形的方法,连结DC、BF后,由$AD=AB$,$AC=AF$,$\angle DAC=\angle BAF=60^\circ+\angle BAC$,可得$\triangle ADC\cong\triangle ABF$,$DC=BF$.根据同样的道理,连结$AE$后,可证明$AE=BF=CD$.

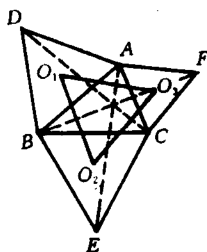


图 6・512

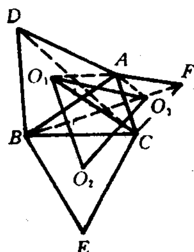


图 6・513

由条件O_1、O_3分别是等边$\triangle ABD$和等边$\triangle ACF$的中心,所以应用等边三角形的中心的性质,连结AO_1后,可得$AO_1=\frac{\sqrt{3}}{3}AB$. $\frac{AO_1}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.根据同样的道理连结$AO_3$后,可得$\frac{AO_3}{AF}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\frac{AO_1}{AB}=\frac{AO_3}{AF}$,这是由一点$A$发出的四条成比例线段,所以可考虑应用旋转型相似三角形进行证明.根据由这四条成比例线段两两组成相似三角形的方法,可得应证$\triangle AO_1O_3\backsim\triangle ABF$,由于$\frac{AO_1}{AB}=\frac{AO_3}{AF}$,$\angle BAF=60^\circ+\angle BAC$,$\angle O_1AO_3=30^\circ+\angle BAC+30^\circ$

$=\angle BAF$，所以这两个三角形相似可以证明，$\frac{O_1O_3}{BF}=\frac{AO_1}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$O_1O_3=\frac{\sqrt{3}}{3}BF$. 根据同样的道理可以证明 $O_2O_3=\frac{\sqrt{3}}{3}AE$，$O_1O_2=\frac{\sqrt{3}}{3}CD$，所以 $O_1O_3=O_1O_2=O_2O_3$ 就可以证明.

例 94 已知：$\triangle ABC$ 中，P、Q、R 是 $\triangle ABC$ 外的三点，且 $\angle PBC=\angle PCB=15°$，$\angle QBA=\angle RCA=45°$，$\angle QAB=\angle RAC=30°$. 求证：$\angle QPR=90°$，$PQ=PR$.

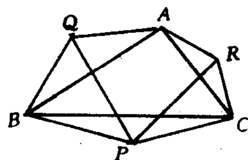


图 6・514

分析：本题条件中给出的是 15°，30°，45°的特殊角，所以可应用特殊角三角形的性质进行证明. 由于 15°和 45°的和是另一个特殊角 60°，所以可根据角的和的定义将 15°和 45°这两个两拼起来，也就是作 $\angle RCD$

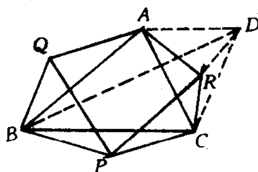


图 6・515

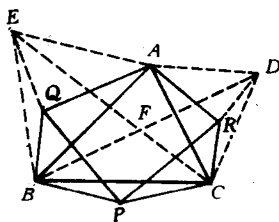


图 6・516

$=\angle BCP=15°$. 由于这两个相等的角是 C 为公共顶点的，所以可添加旋转型相似三角形进行证明. 于是由 $\triangle PBC$ 是底角为 15°的等腰三角形，则作 $\triangle RCD$ 也是底角为 15°的等腰三角形，所以在 CD 上取一点 D，使 $\angle CDR=15°$，并连结 RD，实质上也可以是作 $\angle CRD=150°$交 CD 于 D. 即可得：$\triangle PCB\backsim\triangle RCD$，所以 $\frac{PC}{RC}=$

$\frac{BC}{DC}$. 但旋转型相似三角形是两对同时出现的，所以由这四条成比例线段的 PC、RC 和 BC、DC 分别组成的三角形也必定相似，从而连结 BD 后，由 $\frac{PC}{BC}=\frac{RC}{DC}$ 和 $\angle PCR=15°+\angle BCR=\angle BCD$，可得 $\triangle PCR\backsim\triangle BCD$，$\frac{PR}{BD}=\frac{CR}{CD}$. 另一方面在得到了 $RC=RD$ 后，又可得 $\angle ARC=180°-45°-30°=105°$，$\angle ARD=360°-105°-150°=105°$，$\angle ARC=\angle ARD$，出现了这两条相等线段和这两个相等的角都是关于 RA 成轴对称的，从而可添加轴对称型全等三角形进行证明，于是连结 AD，可得 $\triangle ARC\cong\triangle ARD$，$AD=AC$，所以 $\triangle ACD$ 是等边三角形，$AC=DC$，$\frac{PR}{BD}=\frac{CR}{CA}$. 根据同样的道理，作 $\angle QBE=15°$，$\angle BQE=150°$ 相交于 E，并连结 AE，CE 后，可得 $\triangle QBE\backsim\triangle PBC$，$\triangle BPQ\backsim\triangle BCE$，$\triangle ABE$ 是等边三角形，$\frac{PQ}{CE}=\frac{BQ}{BE}=\frac{BQ}{BA}$. 根据条件 $\angle ABQ=\angle ACR=45°$，$\angle QAB=\angle RAC=30°$，所以 $\triangle ABQ\backsim\triangle ACR$，$\frac{BQ}{BA}=\frac{CR}{CA}$，从而可得 $\frac{PQ}{CE}=\frac{PR}{BD}$，这样问题就成为要证 $CE=BD$. 但 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 是两个具有公共顶点 A 的等边三角形，所以必定组成一对旋转型全等三角形，于是由 $AE=AB$，$AC=AD$，$\angle EAC=\angle BAD=60°+\angle BAC$ 就可证明 $\triangle EAC\cong\triangle BAD$，也就可证明 $CE=BD$.

如设 BD、CE 的交点为 F，由 $\triangle AEC\cong\triangle ABD$，可得 $\angle AEF=\angle ABF$，A、E、B、F 四点共圆，$\angle BFE=\angle BAE=60°$，而 $\angle BFE=\angle BCF+\angle CBF$，所以 $\angle BCF+\angle CBF=60°$，而 $\angle CPR=\angle CBD$，$\angle BPQ=\angle BCE$，所以 $\angle CPR+\angle BPQ=60°$，而已知 $\angle BPC=180°-2\times15°=150°$，所以就可证得 $\angle QPR=150°-60°=90°$.

例 95 已知：$\square ABCD$ 中，$\odot O$ 经过点 A，且与 AB、AC、AD

分别相交于 E、F、G. 求证：$AC \cdot AF = AB \cdot AE + AD \cdot AG$.

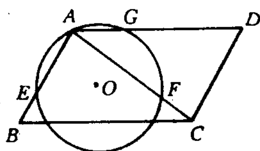


图 6・517

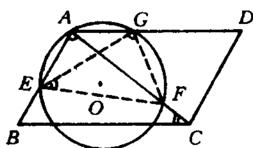


图 6・518

分析：由条件 A、E、F、G 四点共圆，所以应用圆周角的基本图形的性质，连结 EG、GF、EF 后，可得 $\angle EGF = \angle CAB$，$\angle GEF = \angle GAF$，而已知 $AD \parallel BC$，$\angle CAD = \angle ACB$，所以 $\angle GEF = \angle ACB$，就可得 $\triangle GEF \backsim \triangle ACB$，$\frac{GE}{AC} = \frac{GF}{AB} = \frac{EF}{CB}$. 由于这里出现的 GE、GF、EF 和结论中出现的 AF、AE、AG，是圆内接四边形的四条边和两条对角线，所以对每一个顶点都出现了由一点发出的三条具有比例关系的线段，从而可添加旋转型相似三角形进行证明. 实质上也就可直接应用圆内接四边形的性质 $AF \cdot EG = AE \cdot GF + AG \cdot EF$. 那末 EG 就要用与 AC 有关的关系来代，由于 $GE = \frac{GF}{AB} \cdot AC$，所以 $AF \cdot \frac{GF}{AB} \cdot AC = AE \cdot GF + AG \cdot EF$，从而 EF 也应用类似的方法来代，于是由 $EF = \frac{GF}{AB} \cdot CB$，就可得 $AC \cdot AF \cdot \frac{GF}{AB} = AE \cdot GF + AG \cdot \frac{GF}{AB} \cdot CB$，$AC \cdot AF = AB \cdot AE + BC \cdot AG$，而已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AD = BC$，所以分析就可以完成.

例 96 已知：D、E 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的两点，且 $\angle BAD = \angle CAE$. 求证：$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD \cdot BE}{CE \cdot CD}$.

分析：本题要证明的结论是线段之间的比例关系，经过描图可以发现 BD 和 BE 这一组相乘线段重叠在一直线上，所以可添加逆平行线型相似三角形进行证明. 如取过端点 E 的线段 EA 为逆

平行方向线段，则逆平行线可过内分点 D 作，也就是作 $\angle BDF=\angle BAE$ 交 AB 于 F，则 A、F、D、E 四点共圆，$BD\cdot BE=BF\cdot BA$. 根据同样的道理，作 $\angle CEG=\angle CAD$ 交 AC 于 G 后，可得 A、G、E、D 四点共圆，$CE\cdot CD=CG\cdot CA$，所以 $\frac{BD\cdot BE}{CE\cdot CD}=\frac{BF\cdot BA}{CG\cdot CA}$，从而问题就成为要证 $\frac{BF}{CG}=\frac{AB}{AC}$. $\frac{BF}{AB}=\frac{CG}{AC}$. 这是一个新的比例关系，经过描图可以发现这两组相比线段都分别重叠在一直线上，所以可添加平行线型相似三角形进行证明，也就是连结 FG 后，应证 $FG/\!/BC$. 但前述所证明的两组共圆点，都是过 A、D、E 三点的，所以 A、F、D、E、G 在同一圆上，由 $\angle FAD=\angle GAE$，可得 $\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{EG}$，所以 $FG/\!/DE$ 就可以证明.

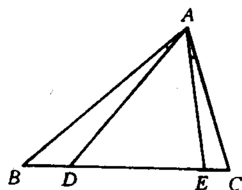


图 6・519

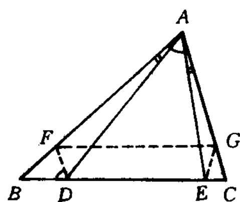


图 6・520

本题在作出 $\angle BDF=\angle BAE$ 和 $\angle CEG=\angle CAD$ 后，问题转化为要证 $\frac{BF}{BA}=\frac{CG}{CA}$，$FG/\!/BC$. 但由 $\angle FAD=\angle EAC$ 和由 A、F、D、E 四点共圆得到的 $\angle AFD=\angle AEC$，又可证明 $\triangle AFD\backsim\triangle AEC$，是一对旋转型相似三角形，所以 $AF\cdot AC=AD\cdot AE$，根据同样的道理可证明 $\triangle ABD$ 和 $\triangle AEG$ 也是一对旋转型相似三角形，所以 $AB\cdot AG=AD\cdot AE$，$AF\cdot AC=AB\cdot AG$，$\frac{AF}{AG}=\frac{AB}{AC}$，从而也可以完成分析.

例 97 已知：四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$. 求证：$\frac{AC}{BD}=\frac{AD\cdot AB+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DC\cdot DA}$.

分析：本题要证明的结论是线段之间的比例关系，经过描图可

以发现出现的圆内接四边形，实际上也就是圆内接三角形的两条邻边的积，所以可应用旋转型相似三角形的性质进行证明，于是对$\triangle ABD$来讲，可作边 BD 上的高 AE 和$\odot O$ 的直径 AM，并连结 BM，即可得$\angle ABM=\angle AED=90^\circ$，$\angle AMB=\angle ADE$，$\triangle AMB\backsim\triangle ADE$，$AB\cdot AD=AE\cdot AM$，如设$\odot O$ 的半径为 R，则有

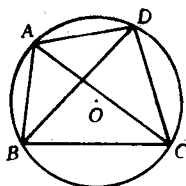


图 6・521

$AB\cdot AD=AE\cdot 2R$. 根据同样的方法，作 $CF\perp BD$，$BG\perp AC$，

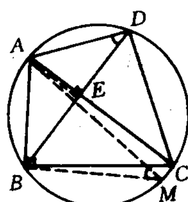


图 6・522

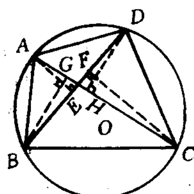


图 6・523

$DH\perp AC$，垂足分别为 F、G、H 后，可得 $CB\cdot CD=CF\cdot 2R$，$BA\cdot BC=BG\cdot 2R$，$DC\cdot DA=DH\cdot 2R$. 于是就可得 $\dfrac{AD\cdot AB+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DC\cdot DA}=\dfrac{AE\cdot 2R+CF\cdot 2R}{BG\cdot 2R+DH\cdot 2R}=\dfrac{AE+CF}{BG+DH}$，问题就转化为要证$\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{AE+CF}{BG+DH}$，$AC\cdot BG+AC\cdot DH=BD\cdot AE+BD\cdot CF$. 由于这是三角形的一边与这一边上的高的积之和，所以就可应用三角形面积的方法进行证明，$AC\cdot BG+AC\cdot DH=2S_{\triangle ABC}+2S_{\triangle ADC}$，就是四边形 $ABCD$ 的面积的 2 倍，同样的道理可以证明 $BD\cdot AE+BD\cdot CF$ 也等边四边形 $ABCD$ 的面积的 2 倍，分析完成.

例 98 已知：四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，AC、BD 相交于 M，$ME\perp AB$，$MF\perp BC$，$MG\perp CD$，$MH\perp DA$，垂足分别是 E、F、G、H. 求证：$EF+GH=EH+GF$.

分析：由条件$\angle MEB=\angle MFB=90°$，可得$M$、$E$、$B$、$F$四点共圆$\angle MFE=\angle MBE$. 而由$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆，可得$\angle ABD=\angle ACD$，所以$\angle MFE=\angle DCA$. 根据同样的道理可得$\angle MEF=\angle MBC=\angle DAC$，从而可得$\triangle MEF\backsim\triangle DAC$，$\dfrac{EF}{AC}=\dfrac{EM}{AD}$，$EF=\dfrac{ME}{AD}\cdot AC$.

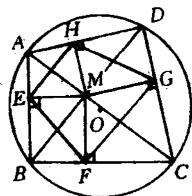


图 6·524

根据同样的道理又可得$GH=\dfrac{GM}{BC}\cdot AC$，$EF+GH=\left(\dfrac{EM}{AD}+\dfrac{GM}{BC}\right)\cdot AC$和$EH=\dfrac{EM}{BC}\cdot BD$，$FG=\dfrac{GM}{AD}\cdot BD$，$EH+FG=\left(\dfrac{EM}{BC}+\dfrac{GM}{AD}\right)\cdot BD$，问题也就转化为要证明$\left(\dfrac{EM}{AD}+\dfrac{GM}{BC}\right)\cdot AC=\left(\dfrac{EM}{BC}+\dfrac{GM}{AD}\right)\cdot BD$，$(EM\cdot BC+GM\cdot AD)\cdot AC=(EM\cdot AD+GM\cdot BC)\cdot BD$. 但由$\angle MBA=\angle MCD$和$\angle MAB=\angle MDC$，可得$\triangle MBA\backsim\triangle MCD$，$ME$和$MG$是对应边上的高，所以$\dfrac{EM}{GM}=\dfrac{AB}{CD}$，$EM=\dfrac{AB}{CD}\cdot GM$. 于是$(EM\cdot BC+GM\cdot AD)\cdot AC=\left(\dfrac{AB}{CD}\cdot GM\cdot BC+GM\cdot AD\right)\cdot AC=(AB\cdot BC\cdot AC+AD\cdot AC\cdot CD)\cdot\dfrac{GM}{CD}$，而$(EM\cdot AD+GM\cdot BC)\cdot BD=\left(\dfrac{AB}{CD}\cdot GM\cdot AD+GM\cdot BC\right)\cdot BD=(AB\cdot AD\cdot BD+BC\cdot BD\cdot CD)\cdot\dfrac{GM}{CD}$. 这样问题就成为要证$AB\cdot BC\cdot AC+AD\cdot AC\cdot CD=AB\cdot AD\cdot BD+BC\cdot BD\cdot CD$. 对这个关系式进行描图，可以发现出现了圆内接四边形，也就是圆内接三角形的邻边的积，所以可添加旋转型相似三角形进行证明对$AB\cdot BC$来说，可作$BK\perp AC$垂足是K，并作直径BP，连结CP，就可得$\triangle BAK\backsim\triangle BPC$，$BA\cdot BC=BK\cdot BP$，设$\odot O$的半径为$R$，则$BA\cdot BC=$

$BK \cdot 2R$.根据同样的道理,分别作 $DI \perp AC$,$AJ \perp BD$,$CL \perp BD$,并设垂足为 I、J、L,可得 $AD \cdot CD = DI \cdot 2R$,$AB \cdot AD = AJ \cdot 2R$,$BC \cdot CD = CL \cdot 2R$,从而问题又转化为要证 $BK \cdot AC + DI \cdot AC = AJ \cdot BD + CL \cdot BD$.由于现在出现的也是三角形一边和这一边上的高的积,所以可应用三角形面积的方法进行证明.于是可得 $BK \cdot AC = 2S_{\triangle ABC}$,$DI \cdot AC = 2S_{\triangle ADC}$,$BK \cdot AC + DI \cdot AC$ 应等于四边形 $ABCD$ 的面积的 2 倍,根据同样的道理,也可证明 $AJ \cdot BD + CL \cdot BD$ 也等于四边形 $ABCD$ 的面积的 2 倍,所以分析可以完成.

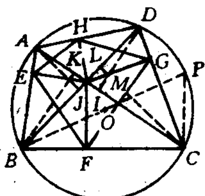


图 6·525

例 99 已知:菱形 $ABCD$ 外切于⊙O,AD、CD 与⊙O 相切于 E、F,P 是 $\overset{\frown}{EF}$ 上的任一点,过 P 作⊙O 的切线交 AD、CD 于 M、N.求证:$AM \cdot CN = AE \cdot AD$.

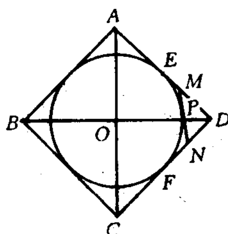


图 6·526

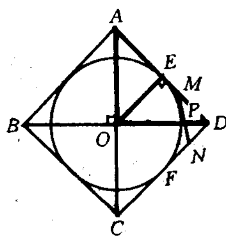


图 6·527

分析:本条件给出的四边形 $ABCD$ 是菱形,可得 $\angle AOD = 90°$,而且 AD 与⊙O 相切于 E,所以应用切线的性质,连结 OE 后可得 $OE \perp AD$,所以 OE 就成为直角△ADO 的斜边上的高,于是应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质,可得 $AE \cdot AD = AO^2$,从而问题就转化为要证明 $AM \cdot CN = AO^2$.而应用菱形的性质,有 $AO = CO$,所以问题又应证 $AO \cdot CO = AM \cdot CN$.这是一个

新的比例关系，经过描图可以发现，它们两两组成三角形，所以连结 OM、ON，在 $\triangle OAM$ 和 $\triangle NCO$ 中，由 $DA=DC$，可得 $\angle MAO=\angle OCN$. 另一方面，由 $OE\perp AD$，有 $\angle AMO+\angle MOE=90°$. 而由 AM、MN、CN 都是 $\odot O$ 的切线，故应用切线长定理及其推论，可得连结 OP、OF 后，有 $\angle EOM=\angle POM$、$\angle FON=\angle PON$，而 $\angle AOE=\angle COF$，从而就有 $\angle CON+\angle MOE=\angle COF+\angle FON+\angle MOE=\frac{1}{2}\times180°=90°$，所以 $\angle AMO=\angle CON$，从而可证明 $\triangle OAM\backsim\triangle NCO$，分析就可以完成.

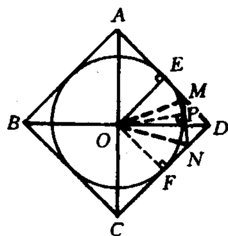


图 6・528

例 100 已知：$\odot O$、$\odot O'$ 外切于 A，两圆的半径分别为 R、r，PB、PC 分别与 $\odot O$、$\odot O'$ 相切于 B、C，且 $\frac{PB}{PC}=\frac{R}{r}$，$PA$ 交 $\odot O'$ 于 E. 求证：$\frac{PA}{PE}=\frac{R}{r}$，$\triangle PAB\backsim\triangle PEC$.

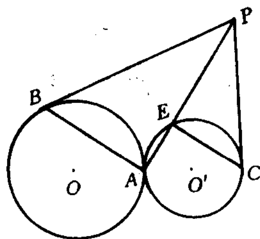


图 6・529

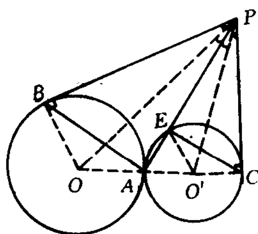


图 6・530

分析：本题条件中给出 $\odot O$、$\odot O'$ 外切于 A，所以应用两圆外切的性质，连结 OO'，必有 OO' 过点 A. 又因为 PB、PC 分别与 $\odot O$、$\odot O'$ 相切于 B、C，应用切线的性质，连结 OB、$O'C$ 后可得 $\angle OBP=90°$，$\angle O'CP=90°$，且已知 $\frac{PB}{PC}=\frac{R}{r}=\frac{OB}{O'C}$，所以 $\triangle POB$

$\backsim \triangle PO'C$，$\angle OPB=\angle O'PC$，且$\dfrac{PO}{PO'}=\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{R}{r}=\dfrac{OA}{O'A}$，所以$\angle OPA=\angle O'PA$，于是要证明的结论中一组相比线段 PA 和 PE 就重叠在一条角平分线上，所以可应用旋转型相似三角形进行证明. 于是连结 $O'E$，由 $O'E=O'A$，可得$\angle O'AE=\angle O'EA$，$\angle PAO=\angle PEO'$，$\triangle PAO\backsim\triangle PEO'$，从而就可证明$\dfrac{PA}{PE}=\dfrac{AO}{EO'}=\dfrac{R}{r}$. 当然进一步还可证明$\triangle PAB\backsim\triangle PEC$.

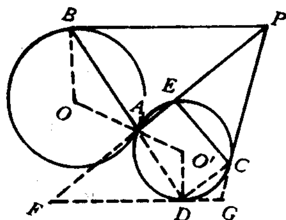


图 6・531

由条件⊙O、⊙O' 外切于 A，可得连结 OO' 后 OO' 必过点 A，则$\dfrac{R}{r}=\dfrac{OA}{O'A}$，这样就出现了两条相比线段重叠在一直线上，所以可添加平行线型相似三角形进行证明. 于是连结 BO，延长 BA 交⊙O' 于 D，连结 $O'D$，由$\angle OBA=\angle OAB=\angle O'AD=\angle O'DA$，可得$\triangle OAB\backsim\triangle O'AD$，$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{OA}{O'A}=\dfrac{R}{r}$. 这样又出现了 AB 和 AD 这一组相比线段重叠在一直线上，从而又可以添加平行线型相似三角形进行证明. 如取过端点 B 的 BP 为平行方向线段，则平行线可过另一个端点 D 作，也就是过 D 作 $FG /\!/ BP$ 交 PA、PC 的延长线于 F、G. 就可得$\triangle PAB\backsim\triangle FAD$. $\dfrac{PB}{FD}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{R}{r}$，而已知$\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{R}{r}$，所以 $FD=PC$. 且$\dfrac{PA}{FA}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{R}{r}$. 这样问题就成为要证 $PE=FA$. 由条件 PB 与⊙O 相切于 B，所以 $OB\perp PB$，而我们已证 $OB /\!/ DO'$，且 $DF /\!/ PB$，所以$O'D\perp DF$，FD 也与⊙O' 相切于 D，而 PG 与⊙O' 相切于 C，所以 $GD=GC$，$GF=GP$，连结 DC 后，可得 $DC /\!/ PF$，从而又可得$\angle DFA=\angle CPE$，$\angle FDA=\angle PCE$，在证明了$\triangle DAF\cong\triangle CEP$，是一对轴对称型全等三角形

后，就可证明 $FA=PE$，所以$\dfrac{PA}{PE}=\dfrac{R}{r}$和$\triangle PAB\backsim\triangle PEC$ 都证明.

第四节　位似型

【分析方法导引】

如果几何问题中，出现了相比两线段平行，且对应顶点的连线或它们的延长线相交于一点时，就可以想到用位似型相似三角形进行证明.这时它们的第三组对应顶点的连线必定也经过这个交点.

如果几何问题中，出现了两组具有公共顶点的平行线型相似三角形的组合关系时，也就可想到应用位似型相似三角形进行证明.在位似型相似三角形的基本图形中，共出现三对平行线型相似三角形和一对位似型相似三角形，它们之间具有两两等价性，只要其中任意两对相似成立，就必定可以推得另外两对相似成立.从而应用两两等价性就可以完成分析.

例 101　已知：$\odot O$ 和 $\odot O'$ 外离，两圆的内公切线相交于 P，与两圆的切点分别为 A、B、C、D，过 P 任作一割线交 $\odot O$、$\odot O'$ 于 E、G、F、H，两圆的半径分别为 R、r. 求证：$\dfrac{AE}{BF}=\dfrac{R}{r}$.

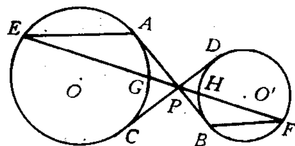


图 6・532

分析：由条件$\odot O$ 和$\odot O'$ 外离，且两圆的内公切线相交于 P，可得连线 OO' 后，OO' 必定经过 P 点. 又因为 AB 分别与$\odot O$、$\odot O'$ 相切于 A、B，所以连结 OA，$O'B$ 后可得$\angle PAO=\angle PBO'=$

$90°$，$\triangle PAO \backsim \triangle PBO'$，是一对平行线型相似三角形. $\frac{PA}{PB}=\frac{PO}{PO'}=\frac{OA}{O'B}=\frac{R}{r}$. 又因 AB、OO'、EF 共点于 P，所以可应用位似型相似三角形的性质进行证明. 于是连结 OE、$O'F$，应证$\triangle POE \backsim \triangle PO'F$，由 EF、OO' 相交于 P 可得$\angle EPO=\angle FPO'$，但$\frac{PO}{PO'}=\frac{R}{r}=\frac{OE}{O'F}$尚不构成两边对应成比例夹角相等的条件，所以还不能证明这两个三角形相似，从而可先添加平行线型相似三角形进行证明，也就是过 O、O' 分别作 $OM \perp EF$，$O'N \perp EF$，垂足分别为 M、N，即可得$\triangle POM \backsim \triangle PO'N$，$\frac{OM}{O'N}=\frac{OP}{O'P}=\frac{R}{r}$，进一步就可得$\frac{OM}{O'N}=\frac{R}{r}=\frac{OE}{O'F}$，且$\angle OME=\angle O'NF=90°$，所以$\triangle OEM \backsim \triangle O'FN$. $\frac{EM}{FN}=\frac{OE}{O'F}=\frac{R}{r}$，而$\frac{PM}{PN}=\frac{OP}{O'P}=\frac{R}{r}$，从而可得$\frac{PM+EM}{PN+FN}=\frac{PE}{PF}=\frac{R}{r}$，$\frac{PE}{PF}=\frac{PA}{PB}$，$\angle APE=\angle BPF$，$\triangle PAE \backsim \triangle PBF$，就可证明$\frac{AE}{BF}=\frac{PA}{PB}=\frac{R}{r}$.

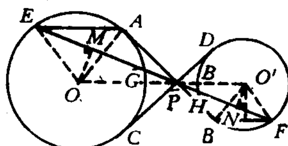


图 6・533

例 102 已知：$\odot O$、$\odot O'$ 外离，两圆的外公切线 AB、CD 的延长线相交于 P，切点分别为 A、B、C、D，过 P 任作两条割线分别交$\odot O$、$\odot O'$ 于 E、F、G、H、K、L、M、N. 求证：$\frac{EK}{GM}=\frac{FL}{HN}$.

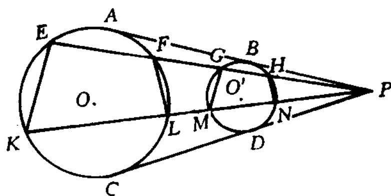


图 6・534

分析:本题给出了条件$\odot O$、$\odot O'$的外公切线AB、CD的延长线相交于P,所以应用外公切线的性质可得P必定在OO'的延长线上,所以连结OO'并延长到P. 又因为PA与$\odot O$、$\odot O'$分别相切于A、B,所以应用切线的性质,连结OA,$O'B$,可得$\angle OAP=\angle O'BP=90°$,$OA /\!/ O'B$,$\triangle PAO \backsim \triangle PBO'$,是一对平行线型相似三角形. 又因为$AP$、$EP$、$OP$三线共点于$P$,所以可应用位似型相似三角形的基本图形的性质进行证明. 于是有$\dfrac{PO}{PO'}=\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{OA}{O'B}=\dfrac{r_1}{r_2}$,这时也可先设两圆的半径为$r_1$、$r_2$. 然后过$O$、$O'$分别作$OR \perp PE$、$O'Q \perp PE$,垂足分别为$R$、$Q$,就可得$\triangle POR \backsim \triangle PO'Q$,$\dfrac{OR}{O'Q}=\dfrac{PR}{PQ}=\dfrac{PO}{PO'}=\dfrac{r_1}{r_2}$. 于是连结$OE$,$O'G$后,再由$\dfrac{OP}{O'Q}=\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{OE}{O'G}$和$\angle ORE=\angle O'QG=90°$,可得$\triangle ORE \backsim \triangle O'QG$,$\dfrac{RE}{QG}=\dfrac{OE}{O'G}=\dfrac{r_1}{r_2}$,于是可得$\dfrac{RE+PR}{QG+PQ}=\dfrac{r_1}{r_2}$,$\dfrac{PE}{PG}=\dfrac{r_1}{r_2}$. 根据同样的道理可证明$\dfrac{PK}{PM}=\dfrac{r_1}{r_2}$,所以$\dfrac{PE}{PG}=\dfrac{PK}{PM}$,且$\angle EPK=\angle GPM$,就可得$\triangle PEK \backsim \triangle PGM$,$\dfrac{EK}{GM}=\dfrac{PE}{PG}=\dfrac{r_1}{r_2}$. 根据同样的道理还可证明$\dfrac{FL}{HN}=\dfrac{r_1}{r_2}$,所以分析可以完成.

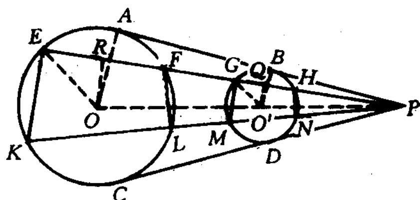


图 6・535

例 103 已知:$\triangle ABC$内接于$\odot O$,AD、CE是高,H是垂心,AM、CN是中线,G是重心. 求证:O、G、H三点共线,$GH=2OG$.

分析:本题要证明O、G、H三点共线,而已知N、G、C在一直线上,所以根据三点成一直线的定义,将这三点分两次连结,也就

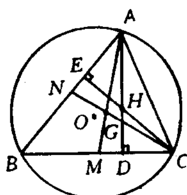


图 6・536

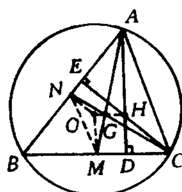


图 6・537

是连结 OG、GH 后，应证$\angle OGN=\angle HGC$. 而已知 N 是 AB 的中点，而 AB 是$\odot O$ 的弦，所以应用弦的中点的性质，连结 ON 后，应得 $ON\perp AB$，$ON/\!/CH$，$\angle ONG=\angle HCG$，所以要证明这两个角相等，就应证$\triangle OGN\backsim\triangle HGC$. 它们应是一对平行线型相似三角形，而要证明 O、G、H 共线，就出现了 NC，MA 和 OH 是相交于一点 G 的，所以就可应用位似型相似三角形的基本图形的性质进行证明. 于是连结 MN，OM. 由 M、N 分别是 BC、BA 的中点，可得 $MN/\!/AC$，$\dfrac{MN}{AC}=\dfrac{1}{2}$. 而由 $ON/\!/CH$，$MN/\!/CA$，可得$\angle ONM=\angle HCA$，根据同样的道理，可得$\angle OMN=\angle HAC$，所以$\triangle OMN\backsim\triangle HAC$，$\dfrac{ON}{HC}=\dfrac{OM}{HA}=\dfrac{MN}{AC}=\dfrac{1}{2}$，而由 G 是$\triangle ABC$ 的重心，又可得 $\dfrac{GN}{GC}=\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{ON}{HC}=\dfrac{GN}{GC}=\dfrac{1}{2}$，且$\angle GHO=\angle GCH$，就可证明$\triangle OGN\backsim\triangle HGC$，$\angle OGN=\angle HGC$，且$\dfrac{OG}{GH}=\dfrac{NG}{CG}=\dfrac{1}{2}$，从而可完成分析.

例 104 已知：O 是$\triangle ABC$ 的外心，AD、CE 是高，H 是垂心，G、F 分别是 AB、AC 上的两点，$AG=AH$、$AF=AO$. 求证：$GF=AO$.

分析：本题条件中给出的 $AG=AH$ 中的 AH 是$\triangle ABC$ 的顶点 A 到垂心 H 的距离，因而就要应用三角形的垂心的性质，也就是三角形的顶点到垂心的距离等于它的外心到对边距离的 2 倍来

进行证明. 于是应将 O 到对边 BC 的距离作出，也就是过 O 作 $OM \perp BC$ 交 BC 于 M，则 $AH=2OM$. 这是两条线段之间的倍半关系，且由 $OM \perp BC$ 可得 M 是 BC 的中点，所以可应用三角形的中位线的基本图形的性质进行证明. 若将半线段 OM 取作三角形的中位线，则应将三角形的边添出. 由于这时 O 也必须

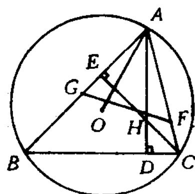


图 6・538

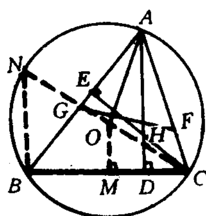


图 6・539

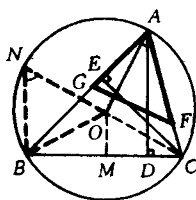


图 6・540

成为中点，而已知 O 点是圆心，所以应添过 BC 的端点的直径. 于是作直径 CN，并连结 BN，就可得 $BN=2OM=AH=AG$，而由 A、N、B、C 四点共圆，又可得 $\angle BNO=\angle GAF$，且 $NO=OA=AF$，所以就可证明 $\triangle BNO \cong \triangle GAF$，于是就可证得 $GF=BO=AO$.

第七章　特殊角三角形

【分析方法导引】

如果几何问题中出现了 30°、60°、120°、150°这些特殊角，或者线段之间的倍半关系，且这种倍半关系是和上述特殊角有联系的，或者线段之间的 $\sqrt{3}$ 倍关系时，就可以想到应用 30°角的直角三角形的性质进行证明. 接下来就应从 30°角一边上的点向另一边作垂线，构成 30°角的直角三角形后完成分析.

如果几何问题中出现了 45°、135°这些特殊角，或者 15°、75°这些 30°角和 45°角的组合关系，或者线段之间的 $\sqrt{2}$ 倍关系时，就可想到要应用 45°角的直角三角形的性质进行证明. 然后就可以从 45°角一边上的点向另一边作垂线，构成 45°角的直角三角形后完成分析.

例 1　已知：AB 是半圆的直径，OC 是半径且 $OC\perp AB$，D 是 OC 的中点，过 D 作 $EF\parallel AB$ 交半圆于 E、F. 求证：$\angle CBE=2\angle EBA$.

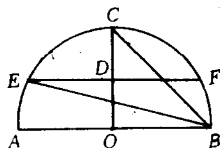


图 7・1

分析：由条件 $OB=OC$ 是同圆的两条半径和 $OB\perp OC$，可得△OBC 是一个等腰直角三角形，$\angle CBO=45°$，从而要证 $\angle CBE=2\angle EBA$，就只要证明 $\angle CBE=30°$. 就应证 $\overset{\frown}{EC}=60°$，或者也就是要证 $\overset{\frown}{EC}$ 所对的圆心角是 60°，于是连结 OE，应证 $\angle DOE=60°$. 但已知 $EF\parallel AB$、$OD\perp OB$，所以 $\angle ODE=90°$，于是△OED 就是一个 30°角的直角三角

形，这样要证$\angle DOE=60°$，就只要证$OD=\frac{1}{2}OE$. 因$OD=\frac{1}{2}OC$，而$OC=OE$，所以分析就可以完成.

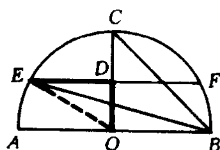


图 7・2

例 2　已知：AB是$\odot O$的直径，延长AB到C，使$BC=OB$，CD与$\odot O$相切于D，过B作$\odot O$的切线交CD和AD的延长线于F、E. 求证：$\triangle DEF$是等边三角形.

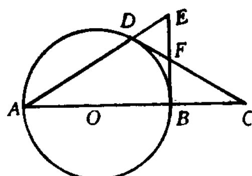


图 7・3

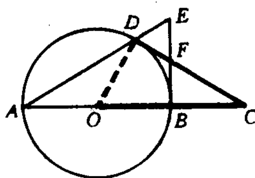


图 7・4

分析：由于CD是$\odot O$的切线，且切点是D，所以应用弦切角的基本图形的性质，可得连结OD后，有$\angle ODC=90°$. 因$OC=2OB=2OD$，所以$\triangle COD$就成为一个30°角的直角三角形，于是$\angle C=30°$，$\angle COD=60°$. 又因为$OD=OA$，且A、O、C成一直线，所以应用等腰三角形的基本图形的性质可得$\angle COD=2\angle A$，或$\angle A=\frac{1}{2}\angle COD=30°$. 于是$\angle A=\angle C=30°$，从而$\angle EDF=2\angle A=60°$. 又因为$EB$与$\odot O$相切于$B$，$AB$是直径，可得$\angle FBO=90°$，所以$\angle E=90°-\angle A=60°$，就可证明$\triangle DEF$是等边三角形.

例 3　已知：正六边形$ABCDEF$内接于$\odot O$，等边$\triangle GHK$外切$\odot O$于A、C、E. 求证：$S_{\triangle ACE}\cdot S_{\triangle GHK}=S^2_{正六边形}$.

分析：由本题的条件KA、KE与$\odot O$相切于A、E，应用切线的性质，连结OA后，有$\angle OAK=90°$. 应用切线长定理及其推论，连结OK交AE于M后，可得$OK\perp AE$，M是AE的中点，

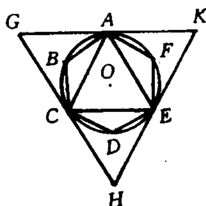


图 7 • 5

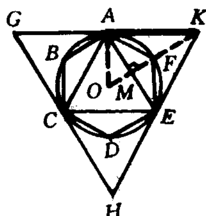


图 7 • 6

$\angle AKO=\frac{1}{2}\angle AKE=30°$. 又因为 F 是 $\overset{\frown}{AE}$ 的中点，所以 OK 过 F 点. 从而可得 $\triangle OKA$、$\triangle AKM$、$\triangle OAM$ 都是 30°角的直角三角形.

现设 $\odot O$ 的半径 $OA=R$，则 $OM=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}R$，$AM=\sqrt{3}OM=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，$AE=AK=\sqrt{3}\cdot AO=\sqrt{3}R$，$GK=2AK=2\sqrt{3}R$. 所以 $S_{\triangle ACE}=\frac{\sqrt{3}}{4}AE^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{3}R)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$，$S_{\triangle GHK}=\frac{\sqrt{3}}{4}GK^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3}R)^2=3\sqrt{3}R^2$，$S_{正六边形}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}R^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$，从而就可以证明结论.

例 4 已知：D、E、F 是等边 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 的中点，过 D、E、C 三点作 $\odot O$. 求证：$\odot O$ 与 DF 相切.

分析：要证明 DF 与 $\odot O$ 相切于 D，根据切线的判定定理，就应连结 OD 后，证明 $\angle ODF=90°$. 因 D、E、F 分别是等边三角形三边的中点，所以可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 于是连结 DE，由 $DE/\!/BA$ 和 $DF/\!/CA$，可得 $\angle EDF$ 等于 60°，从而问题就转化成为要证明 $\angle ODE=30°$. 从而就可以应用 30°角的直角三角形的性质进行证明，于是延长 DO 交 CE 于 G，由 $\triangle EDC$ 也是等边三角形，可证明 $\angle DGE=90°$. $\angle EDO=30°$，从而

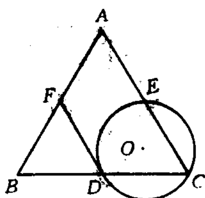


图 7・7

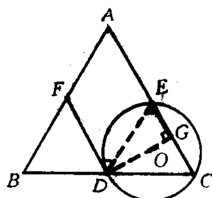


图 7・8

就可完成分析.

本题由 D、E、F 分别是等边三角形三边的中点,所以连结 DE 后,可证明 $DE \parallel BA$, $DF \parallel CA$, $\angle EDF = 60°$,所以 $\angle EDF = \angle C$,从而应用弦切角的基本图形的性质就可以证明 FD 与⊙O 相切于 D.

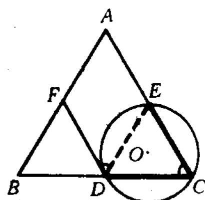


图 7・9

例 5 已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$, $\angle A = 15°$. 求证:$AB^2 = 4BC \cdot AC$.

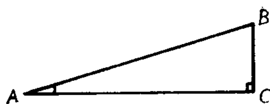


图 7・10

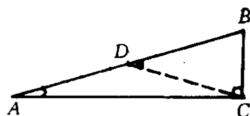


图 7・11

分析:本题要证明的结论 $AB^2 = 4BC \cdot AC$ 是线段之间的比例关系,但式中出现了 4 倍的关系,所以可转化为要证 $\frac{1}{4}AB^2 = BC \cdot AC$, $\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = BC \cdot AC$. 于是根据线段倍半关系的定义,取 AB 的中点 D,问题就成为要证 $BD^2 = BC \cdot AC$. 但现在出现了直角三角形斜边的中点,所以可用添加直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明. 于是连结 CD,可得 $CD = BD = \frac{1}{2}AB$,

从而问题就成为要证 $CD^2=BC\cdot AC$. 同时又可得 $CD=AD$, $\angle CDB=2\angle A=30°$, 这样就出现了 30°的特殊角，所以可添加 30°角的直角三角形进行证明. 添加的方法是过 30°角的一边 DC 上的点 C

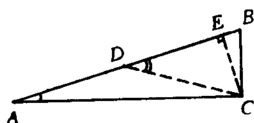


图 7·12

向另一边作垂线，所以过 C 作 $CE\perp AB$, 垂足是 E, 即可得 $CD=2CE$, 也就应证 $4CE^2=BC\cdot AC$. 由于 CE 是直角$\triangle ABC$ 的斜边上的高，所以 $\angle BCE=\angle BAC=15°$, $\triangle BCE\backsim\triangle BAC$, 是一对逆平行线型相似三角形，所以 $\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{BC}{AB}$, $AB\cdot CE=BC\cdot AC$, 由于 $AB=2CD=4CE$, 所以上述性质可以证明.

例 6 已知：四边形 $ABCD$ 中，$DC/\!/AB$, $\angle D=90°$, E 是 BC 的中点，且 $AE\perp BC$, $AB=2CD$.

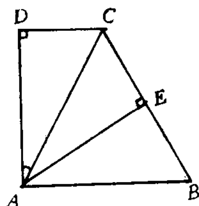


图 7·13

求证：AC、AE 三等分$\angle DAB$.

分析：由条件四边形 $ABCD$ 是梯形，且 $\angle D=90°$, 可得 $\angle DAB=90°$, 现要证明 AC、AE 三等分$\angle DAB$, 就是要证 $\angle CAD=\dfrac{1}{3}\cdot 90°=30°$, 所以就要应用 30°角的直角三角形的性质进行证明. 由条件 $\angle D=90°$, 所以就应证明 $AC=2DC$, 但已知 $AB=2DC$. 所以又应证 $AB=AC$. 由条件 AE 是 BC 的垂直平分线，所以这一性质是可以证明的.

例 7 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$, $\angle BAC=120°$, D 是 AB 的中点，E 是 BC 上的一点，且 $ED\perp AB$.

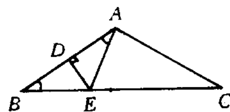


图 7·14

求证：$AE+DE=\dfrac{1}{2}BC$.

分析：由本题的条件 $AB=AC$, $\angle BAC$

$=120°$，可得$\angle B=\angle C=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$，所以可应用 30°角的直角三角形的性质进行证明. 由条件$\angle EDB=90°$，可得 $BE=2DE$. 又因为 ED 是 AB 的垂直平分线，所以 $EB=EA$，$\angle EAB=\angle B=30°$，于是$\angle CAE=120°-30°=90°$，而$\angle C=30°$，所以再次应用 30°角的直角三角形的性质又可得 $CE=2AE$. 从而就可以证明 $AE+DE=\frac{1}{2}CE+\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}BC$.

例 8 已知：正方形 $ABCD$ 中，分别以 A、B、C、D 为圆心，以$\frac{1}{2}AC$ 的长为半径画弧交四边形的四边于 E、F、G、H、I、J、K、L.

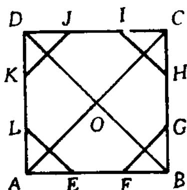


图 7·15

求证：八边形 $EFGHIJKL$ 是正八边形.

分析：要证明一个八边形是正八边形，就应根据正八边形的定义，证明它的八个内角和八条边都相等，而在实际证明时，只要证明它的邻角和邻边相等即可. 也就是只须证明$\angle LEF=\angle EFG$，$LE=FE$.

由于从 $AL=AD-\frac{1}{2}AC$、$AE=AB-\frac{1}{2}AC$、$AL=AE$ 和 $\angle LAE=90°$可得$\triangle AEL$ 是等腰直角三角形，所以$\angle AEL=45°$，$\angle LEF=180°-45°=135°$，同理可证$\angle EFG$ 也等于 135°. 所以$\angle LEF=\angle EFG$. 由于$\triangle AEL$、$\triangle ABO$ 和$\triangle ABD$ 都是 45°角的直角三角形，所以 $BD=\sqrt{2}AB$，$BO=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$，$AE=AB-BE=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)AB=\frac{2-\sqrt{2}}{2}AB$，$EL=\sqrt{2}AE=\sqrt{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)AB=(\sqrt{2}-1)AB$. $BF=AE=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot AB$，$EF=AB-2AE=AB-2AB+\sqrt{2}AB=(\sqrt{2}-1)AB$，所以 $LE=FE$，分析就可以完成.

本题在证明了$\angle LEF=\angle EFG=135°$后，由 $BO=BF$ 是两条具有公共端点 B 的相等线段，就可组成等腰三角形，所以连结 OE，就可得$\angle BOE=\angle BEO$，而由$\angle AEL=45°$和$\angle ABD=45°$，

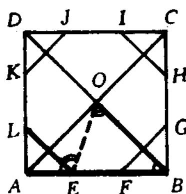


图 7・16

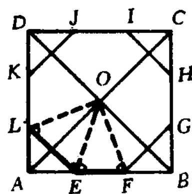


图 7・17

可得 $EL /\!/ BD$，$\angle LEO=\angle BOE$，所以$\angle BEO=\angle LEO$，这样就可得 EO 是$\angle FEL$ 的平分线，也就是 LE 和 FE 这两条要证明相等的线段是关于角平分线 EO 成轴对称的，从而就可以通过添加轴对称型的全等三角形进行证明. 由 EO 是对称轴，L、F 是对称点，所以连结 OL、OF，应证明$\triangle OEL\cong\triangle OEF$. 由于$\angle OEL=\angle OEF=\frac{1}{2}\angle LEF=\frac{135°}{2}$，且用同样的方法可证$\angle OLE=\angle OFE=\frac{135°}{2}$，所以再由 $OE=OE$ 就可以完成证明.

例 9 已知：DE 是$\odot O$ 的直径，弦 AB 交 DE 于 C，$\angle ACD=45°$. R 为圆半径. 求证：$AC^2+BC^2=2R^2$.

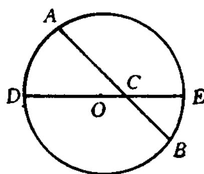


图 7・18

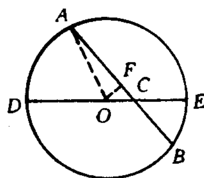


图 7・19

分析：本题条件中给出了$\angle ACD=45°$，所以可添加 45°角的直

角三角形进行证明，添加的方法是过 45°角一边上的点向另一边作垂线. 于是过 O 作 $OF \perp AB$，垂足是 F，那末$\triangle OCF$ 就是一个等腰直角三角形，所以 $OF=CF$. 又因为 $OF \perp AB$，所以 $AF=BF$，于是 $AC^2+BC^2=(AF+CF)^2+(BF-CF)^2=AF^2+2\cdot AF\cdot CF+CF^2+BF^2-2BF\cdot CF+CF^2=2AF^2+2CF^2=2(AF^2+CF^2)$，这样问题就成为要证 $AF^2+CF^2=R^2$，而 $CF=OF$，所以又应证明 $AF^2+OF^2=R^2$. 而 $AF \perp OF$，AF 和 OF 可以看作是直角三角形的两条直角边，所以连结 OA 后由 $AF^2+OF^2=OA^2$ 就可证明结论.

例 10 已知：四边形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AB=AC$. $\angle BAC=90°$，$BD=BC$，BD、AC 相交于 E. 求证：$CE=CD$.

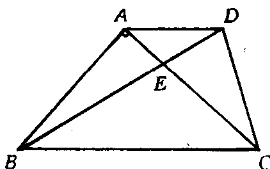


图 7・20

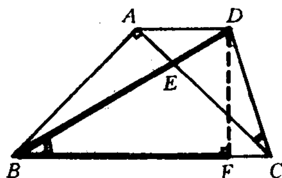


图 7・21

分析：本题要证明 $CE=CD$，这是两条具有公共端点的相等线段，它们可组成一个等腰三角形，即要判定$\triangle CDE$ 是一个等腰三角形. 而由条件 $BD=BC$，可得$\triangle BCD$ 也是一个等腰三角形. 而这两个等腰三角形有一个公共的底角，所以这两个等腰三角形必定相似，是一对逆平行线型相似三角形，所以问题转化为要证 $\angle ECD=\angle DBC$. 又因为 $AB=AC$ 和 $AB \perp AC$，所以$\triangle ABC$ 就是一个等腰直角三角形，$\angle ACB=45°$. 于是 $\angle DBC+2(45°+\angle ECD)=180°$，$\angle DBC+2\angle ECD=90°$，于是要证明 $\angle ECD=\angle DBC$，就转化成为要证 $\angle DBC=30°$. 由于现在出现了一个 30°的特殊角，所以就应添加 30°角的直角三角形进行证明，添加的方

法是过 30°角一边上的点向另一边作垂线. 于是过 D 作 $DF\perp BC$ 垂足是 F,那末要证明$\angle DBC=30°$,就只要证明 $DF=\frac{1}{2}BD$,而 $BD=BC$,所以又应证 $DF=\frac{1}{2}BC$. 这是两条线段之间的倍半关系,且其中的倍线段 BC 是直角三角形 ABC 的斜边,所以可通过添加直角三角形斜边上的中线的基本图形进行证明. 于是取 BC 的中点 G,连结 AG,可得 $AG=\frac{1}{2}BC$,从而问题就转化成为要证 $AG=DF$. 由于 DF 是 AD、BC 这一组平行线之间的距离,而由 $AB=AC$ 和 $BG=CG$,也可证明 $AG\perp BC$,所以 $AG=DF$ 就可以证明.

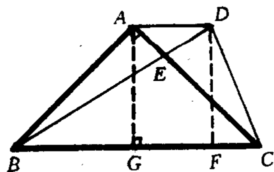


图 7・22

例 11 已知:$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$. $\angle BAC=90°$,$AD/\!/CB$,且 $BD=BC$,DB、AC 的延长线相交于 E. 求证:$CD=CE$.

分析:由条件 $BC=BD$,这是两条具有公共端点的相等线段,所以它们组成的$\triangle BDC$ 是等腰三角形,而 D、B、E 成一直线,所以$\angle CBE=2\angle BDC$. 再由 $BC/\!/DA$,又可得$\angle ADB=\angle CBE=2\angle BDC$. 由条件 $AB=AC$ 和$\angle BAC=90°$,可得$\triangle ABC$ 是一个等腰直角三角形,所以$\angle ACB=45°$. 又因为$\angle ACB$ 是$\triangle BCE$ 的一个外角,故$\angle ACB=\angle E+\angle EBC=45°$,而问题是要证 $CD=CE$,$\angle CDE=\angle E$,所以应证$\angle CDE+\angle EBC=\angle CDE+2\angle CDE=3\angle CDE=45°$,就是要证$\angle BDC=15°$,$\angle ADB=2\angle BDC=30°$. 由于出现了 30°的特殊角,所以就可以添加 30°角的直角三角形的基本图形进行证明. 添加的方法是过 30°角的一边上的点向另一边作垂线. 于是过 B 作 $BG\perp AD$ 交 AD 于 G,问题就应证明 $BG=\frac{1}{2}BD$,而 $BD=BC$,所以又成为要证 $BG=\frac{1}{2}BC$. 这是两条线段之间的倍半关系,且 BC 是直角$\triangle ABC$ 的斜边,所以就可以添加直

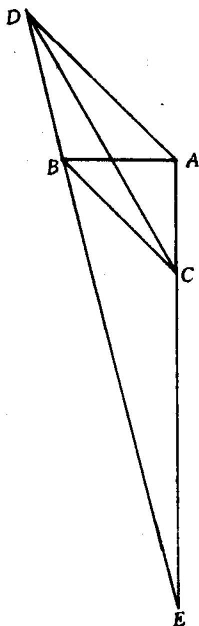


图 7・23

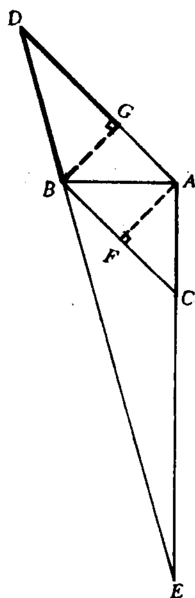


图 7・24

角三角形斜边上中线的基本图形进行证明. 于是取 BC 的中点 F，连结 AF，得 $AF=\frac{1}{2}BC$，$AF\perp BC$，从而通过证明 $BG=AF$. 就可以完成分析.

例 12 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60°$，O 是外心，N 是内心，H 是垂心. 求证：$IO=IN$.

分析：由 I 是$\triangle ABC$ 的内心，可得$\angle BAI=\angle CAI$. 而这两个角在$\odot O$ 中都是圆周角，所以应用圆周角的基本图形的性质，延长 AI 交$\odot O$ 于 K，可得$\overset{\frown}{BK}=\overset{\frown}{CK}$，或 K 是$\overset{\frown}{BC}$的中点. 于是再应用弧的中点的性质，连结 OK 交 BC 于 M，可得 $OK\perp BC$. 又因为 N 是

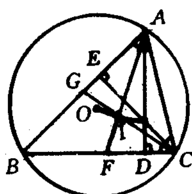


图 7・25

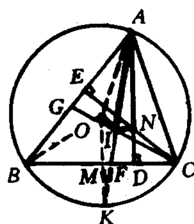


图 7・26

$\triangle ABC$ 的垂心，所以 $AD \perp BC$，于是 $OK \parallel AD$. 又因为 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，而 OK 是 $\odot O$ 的半径，A 是 $\odot O$ 上的点，所以连结 OA 后，有 $OK=OA$，从而 $\angle OAK=\angle K=\angle DAK$.

由条件 $\angle BAC=60°$，可得 $\overset{\frown}{BK}=\frac{1}{2}\cdot 120°=60°$，故连结 OB，可得 $\angle BOK=60°$，而 $\angle OMB=90°$，所以应用 $30°$ 角的直角三角形的性质可得 $BO=2OM$，又因为 AN 是 $\triangle ABC$ 的一个顶点 A 到垂心 H 的距离，所以它应等于它的外心到对边的距离的两倍，所以 $AN=2OM$，从而可得 $AN=BO=AO$. 于是 $\triangle AOI$ 和 $\triangle ANI$ 就是一对轴对称型的全等三角形，结论就可以证明.

例 13 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60°$，H 是垂心，O 是外心，直线 OH 交 AB、AC 于 D、E. 求证：$\triangle ADE$ 是等边三角形.

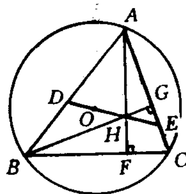


图 7・27

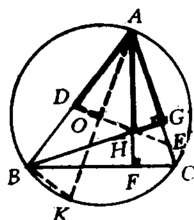


图 7・28

分析：由于 $\angle BAC=60°$，所以要证明 $\triangle ADE$ 是等边三角形，就只要证明 $AD=AE$ 或 $\angle ADE=\angle AED$，但因 $\angle BAC=60°$、H 是 $\triangle ABC$ 的垂心和 O 是外心，所以应用圆周角的基本图形的性质

和 30°角的直角三角形的性质，连结 OA 后，可得 $AH=AO$ 和 $\angle AHO=\angle AOH$，于是$\angle AHE=\angle AOD$. 那末问题就成为要证$\triangle AHE$ 和$\triangle AOD$ 是一对轴对称型的全等三角形. 由于$\angle DAO$ 和$\angle EAH$ 都是圆周角，所以应用圆周角的基本图形的性质，延长 AO 交⊙O 于 K，并连结 BK 后，可得$\angle ABK=90°$，$\angle K=\angle C$，而已知$\angle AFC=90°$，所以$\angle DAO=\angle EAH$，分析就可以完成.

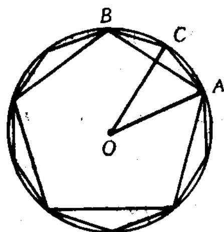


图 7・29

例 14 已知：a_5、a_{10}分别是⊙O 的内接正五边形和内接正十边形的边长，R 是⊙O 的半径. 求证：$a_5^2=a_{10}^2+R^2$.

分析：因 AC 是圆内接正十边形的边，所以$\angle AOC=\dfrac{360°}{10}=36°$，于是可应用 36°顶角的等腰三角形的性质进行证明，也就可得$\angle OAC=72°$，$\angle OAC=2\angle AOC$，于是可根据角的倍半关系的定义作$\angle OAC$ 的平分线交 OC 于 D，得$\angle CAD=\angle OAD=\angle AOC=36°$、$\angle ACD=\angle ADC=\angle OAC=72°$、$OD=AD=AC=a_{10}$. 如圆内接正五边形的边 AB 交 OC 于 E，那末 $OC\perp AB$，$AE=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a_5}{2}$. 而 $DE=CE=\dfrac{R-a_{10}}{2}$，所以 $a_{10}^2=\left(\dfrac{a_5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{R-a_{10}}{2}\right)^2$，$4a_{10}^2=a_5^2+R^2-2R\cdot a_{10}+a_{10}^2$，也就是 $a_5^2=3a_{10}^2+2R\cdot a_{10}-R^2$. 于是要证明 $a_5^2=a_{10}^2+R^2$，就可以转化为要证 $2a_{10}^2+2R\cdot a_{10}-R^2=R^2$，即要证 $a_{10}^2=R(R-a_{10})$. 而由$\angle DAC=\angle AOC=36°$，可得$\triangle DAC$ 和$\triangle AOC$ 是一对逆平行线型相似三角形，所以 $AC^2=CO\cdot CD$. 即可证明 $a_{10}^2=R(R-a_{10})$，分析完成.

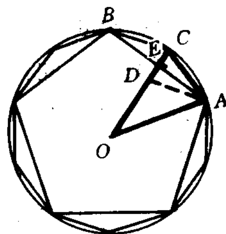


图 7・30

第八章　有关三角形面积的基本图形

【分析方法导引】

当几何问题中出现了具有公共底边的三角形的等积变形问题时，就可以想到应用同底等高的三角形等积的性质进行证明. 这时就应考虑添加过公共底边所对的顶点作这条公共底边的平行线的方法来进行和完成分析.

当几何问题中出现了三角形一边上的 n 等分点，且又与三角形的面积有联系时，就可以想到应用等底同高的三角形等积的性质进行证明. 然后就应将一边上的 n 等分点与所对的顶点连线后，再应用面积的方法来完成分析.

当几何问题中出现了相比两线段重叠在一直线上时，就可以想到应用面积的方法来进行证明. 然后就将过线段内分点的线段上的两点与线段的两个端点分别连接起来，将线段之比转化成相对应的两个三角形的面积之比，从而完成分析.

例 1　已知：$\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别是 AB、BC、CA 上的点，且 $\frac{AD}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CA}=\frac{1}{3}$，$AE$、$BF$、$CD$ 两两相交于 G、H、K. 求证：$S_{\triangle GHK}=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}$. $AG:GH:HE=3:3:1$.

分析：本题要证明的结论是三角形面积之间的关系，且条件中给出了三角形一边上的三分之一分点，所以可应用三角形的面积

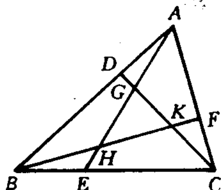


图 8·1

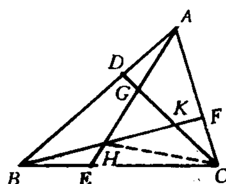


图 8·2

的基本图形的性质进行证明. 由 $\frac{BE}{CE}=\frac{1}{2}$,可得 $S_{\triangle ABE}:S_{\triangle ACE}=1:2$. 而 A、H 是过内分点 E 的线段 AE 上的两点,所以连结 CH 后,可得 $S_{\triangle HBE}:S_{\triangle HCE}=1:2$,$S_{\triangle HEC}=2S_{\triangle HBE}$,$S_{\triangle HBC}=3S_{\triangle HBE}$. 而 B、H 又是过内分点 F 的线段 BF 上的两点,所以 $S_{\triangle ABH}:S_{\triangle CBH}=AF:CF=2:1$,就可得 $S_{\triangle ABH}=2S_{\triangle HBC}=6S_{\triangle HBE}$,$AH:HE=S_{\triangle ABH}:S_{\triangle HBE}=6:1$,$S_{\triangle HBE}=\frac{1}{7}S_{\triangle ABE}$. 但 $S_{\triangle ABE}:S_{\triangle ABC}=BE:BC=1:3$,$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$,所以 $S_{\triangle HBE}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$,同理可证 $S_{\triangle ADG}=S_{\triangle CFK}=S_{\triangle HBE}=\frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$,所以 $S_{\triangle GAD}+S_{\triangle HBE}+S_{\triangle KCF}=\frac{3}{21}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}$,于是就应证 $S_{\triangle GAD}+S_{\triangle HBE}+S_{\triangle KCF}=S_{\triangle GHK}$. 由于 $S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BCF}+S_{\triangle CAD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}+\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}+\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABC}$,$S_{\triangle HBE}+S_{\triangle ABH}+S_{\triangle KCF}+S_{\triangle BCK}+S_{\triangle GAD}+S_{\triangle CAG}=S_{\triangle ABH}+S_{\triangle BCK}+S_{\triangle CAG}+S_{\triangle GHK}$,所以上述性质可以证明.

又因 $S_{\triangle ACG}=6S_{\triangle AGD}=6S_{\triangle HBE}$,$S_{\triangle ACH}=2S_{\triangle ABH}=12S_{\triangle HBE}$,所以 $S_{\triangle ACH}=2S_{\triangle ACG}$,$S_{\triangle ACG}=S_{\triangle HCG}$,从而可得 $AG=HG$,也就可证明 $AG:GH:HE=3:3:1$.

例 2 已知:四边形 $ABCD$ 中,E、F 分别是 BC、AD 的中点. 求证:$S_{四边形AECF}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$.

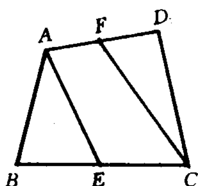


图 8・3

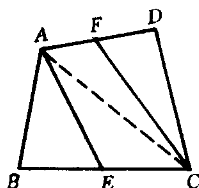


图 8・4

分析:本题给出的条件是一个四边形的问题,所以可转化为三角形的问题来进行分析.转化的方法是添对角线,于是连结 AC,AC 就将这个四边形分成两个三角形.在$\triangle ABC$中,由 E 是 BC 的中点,可得 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACB}$,而在$\triangle ACD$中,由 F 是 AD 的中点,又可得 $S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}$,从而就可证明 $S_{四边形AECF}=S_{\triangle ACE}+S_{\triangle ACF}$ $=\frac{1}{2}S_{\triangle ACB}+\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}(S_{\triangle ACB}+S_{\triangle ACD})=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$.

例 3 已知:四边形 $ABCD$ 中,E、F 是 AD 的三等分点,G、H 是 BC 的三等分点.求证:$S_{EGHF}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

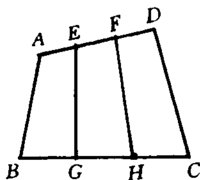


图 8・5

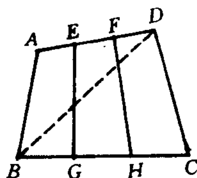


图 8・6

分析:本题条件中给出的是一个四边形的问题,所以可转化为三角形的问题来进行分析,转化的方法是添对角线.于是连结 BD,在$\triangle BCD$中,现在出现了 G、H 是一条边 BC 的三等分点,所

以可添加过分点的面积等分线，于是连结 DH，就可得 $S_{\triangle DHC}=\frac{1}{3}S_{\triangle DBC}$，$S_{\triangle DBH}=\frac{2}{3}S_{\triangle DBC}$. 根据同样的道理，在△$BDA$ 中连结

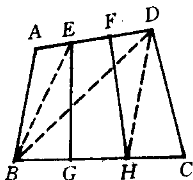


图 8・7

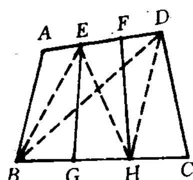


图 8・8

BE，可得 $S_{\triangle BDE}=\frac{2}{3}S_{\triangle BDA}$，所以 $S_{\triangle DBH}+S_{\triangle BDE}=\frac{2}{3}S_{\triangle DBC}+\frac{2}{3}S_{\triangle BDA}=\frac{2}{3}(S_{\triangle DBC}+S_{\triangle BDA})=\frac{2}{3}S_{四边形ABCD}$. 而 $S_{\triangle DBH}+S_{\triangle BDE}=S_{四边形EBHD}$. 而结论中出现的四边形 $EGHF$ 包含于四边形 $EBHD$ 之中，所以要证明 $S_{四边形EGHF}=\frac{1}{3}S_{四边形ABCD}$，就转化为要证 $S_{四边形EGHF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}S_{四边形EBHD}=\frac{1}{2}S_{四边形EBHD}$.

现在的问题仍然是一个四边形的问题，所以还是应转化成三角形的问题来进行分析，于是连结 EH，可得 $S_{\triangle EHG}=\frac{1}{2}S_{\triangle EHB}$，$S_{\triangle EHF}=\frac{1}{2}S_{\triangle EHD}$，所以 $S_{四边形EGHF}=S_{\triangle EHG}+S_{\triangle EHF}=\frac{1}{2}S_{EHB}+\frac{1}{2}S_{\triangle EHD}=\frac{1}{2}(S_{\triangle EHB}+S_{\triangle EHD})=\frac{1}{2}S_{四边形EBHD}$，分析完成.

由条件 E、F 和 G、H 分别是 AD、BC 的三等分点，所以 E、F、G、H 分别是 AF、DE、BH、CG 的中点，是多个中点问题，从而可应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明. 但由于这四个中点所在的线段没有公共端点，不能组成三角形，所以这四个中点两两的连线都不是三角形的中位线，因而要增加中点，且要增加与已知中点所在的线段有公共端点的线段的中点. 所以选取增加对角

线的中点.由于条件中的中点是以三等分点的形式给出的，所以增加的中点也可以以三等分的形式来增加，于是连结 BD，取 BD 的三等分点 M、N. 那末连结 EM、FN 后，可得 $FN // EM // AB$、$FN : EM : AB = 1 : 2 : 3$. $S_{\triangle DFN} : S_{\triangle DEM} : S_{\triangle DAB} = 1 : 4 : 9$，$S_{四边形FEMN} : S_{\triangle DAB} = 3 : 9 = 1 : 3$. 根据同样的道理，连结 GM、HN 后，可得 $S_{四边形GHNM} : S_{\triangle DBC} = 1 : 3$，所以 $S_{四边形FEMN} + S_{四边形GHNM} = \frac{1}{3}S_{\triangle DAB} + \frac{1}{3}S_{\triangle DBC} = \frac{1}{3}S_{四边形ABCD}$. 于是问题就要证明四边形 $EGHF$ 的面积应等于四边形 $FEMN$ 和四边形 $GHNM$ 的面积之和. 而去掉公共部分后就是要证明 $S_{\triangle MEG} = S_{\triangle NFH}$. 由于我们已证明 $FN // EM$，$HN // GM$，所以 $\angle EMG = \angle FNH$，这样要证明这两个三角形的面积相等，就可转化为证夹这两个等角的邻边的积相等，也就是要证 $EM \cdot GM = FN \cdot HN$. 由于 FN 是 $\triangle DEM$ 的中位线，有 $\frac{FN}{EM} = \frac{1}{2}$，根据同样的道理，又可得 $\frac{GM}{HN} = \frac{1}{2}$，所以 $\frac{FN}{EM} = \frac{GM}{HN}$，从而完成分析.

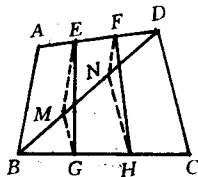


图 8 · 9

例 4 已知：四边形 $ABCD$ 中，E、F 是 AD 的三等分点，G、H 是 BC 的三等分点，K、I 是 AB 的三等分点，J、L 是 CD 的三等分点，EG、FH 分别于 KL、IJ 相交于 M、P、N、Q. 求证：$S_{四边形MPQN} = \frac{1}{9}S_{四边形ABCD}$.

分析：本题条件中给出了 K、I 和 J、L 分别是四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB 和 CD 的三等分点，所以可证明 $S_{四边形KIJL} = \frac{1}{3}S_{四边形ABCD}$. 于是问题就成为要证 $S_{四边形MPQN} = \frac{1}{3}S_{四边形KIJL}$. 这样就应讨论 M、N、P、Q 分别在 KL 和 IJ 上的位置. 由条件 $\frac{AE}{AD} =$

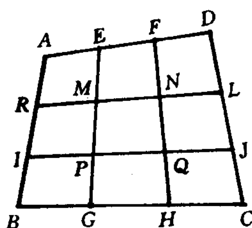


图 8・10

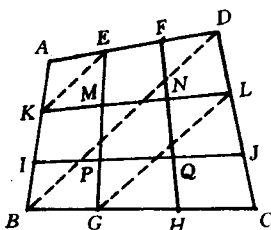


图 8・11

$\frac{1}{3}$，$\frac{AK}{AB}=\frac{1}{3}$，所以$\frac{AE}{AD}=\frac{AK}{AB}$，而这时出现的是相比线段重叠，所以可添加平行线型相似三角形进行证明. 于是连结 KE、BD，可得 $KE\parallel BD$，$\frac{KE}{BD}=\frac{AE}{AD}=\frac{1}{3}$. 根据同样的道理，连结 GL 后，可得 $GL\parallel BD$，$\frac{GL}{BD}=\frac{CG}{CB}=\frac{2}{3}$. 这样就可进一步证得 $KE\parallel GL$，且这一组平行线段四个端点两两的连线在 M 点相交，所以 $\triangle EKM\backsim\triangle GLM$，$\frac{KM}{LM}=\frac{EK}{GL}=\frac{\frac{1}{3}BD}{\frac{2}{3}BD}=\frac{1}{2}$，所以 $KM=\frac{1}{2}LM=\frac{1}{3}KL$，$M$ 是 KL 的一个三等分点，根据同样的道理可证明 N，P、Q 也分别是 KL、IJ 的三等分点，所以就可证明 $S_{四边形MPQN}=\frac{1}{3}S_{四边形KIJL}$.

例 5 已知：四边形 $ABCD$ 中，$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ABC}=3:4:1$，过 B 的直线交 AC、CD 于 M、N，且$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}$. 求证：$M$、$N$ 分别是 AC、CD 的中点.

分析：本题条件中给出的 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ABC}=3:4:1$ 是三角形的面积的比，所以可以用面积的方法进行证明. 由 $S_{\triangle ABD}=3S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle BCD}=4S_{\triangle ABC}$，可得 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=7S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle ACD}=6\cdot S_{\triangle ABC}$，从而可得$\frac{BE}{DE}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{1}{6}$. 又因为 B、D 是过

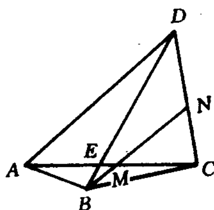


图 8·12

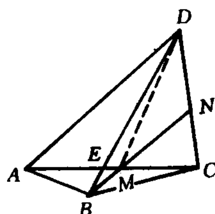


图 8·13

AC 的内分点 E 的直线上的两点，所以$\frac{AE}{CE}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{3}{4}$. $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BCE}}=\frac{AE}{CE}=\frac{3}{4}$.

本题条件中还给出$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}$，也就是$\frac{AM}{CM}=\frac{CN}{DN}$. 经过描图可以发现两组相比线段都分别重叠在一直线上，所以可应用三角形面积的基本图形的性质进行证明. 于是可得$\frac{AM}{CM}=\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle BCM}}$. 又因为 B、M 是过线段 CD 的内分点 N 的直线上的两点，所以连结 DM，可得$\frac{CN}{DN}=\frac{S_{\triangle BCM}}{S_{\triangle BDM}}$. 为了以后表示上的方便，可设 $S_{\triangle BEM}=S_1$，$S_{\triangle ABE}=S$. 则 $S_{\triangle BDM}=7S_1$，$S_{\triangle CBE}=\frac{4}{3}S$. 于是由$\frac{AM}{CM}=\frac{CN}{DN}$，可得$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle BCM}}=\frac{S_{\triangle BCM}}{S_{\triangle BDM}}$，$\frac{S+S_1}{\frac{4}{3}S-S_1}=\frac{\frac{4}{3}S-S_1}{7S_1}$，$7S\cdot S_1+7S_1^2=\left(\frac{4}{3}S-S_1\right)^2$，$63S\cdot S_1+63S_1^2=16S^2-24SS_1+9S_1^2$，$16S^2-87SS_1-54S_1^2=0$，$(S-6S_1)(16S+9S_1)=0$，而 S，S_1 均为正值，所以 $S=6S_1$，则 $S_{\triangle BCE}=8S_1$，$S_{\triangle ABM}=7S_1$，$S_{\triangle BCM}$也等于 $7S_1$，$S_{\triangle ABM}=S_{\triangle BCM}$，从而就可证明 $AM=CM$. 再由 $S_{\triangle BCM}=S_{\triangle BDM}=7S_1$，可得 $CN=DN$.

例 6　已知：$\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，AE 是中线，过 C 作 AD 的垂线，分别交 AB、AE、AD 于 F、G、H. 求证：$GD\parallel AC$.

分析:本题要证明 $GD /\!/ AC$,所以可考虑用三角形面积的方法进行证明,即问题可转化为要证 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ACG}$.

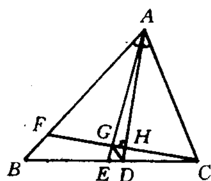


图 8·14

由条件 AD 是$\triangle ABC$ 的内角平分线,所以$\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}$. $\frac{CD}{BC}=\frac{AC}{AB+AC}$,但$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ACB}}=\frac{CD}{BC}$. 所以$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ACB}}=\frac{AC}{AB+AC}$,$S_{\triangle ACD}=\frac{AC}{AB+AC}\cdot S_{\triangle ACB}$.

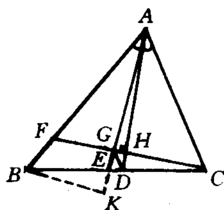


图 8·15

又因 CF 是向角平分线 AD 所作的垂线,所以 $AC=AF$,所以$\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac{AF}{AB}$,这样就出现了 AF 和 AB 这一组相比线段现在重叠在一直线上,所以可添加平行线型相似三角形进行证明. 若取过内分点 F 的线段 FG 为平行方向线段,则平行线可过端点 B 作,也就是过 B 作 $BK /\!/ FG$ 交 AE 的延长线于 K,就可得$\triangle AFG \backsim \triangle ABK$,$\frac{AF}{AB}=\frac{FG}{BK}$. 由条件 $BE=CE$,BC、GK 相交于 E,所以再由 $BK /\!/ GC$,就可得$\triangle BEK$ 和$\triangle CEG$ 是一对中心对称型全等三角形,就可证明 $BK=CG$. $\frac{AF}{AB}=\frac{FG}{CG}$,$\frac{CG}{FG}=\frac{AB}{AC}$,$\frac{CG}{CF}=\frac{AB}{AB+AC}$,但$\frac{CG}{CF}=\frac{S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle ACF}}$,所以 $S_{\triangle ACG}=\frac{AB}{AB+AC}\cdot S_{\triangle ACF}$. 又因为$\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle ACB}}=\frac{AF}{AB}=\frac{AC}{AB}$,$S_{\triangle ACF}=\frac{AC}{AB}\cdot S_{\triangle ACB}$,从而就可证明 $S_{\triangle ACG}=\frac{AB}{AB+AC}\cdot\frac{AC}{AB}\cdot S_{\triangle ACB}=\frac{AC}{AB+AC}\cdot S_{\triangle ACB}$,分析完成.

例 7 已知:$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,CH 是斜边 AB 上的高,$\angle ACH$ 的角平分线交 AB 于 D,E 是 AC 的中点,ED、CH 的延长线相交于 F. 求证:$CD /\!/ BF$.

分析:本题要证明 $CD /\!/ BF$,所以可考虑用三角形面积的方法

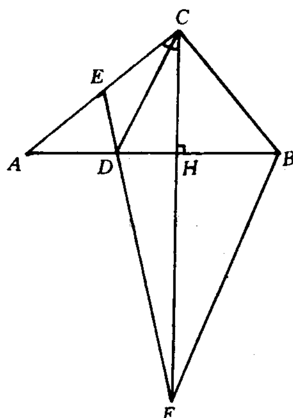


图 8・16

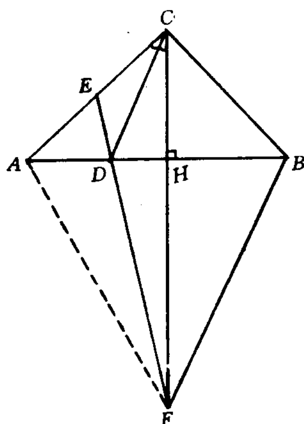


图 8・17

进行证明，即问题转化为要证 $S_{\triangle BFD}=S_{\triangle BFC}$.

由条件 $AE=CE$，D、F 是过内分点，也就是中点 E 的直线上的两点，所以连结 FA 后，可得$\frac{S_{\triangle FDA}}{S_{\triangle FDC}}=\frac{AE}{CE}=1$，$S_{\triangle FDA}=S_{\triangle FDC}$，从而问题可转化为要证 $S_{\triangle FDA}+S_{\triangle BFD}=S_{\triangle FDC}+S_{\triangle BFC}$，就是要证 $S_{\triangle FAB}=S_{四边形BFDC}$，由条件 $CF\perp AB$，所以由 $S_{\triangle FAB}=\frac{1}{2}AB\cdot HF$，$S_{四边形BFDC}=\frac{1}{2}BD\cdot CF$，可知问题成为要证 $AB\cdot HF=BD\cdot CF$，$\frac{AB}{BD}=\frac{CF}{HF}$. 由 $\angle ACB=90°$ 和 $CH\perp AB$，可应用直角三角形斜边上的高的基本图形的性质，得 $\angle BCH=\angle BAC$，而已知 $\angle ACD=\angle HCD$，所以 $\angle BCD=\angle BDC$，$BD=BC$. 所以$\frac{AB}{BD}=\frac{AB}{BC}$，而由 $\triangle ABC\backsim\triangle ACH$，又可得$\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CH}$，应用三角形的内角平分线性质又有$\frac{AC}{CH}=\frac{AD}{HD}$，所以$\frac{AB}{BD}=\frac{AD}{HD}$，那末问题又成为要证$\frac{CF}{HF}=$

$\frac{AD}{HD}$，$AD \cdot HF = CF \cdot HD$. 由于 $AD \cdot HF = 2S_{\triangle AFD}$，$CF \cdot HD = 2S_{\triangle CFD}$，而前面已证 $S_{\triangle AFD} = S_{\triangle CFD}$，所以分析就可以完成.

本题的条件中给出了 $AE = CE$，是相等两线段重叠在一直线上，且过端点 A、C 和内分点，也就是中点 E 的三直线共点于 D，所以可添加平行线型相似三角形的组合图形进行证明. 添加的方法是作同与共点三直线相交的 AC 的平行线，所以过 F 作 $KG \parallel AC$，分别交 CD、AD 的延长线于 K、G，即可得 $\frac{AE}{GF} = \frac{ED}{FD} = \frac{CE}{KF}$，但

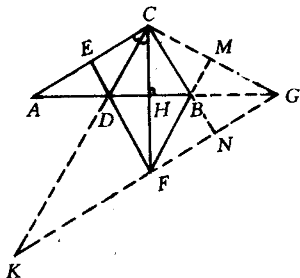


图 8・18

$AE = CE$，所以 $GF = KF$. 又因为 $\angle ACK = \angle FCK$，且 $CA \parallel FA$，所以可得 $\angle FCK = \angle FKC$，$FK = FC = FG$，从而就可应用直角三角形斜边上的中线的基本图形的性质进行证明，也就是连结 CG 后，可得 $\angle KCG = 90°$，这样要证明 $CD \parallel BF$，就要证明 BF 也和 CG 垂直，根据垂线的定义，延长 FB 交 CG 于 M，应证 $FM \perp CG$，而已知 $GH \perp CF$，所以 GH 和 FM 应是这个三角形，即 $\triangle GCF$ 的两条高，那么它们的交点 B 就应是这个三角形的垂心，但 FM 这条高是要证的结论，不能用，所以就要应用第三条高，于是延长 CB 交 FG 于 N，则因 $AC \parallel KG$，且已知 $NC \perp AC$，所以 $CN \perp KG$，B 就是 $\triangle GCF$ 的垂心，分析完成.

本题已知 CD 是 $\angle ECF$ 的角平分线，所以应用角平分线的性质可得 $\frac{ED}{FD} = \frac{CE}{CF}$，而 $CE = AE$，就有 $\frac{ED}{FD} = \frac{AE}{CF}$. 但经描图可发现 ED 和 FD 这一组相比线段现在重叠在一直线上，所以可添加平行线型相似三角形进行证明. 若取过端点 E 的线段 EA 为平行方向线段，则平行线可过另一个端点 F 作，于是过 F 作 $FG \parallel AE$ 交

AB 的延长线于 G，就可得 $\triangle AED \backsim \triangle GFD$，$\frac{ED}{FD}=\frac{AE}{GF}$，于是可证明 $FC=FG$. 这是两条具有公共端点的相等线段. 它们可组成一个等腰三角形，于是连结 CG. 又因为已知 $BC \perp AC$，而 $AC \parallel FG$，所以 $BC \perp FG$，根据垂线的定义，延长 CB 交 FG 于 M，可得 $CM \perp FG$，GH、CM 是 $\triangle CFG$ 的两条高，它们的交点 B 就是 $\triangle CFG$ 的垂心，所以延长 FB 交 CG 于 K，可得 $FK \perp CG$，那末再应用等腰三角形中的重要线段的基本图形的性质，可得 KF 是 $\angle GFC$ 的角平分线. 而我们已作 $AC \parallel FG$，可得 $\angle ACF=\angle GFC$，而 DC 是 $\angle ACF$ 的角平分线，所以 $DC \parallel FB$，得证.

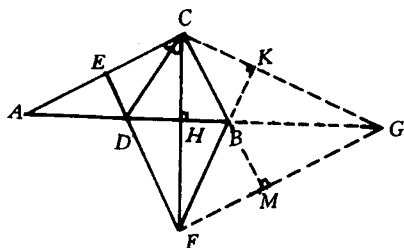


图 8・19